Конспект по Матлогу. Часть 1

Штукенберг Дмитрий

под редакцией Чепелина Вячеслава

Содержание

1 Лекция 1. Введение в математическую логику

1.1 Классическое исчисление высказываний

def: **Высказывание** (формула) строится по правилам:

- **Атомарное**: A, B', C_{1234} (пропозициональные переменные)
- **Составное**: если α и β - высказывания, то:
  - Отрицание: $(\neg\alpha)$
  - Конъюнкция: $(\alpha \,\&\, \beta)$ или $(\alpha \wedge \beta)$
  - Дизъюнкция: $(\alpha \vee \beta)$
  - Импликация: $(\alpha \to \beta)$ или $(\alpha \supset \beta)$

Пример 1

$$(((A \to B) \vee (B \to C)) \vee (C \to A))$$

Метапеременные: $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ — вместо них в формулу можно подставить, что угодно

Переменные для пропозициональных переменных: X, Y_n, Z'

Приоритет связок: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация

Ассоциативность: левая для & и $\vee$, правая для $\to$

def: **Оценка высказываний** определяется:

- Множество значений: $V = \{\text{И}, \text{Л}\}$
- Функция интерпретации: $f : \mathcal{P} \to V$, где $\mathcal{P}$ - множество пропозициональных переменных.
- Синтаксис оценки: $[\![\alpha]\!]^{X_1 := v_1,\ \dots,\ X_n := v_n}$

$$\begin{aligned}
&[\![X]\!] = f(X)\\
&[\![X]\!]^{X:=a} = a\\
&[\![\neg\alpha]\!] = \begin{cases} \text{Л}, & \text{если } [\![\alpha]\!] = \text{И} \\ \text{И}, & \text{иначе} \end{cases}\\
&[\![\alpha \,\&\, \beta]\!] = \begin{cases} \text{И}, & \text{если } [\![\alpha]\!] = [\![\beta]\!] = \text{И} \\ \text{Л}, & \text{иначе} \end{cases}\\
&[\![\alpha \vee \beta]\!] = \begin{cases} \text{Л}, & \text{если } [\![\alpha]\!] = [\![\beta]\!] = \text{Л} \\ \text{И}, & \text{иначе} \end{cases}\\
&[\![\alpha \to \beta]\!] = \begin{cases} \text{Л}, & \text{если } [\![\alpha]\!] = \text{И},\ [\![\beta]\!] = \text{Л} \\ \text{И}, & \text{иначе} \end{cases}
\end{aligned}$$

def: α - **тавтология** ($\models \alpha$), если истинна при всех оценках

Пример 2 $A \to A$ - *тавтология*, $A \to \neg A$ - *не тавтология*

def:

- $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \models \alpha$ - α **следствие**
- **Выполнима** - истинна при некоторой оценке
- **Невыполнима** - ложна при всех оценках
- **Опровержима** - ложна при некоторой оценке

1.2 Теория доказательств

def: **Схема высказывания** - строка, где вместо переменных можно использовать метапеременные

def: Высказывание σ **строится по схеме** *Ш*, если

$$\sigma = Ш[ч_1 := \varphi_1][ч_2 := \varphi_2]...[ч_n := \varphi_n]$$

Схемы аксиом:

1. $\alpha \to \beta \to \alpha$
2. $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$
3. $\alpha \to \beta \to \alpha \& \beta$
4. $\alpha \& \beta \to \alpha$
5. $\alpha \& \beta \to \beta$
6. $\alpha \to \alpha \vee \beta$
7. $\beta \to \alpha \vee \beta$
8. $(\alpha \to \gamma) \to (\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \gamma)$
9. $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha$
10. $\neg\neg\alpha \to \alpha$

Правило вывода Modus Ponens

- Формально:
$$\frac{\alpha \quad \alpha \to \beta}{\beta}$$
- Пример: «Сейчас сентябрь; если сентябрь, то осень; следовательно, осень»

def: **Доказательство** - последовательность $\delta_1, \ldots, \delta_n$, где каждое δ_i:

- Аксиома, или
- Получено по MP из предыдущих

def: Вывод из гипотез Γ - то же, но можно использовать гипотезы из Γ

def: Корректность: $\vdash \alpha \Rightarrow \models \alpha$

def: Полнота: $\models \alpha \Rightarrow \vdash \alpha$

Теорема

Исчисление высказываний корректно

Доказательство:

Индукция по длине вывода + проверка аксиом и правила MP

Теорема о дедукции

$$\Gamma, \alpha \vdash \beta \Leftrightarrow \Gamma \vdash \alpha \to \beta$$

Доказательство:

Конструктивное доказательство: преобразование вывода с гипотезой α в вывод импликации $\alpha \to \beta$. Оно будет на следующей лекции

def: Формула доказуема, если $\exists$ последовательность формул, каждая из которых это либо аксиома, либо получена правилом вывода и последней формулой является α.

2 Лекция 2.

2.1 Теорема о дедукции

Каковы бы ни были Γ, α и β: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ выполнено тогда и только тогда, когда выполнено $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$

Доказательство «в две стороны», сперва «справа налево». Фиксируем Γ, α, β. Пусть $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$, покажем $\Gamma, \alpha \vdash \beta$

То есть по условию существует вывод:

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}, \alpha \to \beta$$

Тогда следующая последовательность — тоже вывод:

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}, \alpha \to \beta, \alpha, \beta$$

Доказательство:

Покажем, что $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$ влечёт $\Gamma, \alpha \vdash \beta$

№ п/п	формула	пояснение
(1)	δ_1	в соответствии с исходным доказательством
	$\dots$	
$(n-1)$	δ_{n-1}	в соответствии с исходным доказательством
(n)	$\alpha \to \beta$	в соответствии с исходным доказательством
$(n+1)$	α	гипотеза
$(n+2)$	β	Modus Ponens n+1, n

Вывод $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ предоставлен, первая часть теоремы доказана.

Покажем, что $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$:

Пусть даны формулы вывода

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}, \beta$$

Аналогично предыдущему пункту, перестроим вывод.

Построим «черновик» вывода, приписав α слева к каждой формуле:

$$\alpha \to \delta_1, \alpha \to \delta_2, \dots, \alpha \to \delta_{n-1}, \alpha \to \beta$$

Данная последовательность формул не обязательно вывод: $\Gamma := \varnothing$, $\alpha := A$

$$\delta_1 := A \to B \to A$$

припишем A слева — вывод не получим:

$$\alpha \to \delta_1 \equiv A \to (A \to B \to A)$$

def: **конечная последовательность** — это функция $\delta : 1 \dots n \to \mathcal{F}$

def: Кон. последовательность, индексированная дробными числами — это функция $\zeta : I \to \mathcal{F}$, где $I \subset \mathbb{Q}$ и I конечно.

Продолжим доказательство: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$:

Будем делать индукцию по длине вывода: Если $\delta_1, \dots, \delta_n$ — вывод $\Gamma, \alpha \vdash \delta_n$, то найдётся вывод ζ_k для $\Gamma \vdash \alpha \to \delta_n$, причём $\zeta_1 \equiv \alpha \to \delta_1, \dots, \zeta_n \equiv \alpha \to \delta_n$.

- База ($n = 1$): частный случай перехода (без М.Р.).
- Переход. Пусть $\delta_1, \dots, \delta_{n+1}$ — исходный вывод. И пусть (по индукционному предположению) уже по начальному фрагменту $\delta_1, \dots, \delta_n$ построен вывод ζ_k утверждения $\Gamma \vdash \alpha \to \delta_n$.

  Но δ_{n+1} как-то был обоснован — разберём случаи:

  1. δ_{n+1} — аксиома или $\delta_{n+1} \in \Gamma$
  2. $\delta_{n+1} \equiv \alpha$
  3. δ_{n+1} — Modus Ponens из δ_j и $\delta_k \equiv \delta_j \to \delta_{n+1}$.

  В каждом из случаев можно дополнить черновик до полноценного вывода.

Случай аксиомы (продолжение):

№ п/п	новый вывод	пояснение
	$\dots$	
(1)	$\alpha \to \delta_1$	
	$\dots$	
(2)	$\alpha \to \delta_2$	
	$\dots$	
$(n + 0.3)$	$\delta_{n+1} \to \alpha \to \delta_{n+1}$	схема аксиом 1
$(n + 0.6)$	δ_{n+1}	аксиома, либо $\delta_{n+1} \in \Gamma$
$(n + 1)$	$\alpha \to \delta_{n+1}$	М.Р. $n + 0.6$, $n + 0.3$

Случай $\delta_{n+1} \equiv \alpha$:

№ п/п	новый вывод	пояснение
	$\dots$	
(1)	$\alpha \to \delta_1$	
	$\dots$	
(2)	$\alpha \to \delta_2$	
	$\dots$	
$(n + 0.2)$	$\alpha \to (\alpha \to \alpha)$	Сх. акс. 1
$(n + 0.4)$	$(\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)$	Сх. акс. 2
$(n + 0.6)$	$(\alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)$	М.Р. $n + 0.2$, $n + 0.4$
$(n + 0.8)$	$\alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha$	Сх. акс. 1
$(n + 1)$	$\alpha \to \alpha$	М.Р. $n + 0.8$, $n + 0.6$

Случай Modus Ponens:

№ п/п	новый вывод	пояснение
	...	
(1)	$\alpha \to \delta_1$	
	...	
(2)	$\alpha \to \delta_2$	
	...	
(j)	$\alpha \to \delta_j$	
	...	
(k)	$\alpha \to \delta_j \to \delta_{n+1}$	
	...	
$(n+0.3)$	$(\alpha \to \delta_j) \to (\alpha \to \delta_j \to \delta_{n+1}) \to (\alpha \to \delta_{n+1})$	Сх. акс. 2
$(n+0.6)$	$(\alpha \to \delta_j \to \delta_{n+1}) \to (\alpha \to \delta_{n+1})$	М.Р. j, $n+0.3$
$(n+1)$	$\alpha \to \delta_{n+1}$	М.Р. k, $n+0.6$

Q.E.D.

Некоторые полезные правила

1. **Правило контрапозиции.** $\vdash (\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$.
2. **Правило исключённого третьего.** $\vdash \alpha \vee \neg\alpha$.
3. **Об исключении допущения** Пусть справедливо $\Gamma, \rho \vdash \alpha$ и $\Gamma, \neg\rho \vdash \alpha$. Тогда также справедливо $\Gamma \vdash \alpha$.

2.2 Теорема о полноте исчисления высказываний

Теорема. Если $\models \alpha$, то $\vdash \alpha$.

def: условное отрицание Зададим некоторую оценку переменных, такую, что $[\![\alpha]\!] = x$.

Тогда *условным отрицанием* формулы α назовём следующую формулу $(\!|\alpha|\!)$:

$$(\!|\alpha|\!) = \begin{cases} \alpha, & x = \text{И} \\ \neg\alpha, & x = \text{Л} \end{cases}$$

Аналогично записи для оценок, будем указывать оценку переменных, если это потребуется / будет неочевидно из контекста:

$$(\!|\neg X|\!)^{X:=\text{Л}} = \neg X \qquad (\!|\neg X|\!)^{X:=\text{И}} = \neg\neg X$$

Также, если $\Gamma := \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, то за $(\!|\Gamma|\!)$ обозначим $(\!|\gamma_1|\!), (\!|\gamma_2|\!), \dots (\!|\gamma_n|\!)$.

Таблицы истинности и высказывания

Рассмотрим связку «импликация» и её таблицу истинности:

$[\![A]\!]$	$[\![B]\!]$	$[\![A \to B]\!]$	формула
Л	Л	И	$\neg A, \neg B \vdash A \to B$
Л	И	И	$\neg A, B \vdash A \to B$
И	Л	Л	$A, \neg B \vdash \neg(A \to B)$
И	И	И	$A, B \vdash A \to B$

Заметим, что с помощью условного отрицания данную таблицу можно записать в одну строку:

$$(\!|A|\!), (\!|B|\!) \vdash (\!|A \to B|\!)$$

Теорема (О полноте исчисления высказываний) Если $\models \alpha$, то $\vdash \alpha$

1. Построим таблицы истинности для каждой связки $(\star)$ и докажем в них каждую строку:

$$(\!|\varphi|\!), (\!|\psi|\!) \vdash (\!|\varphi \star \psi|\!)$$

2. Построим таблицу истинности для α и докажем в ней каждую строку:

$$(\!|\Xi|\!) \vdash (\!|\alpha|\!)$$

3. Если формула общезначима, то в ней все строки будут иметь вид $(\!|\Xi|\!) \vdash \alpha$, потому от гипотез мы сможем избавиться и получить требуемое $\vdash \alpha$.

Доказательство:

Шаг 1. Лемма о связках

Запись

$$(\!|\varphi|\!), (\!|\psi|\!) \vdash (\!|\varphi \star \psi|\!)$$

сводится к 14 утверждениям:

$$\begin{array}{rcl}
\neg\varphi, \neg\psi & \vdash & \neg(\varphi \,\&\, \psi) \\
\neg\varphi, \psi & \vdash & \neg(\varphi \,\&\, \psi) \\
\varphi, \neg\psi & \vdash & \neg(\varphi \,\&\, \psi) \\
\varphi, \psi & \vdash & (\varphi \,\&\, \psi) \\
\neg\varphi, \neg\psi & \vdash & \neg(\varphi \vee \psi) \\
\neg\varphi, \psi & \vdash & (\varphi \vee \psi) \\
\varphi, \neg\psi & \vdash & (\varphi \vee \psi) \\
\varphi, \psi & \vdash & (\varphi \vee \psi)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
\neg\varphi, \neg\psi & \vdash & (\varphi \to \psi) \\
\neg\varphi, \psi & \vdash & (\varphi \to \psi) \\
\varphi, \neg\psi & \vdash & \neg(\varphi \to \psi) \\
\varphi, \psi & \vdash & (\varphi \to \psi) \\
\varphi & \vdash & \neg\neg\varphi \\
\neg\varphi & \vdash & \neg\varphi
\end{array}$$

Шаг 2. Обобщение на любую формулу

Лемма (Условное отрицание формул) Пусть пропозициональные переменные $\Xi := \{X_1, \ldots, X_n\}$ — все переменные, которые используются в формуле α. И пусть задана некоторая оценка переменных.

Тогда, $(\!|\Xi|\!) \vdash (\!|\alpha|\!)$

Доказательстсво леммы:

Индукция по длине формулы α.

- База: формула α — атомарная, т.е. $\alpha \equiv X_i$. Тогда при любом Ξ выполнено $(\!|\Xi|\!)^{X_i := \text{И}} \vdash X_i$ и $(\!|\Xi|\!)^{X_i := \text{Л}} \vdash \neg X_i$.
- Переход: $\alpha \equiv \varphi \star \psi$, причём $(\!|\Xi|\!) \vdash (\!|\varphi|\!)$ и $(\!|\Xi|\!) \vdash (\!|\psi|\!)$

  Тогда построим вывод:

$(1)\dots(n)$	$(\!|\varphi|\!)$	индукционное предположение
$(n+1)\dots(k)$	$(\!|\psi|\!)$	индукционное предположение
$(k+1)\dots(l)$	$(\!|\varphi \star \psi|\!)$	лемма о связках: $(\!|\varphi|\!)$ и $(\!|\psi|\!)$ доказаны выше, значит, их можно использовать как гипотезы

Q.E.D. Леммы

<u>Шаг 3. Избавляемся от гипотез</u>

Лемма 1 *Пусть при всех оценках переменных* $(\!|\Xi|\!) \vdash \alpha$*, тогда* $\vdash \alpha$.

Доказательство:

Индукция по количеству переменных n.

- База: $n = 0$. Тогда $\vdash \alpha$ есть из условия.
- Переход: пусть $(\!|X_1, X_2, \dots X_{n+1}|\!) \vdash \alpha$. Рассмотрим 2^n пар выводов:

$$(\!|X_1, X_2, \dots X_n|\!), X_{n+1} \vdash \alpha \qquad (\!|X_1, X_2, \dots X_n|\!), \neg X_{n+1} \vdash \alpha$$

  По лемме об исключении допущения тогда

$$(\!|X_1, X_2, \dots X_n|\!) \vdash \alpha$$

При этом, $(\!|X_1, X_2, \dots X_n|\!) \vdash \alpha$ при всех оценках переменных $X_1, \dots X_n$. Значит, $\vdash \alpha$ по индукционному предположению.

Q.E.D. Леммы

Замечание:

Теорема о полноте — конструктивна. Получающийся вывод — экспоненциальный по длине.

Несложно по изложенному доказательству разработать программу, строящую вывод.

Вывод для формулы с 3 переменными — порядка 3 тысяч строк.

<u>def:</u> Полная теория - в которой выполняется теорема о полноте

2.3 Интуиционистская логика

Основные положения **интуционизма**:

1. Математика не формальна.
2. Математика независима от окружающего мира.
3. Математика не зависит от логики — это логика зависит от математики.

То есть суть в том, что мы доказываем, что какой-то объект существует «на самом деле», не как в теореме о неподвижной точке например (там мы просто показываем, что такой точки не может не быть, но есть ли она?)

ВНК-интерпретация логических связок

ВНК — это сокращение трёх фамилий: Брауэр, Гейтинг, Колмогоров.

Пусть α, β — некоторые конструкции, тогда:

- $\alpha \mathbin{\&} \beta$ построено, если построены α и β
- $\alpha \vee \beta$ построено, если построено α или β, и мы знаем, что именно
- $\alpha \to \beta$ построено, если есть способ перестроения α в β
- $\perp$ — конструкция, не имеющая построения
- $\neg\alpha$ построено, если построено $\alpha \to \perp$

Дизъюнкция

Конструкция $\alpha \vee \neg\alpha$ не имеет построения в общем случае. Что может быть построено: α или $\neg\alpha$?

Возьмём за α нерешённую проблему, например, $P = NP$

Авторам в данный момент не известно, выполнено $P = NP$ или же $P \neq NP$.

Отличия импликации

Высказывание общезначимо в И.В. и не выполнено в ВНК-интерпретации:

$$(A \to B) \vee (B \to C) \vee (C \to A)$$

Давайте дадим следующий смысл пропозициональным переменным:

- A — 13.09.2025 в Санкт-Петербурге идёт дождь;
- B — 13.09.2025 в Санкт-Петербурге светит солнце;
- C — во 2 семестре ровно 2 человека из групп 38-39 получили «отлично» по матанализу, списав.

Импликацию можно понимать как «формальную» и как «материальную».

- Материальная импликация $A \to B$ — надо посмотреть в окно.
- Формальная импликация $A \to B$ места не имеет (причинно-следственной связи нет).

Формализация интуиционистской логики возможна, но интуитивное понимание — основное.

def: Аксиоматика интуиционистского исчисления высказываний в гильбертовском стиле: аксиоматика КИВ, в которой 10 схема аксиом

$$(10) \quad \neg\neg\alpha \to \alpha$$

заменена на

$$(10\text{и}) \quad \alpha \to \neg\alpha \to \beta$$

Интуиционистское И.В. (натуральный, естественный вывод)

- Формулы языка (секвенции) имеют вид: $\Gamma \vdash \alpha$. Правила вывода:

$$\frac{\text{посылка 1} \qquad \text{посылка 2} \qquad \dots}{\text{заключение}} \text{ (аннотация)}$$

- Аксиома:

$$\frac{}{\Gamma, \alpha \vdash \alpha} \text{ (акс.)}$$

- Правила введения связок:

$$\frac{\Gamma, \alpha \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \to \beta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta}, \frac{\Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha \qquad \Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \,\&\, \beta}$$

- Правила удаления связок:

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha \quad \Gamma \vdash \alpha \to \beta}{\Gamma \vdash \beta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha \to \gamma \quad \Gamma \vdash \beta \to \gamma \quad \Gamma \vdash \alpha \vee \beta}{\Gamma \vdash \gamma} \quad \frac{\Gamma \vdash \alpha \,\&\, \beta}{\Gamma \vdash \alpha} \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha \,\&\, \beta}{\Gamma \vdash \beta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \alpha}$$

- Пример доказательства:

$$\frac{\dfrac{\dfrac{}{A \,\&\, B \vdash A \,\&\, B}\text{ (акс.)}}{A \,\&\, B \vdash B}\text{ (удал\&)} \qquad \dfrac{\dfrac{}{A \,\&\, B \vdash A \,\&\, B}\text{ (акс.)}}{A \,\&\, B \vdash A}\text{ (удал\&)}}{A \,\&\, B \vdash B \,\&\, A}\text{ (введ\&)}$$

Откуда теперь у нас есть Гильбертов вывод (10 аксиом, по порядку), а есть натуральный (1 аксиома, правила введения и удаления связок, в виде дерева)

2.4 Топологическое пространство

def: **Топологическим пространством** называется упорядоченная пара $\langle X, \Omega \rangle$, где X — некоторое множество, а $\Omega \subseteq \mathcal{P}(X)$, причём:

1. $\varnothing, X \in \Omega$
2. если $A_1, \dots, A_n \in \Omega$, то $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \in \Omega$;
3. если $\{A_\alpha\}$ — семейство множеств из Ω, то и $\bigcup_\alpha A_\alpha \in \Omega$.

Множество Ω называется **топологией**. Элементы Ω называются **открытыми множествами.**

def: **Внутренность множества** A° — наибольшее T, что $T \in \Omega$ и $T \subseteq A$.

def: Множество **замкнуто**, если дополнение открыто.

Топологические пространства как модель ИИВ

Теорема. Если $\langle X, \Omega \rangle$ — некоторое топологическое пространство, то следующий способ оценки высказываний даёт корректную модель ИИВ: $V = \Omega$, и $= X$ и
$$\begin{aligned} &[\![\alpha \mathbin{\&} \beta]\!] = [\![\alpha]\!] \cap [\![\beta]\!] \\ &[\![\alpha \vee \beta]\!] = [\![\alpha]\!] \cup [\![\beta]\!] \\ &[\![\neg\alpha]\!] = (c[\![\alpha]\!])^\circ \\ &[\![\alpha \rightarrow \beta]\!] = (c[\![\alpha]\!] \cup [\![\beta]\!])^\circ \end{aligned}$$

def: $\models \alpha$ в топологических моделях, если при всех $\langle X, \Omega \rangle$ имеет место $[\![\alpha]\!] = X$.

Теорема. Полнота топологических моделей ИИВ: $\models \alpha$ тогда и только тогда, когда $\vdash_{\text{и}} \alpha$.

Пример топологий:

1. **Топология стрелки** - отрезки $[a, +\inf)$
2. **Топология Зарисского** - $\{R, \varnothing\} \cup (X \subseteq \mathbb{R} | X^c - \text{конечно})$

Топологии будут еще пощже

3 Лекция 3.

<u>**def:**</u> **Отмеченное (дизъюнктное) объединение**: $A \uplus B := \{\langle x, 0\rangle \mid x \in A\} \cup \{\langle y, 1\rangle \mid y \in B\}$

<u>**def:**</u> Ложь (необитаемый тип) ??????????? TODO

Перепишем старый пример чуть иначе:

```
let csqrt x =
   if x >= 0. then sqrt x
              else failwith "Cannot compute square root"
```

Какой тип у `csqrt`? Рассмотрим ветки `if`

- `then:` $\sqrt{x}$: `float`
- `else:` failwith s : $\perp$, и поэтому failwith s : $\perp \vdash$ failwith s : `float`

Ветка `else` не возвращает результата — поэтому возвращает любой тип; «из лжи следует всё, что угодно».

<u>**def:**</u> **Изоморфизм Карри-Ховарда** (также известный как соответствие Карри-Ховарда) — это прямая параллель между миром формальной логики и миром теории типов в программировании.

Если говорить просто, это утверждение, что:

Доказательство математического утверждения — это в точности то же самое, что и программа, соответствующая определенному типу.

Программа (λ-выражение)	Исчисление высказываний
Выражение	доказательство
Тип выражения	высказывание
Тип функции	импликация
Упорядоченная пара	Конъюнкция
Алгебраический тип	Дизъюнкция
Необитаемый тип	Ложь

3.1 Топологические понятия

<u>**def:**</u> Функция $f : X \to Y$ **непрерывна**, если прообраз любого открытого множества открыт.

<u>**def:**</u> Будем говорить, что множество **компактно**, если из любого его открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие

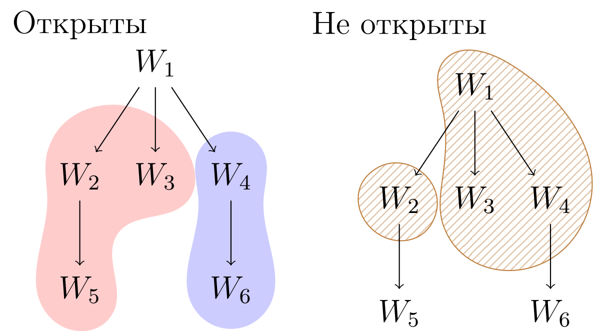
<u>**def:**</u> Пространство $\langle X_1, \Omega_1\rangle$ — **подпространство** пространства $\langle X, \Omega\rangle$, если $X_1 \subseteq X$ и $\Omega_1 = \{A \cap X_1 | A \in \Omega\}$.

<u>**def:**</u> Пространство $\langle X, \Omega\rangle$ **связно**, если нет $A, B \in \Omega$, что $A \cup B = X$, $A \cap B = \varnothing$ и $A, B \neq \varnothing$

<u>**def:**</u> Множество **связно**, если соотв. ему подпространство связно.

<u>**Топология на деревьях**</u>

def: Пусть некоторый лес задан конечным множеством вершин V и отношением $(\preceq)$, связывающим предков и потомков ($a \preceq b$, если b — потомок a). Тогда подмножество его вершин $X \subseteq V$ назовём открытым, если из $a \in X$ и $a \preceq b$ следует, что $b \in X$.



Теорема.

Лес связен (является одним деревом) тогда и только тогда, когда соответствующее ему топологическое пространство связно.

Доказательство:

1. Лес связен: пусть не так и найдутся открытые непустые A,B, что $A \cup B = V$ и $A \cap B = \varnothing$. Пусть $v \in V$ — корень дерева и пусть $v \in A$ (для определённости). Тогда $A = \{x \mid v \preceq x\}$ и $B = \varnothing$.

2. Пусть лес топологически связен, но есть несколько разных корней $v_1, v_2, \ldots, v_k$. Возьмём $A_i = \{x \mid v_i \preceq x\}$. Тогда все A_i открыты, непусты, дизъюнктны и $V = \cup A_i$.

Q.E.D.

def: Множество нижних граней $X \subseteq \mathcal{U}$: $\mathrm{lwb}_{\mathcal{U}} X = \{y \in \mathcal{U} \mid y \preceq x \text{ при всех } x \in X\}$.

def: Множество верхних граней $X \subseteq \mathcal{U}$: $\mathrm{upb}_{\mathcal{U}} X = \{y \in \mathcal{U} \mid x \preceq y \text{ при всех } x \in X\}$.

def:

минимальный ($m \in X$): нет меньшего	при всех $y \in X$, $y \preceq m$ влечёт $y = m$
максимальный ($m \in X$): нет большего	при всех $y \in X$, $m \preceq y$ влечёт $y = m$
наименьший ($m \in X$): меньше всех	при всех $y \in X$ выполнено $m \preceq y$
наибольший ($m \in X$): больше всех	при всех $y \in X$ выполнено $y \preceq m$
инфимум: наибольшая нижняя грань	$\inf_{\mathcal{U}} X = \text{наиб}(\mathrm{lwb}_{\mathcal{U}} X)$
супремум: наименьшая верхняя грань	$\sup_{\mathcal{U}} X = \text{наим}(\mathrm{upb}_{\mathcal{U}} X)$

def: Внутренность множества — рассмотрим $\langle X, \Omega \rangle$ и возьмём $(\subseteq)$ как отношение частичного порядка на $\mathcal{P}(X)$. Тогда $A^\circ := \inf_\Omega(\{A\})$.

Теорема.

A° определена для любого A.

Доказательство:

Пусть $V = \mathrm{lwb}_\Omega\{A\} = \{Q \in \Omega \mid Q \subseteq A\}$. Тогда $\inf_\Omega\{A\} = \bigcup V$.

Напомним, $\inf_{\mathcal{U}} T = \text{наиб}(\mathrm{lwb}_{\mathcal{U}} T)$.

1. Покажем принадлежность: $\bigcup V \subseteq A$ и $\bigcup V \in \Omega$ как объединение открытых.

2. Покажем, что все из V меньше или равны: пусть $X \in V$, то есть $V = \{X, \dots\}$, тогда $X \subseteq X \cup \dots$, тогда $X \subseteq \bigcup V$

Q.E.D

3.2 Решётки

def: **Решёткой** называется упорядоченная пара: $\langle X, (\preceq) \rangle$, где X — некоторое множество, а $(\preceq)$ — частичный порядок на X, такой, что для любых $a, b \in X$ определены $a + b = \sup\{a, b\}$ и $a \cdot b = \inf\{a, b\}$.

То есть, $a + b$ — наименьший элемент c, что $a \preceq c$ и $b \preceq c$.

Теорема.

Рассмотрим топологическое пространство $\langle X, \Omega \rangle$. Введем отношение порядка $\forall A, B : A \subseteq B : A \preceq B$. Тогда получившаяся вещь - решетка.

def: **Псевдодополнением** $a \to b$ называется наибольший из $\{x \mid a \cdot x \preceq b\}$.

def: **Дистрибутивной решёткой** называется такая, что для любых a, b, c выполнено $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

def: **Импликативная решётка** — такая, в которой для любых элементов есть псевдодополнение.

Лемма:

Любая импликативная решётка — дистрибутивна.

def: 0 — **наименьший элемент решётки**, а 1 — **наибольший элемент решётки**

Лемма:

В любой импликативной решётке $\langle X, (\preceq) \rangle$ есть 1

Доказательство:

Рассмотрим $a \to a$, тогда $a \to a = \text{наиб}\{c \mid a \cdot c \preceq a\} = \text{наиб} X = 1$.

Q.E.D.

def: **Импликативная решётка** с 0 — псевдобулева алгебра (алгебра Гейтинга). В такой решётке определено $\sim a := a \to 0$

def: **Булева алгебра** — псевдобулева алгебра, в которой $a + \sim a = 1$ для всех a.

Булева алгебра является булевой алгеброй в смысле решёток

Доказательство:

Символы булевой алгебры: $(\&), (\vee), (\neg), \text{Л}, \text{И}$.
Символы решёток: $(+), (\cdot), (\to), (\sim), 0, 1$
Упорядочивание: $\text{Л} \leq \text{И}$.

1. $a \,\&\, b = \min(a, b)$, $a \vee b = \max(a, b)$ (анализ таблицы истинности), отсюда $a \cdot b = a \,\&\, b$ и $a + b = a \vee b$.

2. $a \to b = \neg a \vee b$, так как:

$$a \to b = \text{наиб}\{c | c \,\&\, a \leq b\} = \begin{cases} \neg a, & b = \text{Л} \\ \text{И}, & b = \text{И} \end{cases}$$

3. $0 = \min\{\text{И}, \text{Л}\} = \text{Л}$, $1 = \max\{\text{И}, \text{Л}\} = \text{И}$, $\sim a = a \to 0 = \neg a \vee \text{Л} = \neg a$. Заметим, что $a + \sim a = a \vee \neg a = \text{И}$.

Итого: булева алгебра — импликативная решётка с 0 и с $a + \sim a = 1$.

Q.E.D.

Лемма:

$\langle \mathcal{P}(X), (\subseteq) \rangle$ — булева алгебра.

Доказательство:

$a \to b = \text{наиб}\{c \subseteq X \mid a \cap c \subseteq b\}$. Т.е. наибольшее, не содержащее точек из $a \setminus b$. Т.е. $X \setminus (a \setminus b)$. То есть $(X \setminus a) \cup b$.

$a + \sim a = a \cup (X \setminus a) \cup \varnothing = X$

Q.E.D.

Лемма: $\langle \Omega, (\subseteq) \rangle$ — псевдобулева алгебра.

Доказательство:

$a \to b = \text{наиб}\{c \in \Omega \mid a \cap c \subseteq b\}$. Т.е. наибольшее открытое, не содержащее точек из $a \setminus b$. То есть, $(X \setminus (a \setminus b))^\circ$. То есть, $((X \setminus a) \cup b)^\circ$.

Q.E.D.

def: Пусть некоторое исчисление высказываний оценивается значениями из некоторой решётки. Назовём оценку согласованной с исчислением, если $[\![\alpha \,\&\, \beta]\!] = [\![\alpha]\!] \cdot [\![\beta]\!]$, $[\![\alpha \vee \beta]\!] = [\![\alpha]\!] + [\![\beta]\!]$, $[\![\alpha \to \beta]\!] = [\![\alpha]\!] \to [\![\beta]\!]$, $[\![\neg\alpha]\!] = \sim [\![\alpha]\!]$, $[\![A \,\&\, \neg A]\!] = 0$, $[\![A \to A]\!] = 1$.

Теорема.

Любая псевдобулева алгебра, являющаяся согласованной оценкой интуиционистского исчисления высказываний, является его корректной моделью: если $\vdash \alpha$, то $[\![\alpha]\!] = 1$.

Теорема.

Любая булева алгебра, являющаяся согласованной оценкой классического исчисления высказываний, является его корректной моделью: если $\vdash \alpha$, то $[\![\alpha]\!] = 1$

3.3 Алгебра Линденбаума

def: Определим предпорядок на высказываниях: $\alpha \preceq \beta := \alpha \vdash \beta$ в интуиционистском исчислении высказываний. Также $\alpha \approx \beta$, если $\alpha \preceq \beta$ и $\beta \preceq \alpha$.

def: Пусть L — множество всех высказываний. Тогда алгебра Линденбаума $\mathcal{L} = L/_{\approx}$.

Теорема

$\mathcal{L}$ — псевдобулева алгебра.

Схема доказательства:

Надо показать, что $(\preceq)$ есть отношение порядка на $\mathcal{L}$, что

$$[\alpha \vee \beta]_{\mathcal{L}} = [\alpha]_{\mathcal{L}} + [\beta]_{\mathcal{L}}$$

$$[\alpha \,\&\, \beta]_{\mathcal{L}} = [\alpha]_{\mathcal{L}} \cdot [\beta]_{\mathcal{L}}$$

Импликация есть псевдодополнение

$$[A \,\&\, \neg A]_{\mathcal{L}} = 0, \quad [\alpha]_{\mathcal{L}} \to 0 = [\neg\alpha]_{\mathcal{L}}$$

Q.E.D.

Теорема.

Пусть $[\![\alpha]\!] = [\alpha]_{\mathcal{L}}$.

Такая оценка интуиционистского исчисления высказываний алгеброй Линденбаума является согласованной.

Теорема.

Интуиционистское исчисление высказываний полно в псевдобулевых алгебрах: если $\models \alpha$ во всех псевдобулевых алгебрах, то $\vdash \alpha$.

Доказательство:

Возьмём в качестве модели исчисления алгебру Линденбаума: $[\![\alpha]\!] = [\alpha]_{\mathcal{L}}$.

Пусть $\models \alpha$. Тогда $[\![\alpha]\!] = 1$ во всех псевдобулевых алгебрах, в том числе и $[\![\alpha]\!] = 1_{\mathcal{L}}$. То есть $[\alpha]_{\mathcal{L}} = [A \to A]_{\mathcal{L}}$. То есть $A \to A \approx \alpha$. Значит, в частности, $A \to A \vdash \alpha$. Значит, $\vdash \alpha$.

Q.E.D

4 Лекция 4.

4.1 Модели Крипке

def: Модель Крипке $\langle \mathcal{W}, (\preceq), (\Vdash) \rangle$:

- $\mathcal{W}$ — множество миров, $(\preceq)$ — нестрогий частичный порядок на $\mathcal{W}$;
- $(\Vdash) \subseteq \mathcal{W} \times P$ — отношение вынуждения между мирами и переменными, причём, если $W_i \preceq W_j$ и $W_i \Vdash X$, то $W_j \Vdash X$.

Доопределим вынужденность:

- $W \Vdash \alpha \,\&\, \beta$, если $W \Vdash \alpha$ и $W \Vdash \beta$;
- $W \Vdash \alpha \vee \beta$, если $W \Vdash \alpha$ или $W \Vdash \beta$;
- $W \Vdash \alpha \to \beta$, если всегда при $W \preceq W_1$ и $W_1 \Vdash \alpha$ выполнено $W_1 \Vdash \beta$
- $W \Vdash \neg\alpha$, если всегда при $W \preceq W_1$ выполнено $W_1 \nVdash \alpha$.

Будем говорить, что $\Vdash \alpha$, если $W \Vdash \alpha$ при всех $W \in \mathcal{W}$. Будем говорить, что $\models_\kappa \alpha$, если $\Vdash \alpha$ во всех моделях Крипке.

Корректность моделей Крипке

Лемма. Если $W_1 \Vdash \alpha$ и $W_1 \preceq W_2$, то $W_2 \Vdash \alpha$

Теорема.

Пусть $\langle \mathcal{W}, (\preceq), (\Vdash) \rangle$ — некоторая модель Крипке. Тогда она есть корректная модель интуиционистского исчисления высказываний.

Доказательство:

Доказательство для древовидного $(\preceq)$, обобщение на произвольный порядок легко построить.

Заметим, что $V(\alpha) := \{w \in \mathcal{W} \mid w \Vdash \alpha\}$ открыто в топологии для деревьев. Значит, положив $V = \{\ S \mid S \subseteq \mathcal{W} \ \&\ S \text{ — открыто } \}$ и $[\![\alpha]\!] = V(\alpha)$, получим алгебру Гейтинга.

Q.E.D.

4.2 Табличные модели

def: Пусть задано V, значение $T \in V$ («истина»), функция $f_P : P \to V$, функции $f_\&, f_\vee, f_\to : V \times V \to V$, функция $f_\neg : V \to V$.

Тогда оценка $[\![X]\!] = f_P(X)$, $[\![\alpha \star \beta]\!] = f_\star([\![\alpha]\!], [\![\beta]\!])$, $[\![\neg\alpha]\!] = f_\neg([\![\alpha]\!])$ — **табличная**.

Если $\vdash \alpha$ влечёт $[\![\alpha]\!] = T$ при всех оценках пропозициональных переменных f_P, то $\mathcal{M} := \langle V, T, f_\&, f_\vee, f_\to, f_\neg \rangle$ — **табличная модель**.

def: Табличная модель **конечна**, если V конечно.

Теорема.

Не существует полной конечной табличной модели для интуиционистского исчисления высказываний

Доказательство нетабличности: α_n

Пусть существует полная конечная табличная модель $\mathcal{M}$, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. То есть, если $\models_{\mathcal{M}} \alpha$, то $\vdash \alpha$.

Рассмотрим

$$\alpha_n = \bigvee_{1 \le p < q \le n+1} A_p \to A_q$$

Рассмотрим оценку $f_P : \{A_1 \dots A_{n+1}\} \to \{v_1 \dots v_n\}$. По принципу Дирихле существуют $p \neq q$, что $[\![A_p]\!] = [\![A_q]\!]$. Значит,

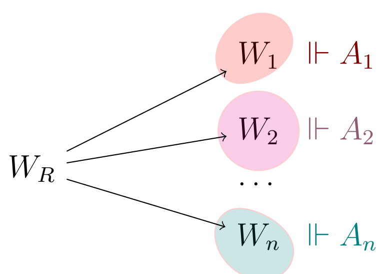
$$[\![A_p \to A_q]\!] = f_\to([\![A_p]\!], [\![A_q]\!]) = f_\to(v, v)$$

С другой стороны, $\vdash X \to X$ — поэтому $f_\to([\![X]\!], [\![X]\!]) = T$, значит,

$$[\![A_p \to A_q]\!] = f_\to(v, v) = f_\to([\![X]\!], [\![X]\!]) = T$$

Аналогично, $\vdash \sigma \vee (X \to X) \vee \tau$, отсюда $[\![\alpha_n]\!] = [\![\sigma \vee (X \to X) \vee \tau]\!] = T$.

Однако, в такой модели $\not\Vdash \alpha_n$:



Если $q > 1$, то $W_1 \not\Vdash A_q$ и $W_1 \not\Vdash A_1 \to A_q$

Если $q > 2$, то $W_2 \not\Vdash A_q$ и $W_2 \not\Vdash A_2 \to A_q$

$W_n \not\Vdash A_{n+1}$; $W_n \not\Vdash A_n \to A_{n+1}$

Если $p < q$, то $W_p \not\Vdash A_q$ и $W_p \not\Vdash A_p \to A_q$

Если $p < q$, то $W_p \not\Vdash A_p \to A_q$, то есть $W_R \not\Vdash A_p \to A_q$.

Отсюда: $W_R \not\Vdash \bigvee_{p<q} A_p \to A_q$, $W_R \not\Vdash \alpha_n$, потому $\not\models \alpha_n$ и $\not\vdash \alpha_n$.

Q.E.D.

def: Исчисление **дизъюнктивно**, если при любых α и β из $\vdash \alpha \vee \beta$ следует $\vdash \alpha$ или $\vdash \beta$.

def: **Решётка гёделева**, если $a + b = 1$ влечёт $a = 1$ или $b = 1$.

Теорема

Интуиционистское исчисление высказываний дизъюнктивно

4.3 Алгебра Линденбаума как псевдобулева алгебра

- *(импликативная ...)* Покажем $[\alpha] \to [\beta] = [\alpha \to \beta]$:

  в самом деле, $[\alpha] \to [\beta] = \text{наиб} \{[\sigma] \mid [\alpha \& \sigma] \le [\beta]\}$. Покажем требуемое двумя включениями:

  1. $\alpha \,\&\, (\alpha \to \beta) \vdash \beta$ (карринг + транзитивность импликации)

2. Если $\alpha \,\&\, \sigma \vdash \beta$, то $\sigma \vdash \alpha \to \beta$ (карринг + теорема о дедукции)

- *(... с нулём ...)* Покажем, что $0 = [A \,\&\, \neg A]$:

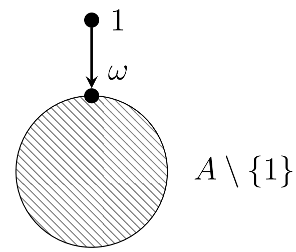
  в самом деле, $A \,\&\, \neg A \vdash \sigma$ при любом σ.

- *(... согласованная с ИИВ)*
  1. Из доказательства видно, что $[\alpha \,\&\, \beta] = [\alpha] \cdot [\beta]$, $[\alpha \vee \beta] = [\alpha] + [\beta]$, $[\alpha \to \beta] = [\alpha] \to [\beta]$, $[A \,\&\, \neg A] = 0$.
  2. $[A \to A] = [A] \to [A] = 1$ по свойствам алгебры Гейтинга
  3. $[\neg\alpha] = [\alpha \to A \,\&\, \neg A] = [\alpha] \to 0 = \sim [\alpha]$

4.4 Гёделевизация (операция $\Gamma(\mathcal{A})$)

def: Для алгебры Гейтинга $\mathcal{A} = \langle A, (\preceq)\rangle$ определим операцию **«гёделевизации»**: $\Gamma(\mathcal{A}) = \langle A \cup \{\omega\}, (\preceq_{\Gamma(\mathcal{A})})\rangle$, где отношение $(\preceq_{\Gamma(\mathcal{A})})$ — минимальное отношение порядка, удовлетворяющее условиям:

- $a \preceq_{\Gamma(\mathcal{A})} b$, если $a \preceq_{\mathcal{A}} b$ и $a, b \notin \{\omega, 1\}$;
- $a \preceq_{\Gamma(\mathcal{A})} \omega$, если $a \neq 1$;
- $\omega \preceq_{\Gamma(\mathcal{A})} 1$



Теорема.

$\Gamma(\mathcal{A})$ — гёделева алгебра.

Доказательство:

Проверка определения алгебры Гейтинга и наблюдение: если $a \preceq \omega$ и $b \preceq \omega$, то $a + b \preceq \omega$.

Q.E.D.

def: Определим $[\![\cdot]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})} : \mathcal{F} \to \Gamma(\mathcal{L})$. Положим $[\![X]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})} := [\![X]\!]_{\mathcal{L}}$. Связки определим естественным образом: $[\![\alpha \,\&\, \beta]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})} := [\![\alpha]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})} \cdot [\![\beta]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})}$ и т.п.

Теорема.

Оценка является алгеброй Гейтинга, согласованной с ИИВ.

Доказательство:

$\Gamma(\mathcal{L})$ — алгебра Гейтинга. Также заметим, что:

- $[\![\alpha \to \alpha]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})} = [\![\alpha]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})} \to [\![\alpha]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})} = 1_{\Gamma(\mathcal{L})}$
- $[\![\alpha \,\&\, \neg\alpha]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})} = [\![\alpha]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})} \cdot ([\![\alpha]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})} \to 0) = 0_{\Gamma(\mathcal{L})}$.

Согласованность оценки следует из определения и указанных выше соображений.

Q.E.D.

4.5 Гомоморфизм алгебр

def: Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — **алгебры Гейтинга**. Тогда $g : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ — гомоморфизм, если $g(a \star b) = g(a) \star g(b)$, $g(0_\mathcal{A}) = 0_\mathcal{B}$ и $g(1_\mathcal{A}) = 1_\mathcal{B}$.

def: Будем говорить, что оценка $[\![\cdot]\!]_\mathcal{A}$ согласована с $[\![\cdot]\!]_\mathcal{B}$ и гомоморфизмом g, если $g(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$ и $g([\![\alpha]\!]_\mathcal{A}) = [\![\alpha]\!]_\mathcal{B}$.

def: $[\mathcal{G} : \Gamma(\mathcal{L}) \to \mathcal{L}]$

$$\mathcal{G}(a) = \begin{cases} a, & a \neq \omega \\ 1, & a = \omega \end{cases}$$

Лемма

$\mathcal{G}$ — гомоморфизм $\Gamma(\mathcal{L})$ и $\mathcal{L}$, причём оценка $[\![\cdot]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})}$ согласована с $\mathcal{G}$ и $[\![\cdot]\!]_\mathcal{L}$.

Теорема

Если $\vdash \alpha \vee \beta$, то либо $\vdash \alpha$, либо $\vdash \beta$.

Доказательство:

Пусть $\vdash \alpha \vee \beta$. Тогда $[\![\alpha \vee \beta]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})} = 1$ (так как данная оценка согласована с ИИВ). Тогда $[\![\alpha]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})} = 1$ или $[\![\beta]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})} = 1$ (так как $\Gamma(\mathcal{L})$ гёделева).

Пусть $[\![\alpha]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})} = 1$, тогда $\mathcal{G}([\![\alpha]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})}) = [\![\alpha]\!]_\mathcal{L} = 1$, тогда $\vdash \alpha$ (по полноте $\mathcal{L}$).

Q.E.D.

4.6 Построение дистрибутивных подрешёток

def: Решётка $\mathcal{L}' = \langle L', (\preceq) \rangle$ — подрешётка решётки $\mathcal{L} = \langle L, (\preceq) \rangle$, если $L' \subseteq L$, $(\preceq') \subseteq (\preceq)$ и при $a, b \in L'$ выполнено $a +_{\mathcal{L}'} b = a +_\mathcal{L} b$ и $a \cdot_{\mathcal{L}'} b = a \cdot_\mathcal{L} b$.

Лемма.

Существует дистрибутивная подрешётка $\mathcal{L}'$, содержащая $a_1, \dots, a_n$, что $|L'| \leq 2^{2^n}$.

Доказательство:

Пусть $\mathcal{L}' = \langle \{\varphi(a_1, \dots, a_n) \mid \varphi \text{ составлено из } (+) \text{ и } (\cdot)\}, (\preceq) \rangle$. Заметим, что если $p, q \in L'$, то $p \star_\mathcal{L} q \in L'$ (так как $\varphi_p(\overrightarrow{a}) \star \varphi_q(\overrightarrow{a}) = \psi(\overrightarrow{a})$). Также ясно, что если $\sup_L\{p, q\} \in L'$ (или $\inf_L\{p, q\} \in L'$), то $p \star_\mathcal{L} q = p \star_{\mathcal{L}'} q$. Значит, $\mathcal{L}'$ также дистрибутивна. Построим «ДНФ»:

$$\varphi(a_1, \dots, a_n) = \sum_{\text{Кн} \in \text{ДНФ}(\varphi)} \prod_{i \in \text{Кн}} a_i$$

Всего не больше 2^n возможных компонент и 2^{2^n} возможных формул $\varphi(\overrightarrow{a})$.

Q.E.D

Теорема

Если $\not\vdash \alpha$ в ИИВ, то существует $\mathcal{G}$, что $\mathcal{G} \not\models \alpha$, причём $|\mathcal{G}| \leq 2^{2^{|\alpha|+2}}$.

Доказательство:

Если $\not\vdash \alpha$, то по полноте найдётся алгебра Гейтинга $\mathcal{H}$, что $\mathcal{H} \not\models \alpha$.

Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — подформулы α. Пусть $\mathcal{G}$ — дистрибутивная подрешётка $\mathcal{H}$, построенная по $[\![\varphi_1]\!], \dots, [\![\varphi_n]\!]$, 0 и 1.

Очевидно, что $\mathcal{G}$ — алгебра Гейтинга, и можно показать, что $\mathcal{G} \not\models \alpha$ (псевдодополнения не обязаны сохраниться). Тогда по лемме, $|\mathcal{G}| \leq 2^{2^{n+2}}$.

Теория

ИИВ разрешимо.

Доказательство:

По формуле α построим все возможные алгебры Гейтинга $\mathcal{G}$ размера не больше $2^{2^{|\alpha|+2}}$, если $\mathcal{G} \models \alpha$, то $\vdash \alpha$.

Q.E.D.

5 Информация о курсе.

Поток — y2024.
Группы M3132-M3139.
Преподаватель — Штукенберг Дмитрий Григорьевич.

Нам пизда, ребятки.