Конспект по Матлогу.

Штукенберг Дмитрий

под редакцией Чепелина Вячеслава

Содержание

1 Лекция 1. Введение в математическую логику 2
1.1 Математический анализ и его формализация . . . 2
1.2 Парадокс брадобрея, парадокс Рассела . . . 2
1.3 Программа Гильберта . . . 2
1.4 Классическое исчисление высказываний . . . 3
1.5 Метаязыковые соглашения . . . 3
1.6 Теория моделей . . . 3
1.7 Тавтологии и выполнимость . . . 4
1.8 Теория доказательств . . . 4
1.8.1 Схемы высказываний . . . 4
1.8.2 Аксиомы исчисления высказываний . . . 4
1.8.3 Правило вывода Modus Ponens . . . 5

2 Лекция 2. 6
2.1 Теорема о дедукции . . . 6
2.2 Теорема о полноте исчисления высказываний . . . 8
2.3 Интуиционистская логика . . . 11
2.3.1 Интуиционизм . . . 11
2.3.2 Интуиционистское И.В. (натуральный, естественный вывод) . . . 12
2.4 Немного об общей топологии . . . 13
2.4.1 Топологическое пространство . . . 13
2.4.2 Топологические пространства как модель ИИВ . . . 13

3 Информация о курсе. 14

1 Лекция 1. Введение в математическую логику

1.1 Математический анализ и его формализация

- **Ньютон, Лейбниц** (1664+) - неформальная идея анализа
- **Критика**: Джордж Беркли. «Аналитик, или Рассуждение, адресованное неверующему математику»
- **Коши** - последовательности вместо бесконечно-малых, пределы
- **Вейерштрасс** - формализация вещественных чисел
- **Кантор** - теория множеств (1875), формализующая вещественные числа
- **Парадокс Рассела** (1901) - кризис оснований математики
- **Давид Гильберт**: «Никто не изгонит нас из рая, который основал Кантор»

1.2 Парадокс брадобрея, парадокс Рассела

- **Парадокс брадобрея**: На острове брадобрей бреет всех, кто не бреется сам. Бреется ли сам брадобрей?
- **Парадокс Рассела**: Рассмотрим множество

$$X = \{x \mid x \notin x\}$$

  Что можно сказать про $X \in X$?
- Анализ:
  - Пусть $X \in X$. Тогда по определению $X \notin X$
  - Пусть $X \notin X$. Тогда по определению $X \in X$
- Философский вывод: проблема существования математических объектов

1.3 Программа Гильберта

- **Цели программы** (1921):
  1. Формализация всей математики
  2. Доказательство полноты формализации
  3. Доказательство непротиворечивости
  4. Консервативность (исключение идеальных объектов)
  5. Разрешимость (алгоритмическая проверка истинности)
- **Теоремы Гёделя о неполноте** (1930) - ограничения программы
- Современный подход: частичная формализация и изучение ограничений

1.4 Классическое исчисление высказываний

Определение 1 ***Высказывание*** *(формула) строится по правилам:*

- ***Атомарное:*** A, B', C_{1234} *(пропозициональные переменные)*
- ***Составное:*** *если* α *и* β *- высказывания, то:*
  - *Отрицание:* $(\neg\alpha)$
  - *Конъюнкция:* $(\alpha \,\&\, \beta)$ *или* $(\alpha \wedge \beta)$
  - *Дизъюнкция:* $(\alpha \vee \beta)$
  - *Импликация:* $(\alpha \to \beta)$ *или* $(\alpha \supset \beta)$

Пример 1

$$(((A \to B) \vee (B \to C)) \vee (C \to A))$$

1.5 Метаязыковые соглашения

- **Метапеременные**: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$
- **Переменные для пропозициональных переменных**: X, Y_n, Z'
- **Приоритет связок**: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация
- **Ассоциативность**: левая для & и $\vee$, правая для $\to$

Пример 2 *Упрощение записи:*

$$(A \to B) \,\&\, Q \vee ((\neg B \to B) \to C) \vee (C \to C \to A)$$

1.6 Теория моделей

Определение 2 ***Оценка высказываний*** *определяется:*

- *Множество значений:* $V = \{И, Л\}$
- *Функция интерпретации:* $f : \mathcal{P} \to V$
- *Синтаксис оценки:* $[\![\alpha]\!]^{X_1 := v_1,\ \ldots,\ X_n := v_n}$

Рекурсивное определение оценки

$$
\begin{aligned}
&[\![X]\!] = f(X) \\
&[\![X]\!]^{X:=a} = a \\
&[\![\neg\alpha]\!] = \begin{cases} Л, & \text{если } [\![\alpha]\!] = И \\ И, & \text{иначе} \end{cases} \\
&[\![\alpha \,\&\, \beta]\!] = \begin{cases} И, & \text{если } [\![\alpha]\!] = [\![\beta]\!] = И \\ Л, & \text{иначе} \end{cases} \\
&[\![\alpha \vee \beta]\!] = \begin{cases} Л, & \text{если } [\![\alpha]\!] = [\![\beta]\!] = Л \\ И, & \text{иначе} \end{cases} \\
&[\![\alpha \to \beta]\!] = \begin{cases} Л, & \text{если } [\![\alpha]\!] = И,\ [\![\beta]\!] = Л \\ И, & \text{иначе} \end{cases}
\end{aligned}
$$

1.7 Тавтологии и выполнимость

Определение 3 α - ***тавтология*** *($\models \alpha$), если истинна при всех оценках*

Пример 3 $A \to A$ *- тавтология,* $A \to \neg A$ *- не тавтология*

Определение 4

- $\gamma_1, \dots, \gamma_n \models \alpha$ - α ***следствие***
- ***Выполнима*** *- истинна при некоторой оценке*
- ***Невыполнима*** *- ложна при всех оценках*
- ***Опровержима*** *- ложна при некоторой оценке*

1.8 Теория доказательств

1.8.1 Схемы высказываний

Определение 5 ***Схема высказывания*** *- строка, где вместо переменных можно использовать метапеременные*

Определение 6 *Высказывание* σ ***строится по схеме*** *Ш, если*

$$\sigma = Ш[ч_1 := \varphi_1][ч_2 := \varphi_2]...[ч_n := \varphi_n]$$

1.8.2 Аксиомы исчисления высказываний

Определение 7 ***Схемы аксиом:***

1. $\alpha \to \beta \to \alpha$
2. $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$
3. $\alpha \to \beta \to \alpha \& \beta$
4. $\alpha \& \beta \to \alpha$
5. $\alpha \& \beta \to \beta$

6. $\alpha \to \alpha \vee \beta$
7. $\beta \to \alpha \vee \beta$
8. $(\alpha \to \gamma) \to (\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \gamma)$
9. $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha$
10. $\neg\neg\alpha \to \alpha$

1.8.3 Правило вывода Modus Ponens

- Исторически: Теофраст (IV-III вв. до н.э.)
- Формально:

$$\frac{\alpha \quad \alpha \to \beta}{\beta}$$

- Пример: «Сейчас сентябрь; если сентябрь, то осень; следовательно, осень»

Определение 8 ***Доказательство*** - *последовательность* $\delta_1, \ldots, \delta_n$*, где каждое* δ_i*:*

- *Аксиома, или*
- *Получено по MP из предыдущих*

Определение 9 ***Вывод из гипотез*** Γ - *то же, но можно использовать гипотезы из* Γ

Определение 10 ***Корректность****:* $\vdash \alpha \Rightarrow \models \alpha$

Определение 11 ***Полнота****:* $\models \alpha \Rightarrow \vdash \alpha$

Теорема 1 *Исчисление высказываний корректно*

Доказательство:

Индукция по длине вывода + проверка аксиом и правила MP

Теорема 2 (о дедукции)

$$\Gamma, \alpha \vdash \beta \Leftrightarrow \Gamma \vdash \alpha \to \beta$$

Доказательство:

Конструктивное доказательство: преобразование вывода с гипотезой α в вывод импликации $\alpha \to \beta$. Оно будет на следующей лекции

2 Лекция 2.

2.1 Теорема о дедукции

Каковы бы ни были Γ, α и β: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ выполнено тогда и только тогда, когда выполнено $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$

Доказательство «в две стороны», сперва «справа налево». Фиксируем Γ, α, β. Пусть $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$, покажем $\Gamma, \alpha \vdash \beta$

То есть по условию существует вывод:

$$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{n-1}, \alpha \to \beta$$

Тогда следующая последовательность — тоже вывод:

$$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{n-1}, \alpha \to \beta, \alpha, \beta$$

Доказательство:

Покажем, что $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$ влечёт $\Gamma, \alpha \vdash \beta$

№ п/п	формула	пояснение
(1)	δ_1	в соответствии с исходным доказательством
	...	
$(n-1)$	δ_{n-1}	в соответствии с исходным доказательством
(n)	$\alpha \to \beta$	в соответствии с исходным доказательством
$(n+1)$	α	гипотеза
$(n+2)$	β	Modus Ponens n+1, n

Вывод $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ предоставлен, первая часть теоремы доказана.

Покажем, что $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$:

Пусть даны формулы вывода

$$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{n-1}, \beta$$

Аналогично предыдущему пункту, перестроим вывод.

Построим «черновик» вывода, приписав α слева к каждой формуле:

$$\alpha \to \delta_1, \alpha \to \delta_2, \ldots, \alpha \to \delta_{n-1}, \alpha \to \beta$$

Данная последовательность формул не обязательно вывод: $\Gamma := \varnothing$, $\alpha := A$

$$\delta_1 := A \to B \to A$$

припишем A слева — вывод не получим:

$$\alpha \to \delta_1 \equiv A \to (A \to B \to A)$$

Определение 12 (конечная последовательность) *Функция* $\delta : 1 \ldots n \to \mathcal{F}$

Определение 13 (кон. последовательность, индексированная дробными числами)

Функция $\zeta : I \to \mathcal{F}$, где $I \subset \mathbb{Q}$ и I конечно.

Продолжим доказательство: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$:

Будем делать индукцию по длине вывода: Если $\delta_1, \dots, \delta_n$ — вывод $\Gamma, \alpha \vdash \delta_n$, то найдётся вывод ζ_k для $\Gamma \vdash \alpha \to \delta_n$, причём $\zeta_1 \equiv \alpha \to \delta_1, \dots, \zeta_n \equiv \alpha \to \delta_n$.

- База ($n = 1$): частный случай перехода (без М.Р.).
- Переход. Пусть $\delta_1, \dots, \delta_{n+1}$ — исходный вывод. И пусть (по индукционному предположению) уже по начальному фрагменту $\delta_1, \dots, \delta_n$ построен вывод ζ_k утверждения $\Gamma \vdash \alpha \to \delta_n$.

  Но δ_{n+1} как-то был обоснован — разберём случаи:

  1. δ_{n+1} — аксиома или $\delta_{n+1} \in \Gamma$
  2. $\delta_{n+1} \equiv \alpha$
  3. δ_{n+1} — Modus Ponens из δ_j и $\delta_k \equiv \delta_j \to \delta_{n+1}$.

  В каждом из случаев можно дополнить черновик до полноценного вывода.

Случай аксиомы (продолжение):

№ п/п	новый вывод	пояснение
	$\dots$	
(1)	$\alpha \to \delta_1$	
	$\dots$	
(2)	$\alpha \to \delta_2$	
	$\dots$	
$(n + 0.3)$	$\delta_{n+1} \to \alpha \to \delta_{n+1}$	схема аксиом 1
$(n + 0.6)$	δ_{n+1}	аксиома, либо $\delta_{n+1} \in \Gamma$
$(n + 1)$	$\alpha \to \delta_{n+1}$	М.Р. $n + 0.6$, $n + 0.3$

Случай $\delta_{n+1} \equiv \alpha$:

№ п/п	новый вывод	пояснение
	$\dots$	
(1)	$\alpha \to \delta_1$	
	$\dots$	
(2)	$\alpha \to \delta_2$	
	$\dots$	
$(n + 0.2)$	$\alpha \to (\alpha \to \alpha)$	Сх. акс. 1
$(n + 0.4)$	$(\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)$	Сх. акс. 2
$(n + 0.6)$	$(\alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)$	М.Р. $n + 0.2$, $n + 0.4$
$(n + 0.8)$	$\alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha$	Сх. акс. 1
$(n + 1)$	$\alpha \to \alpha$	М.Р. $n + 0.8$, $n + 0.6$

Случай Modus Ponens:

№ п/п	новый вывод	пояснение
	$\dots$	
(1)	$\alpha \to \delta_1$	
	$\dots$	
(2)	$\alpha \to \delta_2$	
	$\dots$	
(j)	$\alpha \to \delta_j$	
	$\dots$	
(k)	$\alpha \to \delta_j \to \delta_{n+1}$	
	$\dots$	
($n+0.3$)	$(\alpha \to \delta_j) \to (\alpha \to \delta_j \to \delta_{n+1}) \to (\alpha \to \delta_{n+1})$	Сх. акс. 2
($n+0.6$)	$(\alpha \to \delta_j \to \delta_{n+1}) \to (\alpha \to \delta_{n+1})$	M.P. j, $n+0.3$
($n+1$)	$\alpha \to \delta_{n+1}$	M.P. k, $n+0.6$

Q.E.D.

Некоторые полезные правила

Лемма 1 (Правило контрапозиции) *Каковы бы ни были формулы α и β, справедливо, что* $\vdash (\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$.

Лемма 2 (правило исключённого третьего) *Какова бы ни была формула α, $\vdash \alpha \vee \neg\alpha$.*

Лемма 3 (об исключении допущения) *Пусть справедливо $\Gamma, \rho \vdash \alpha$ и $\Gamma, \neg\rho \vdash \alpha$. Тогда также справедливо $\Gamma \vdash \alpha$.*

Доказывается с использованием лемм, указанных выше

2.2 Теорема о полноте исчисления высказываний

Теорема 3 *Если $\models \alpha$, то $\vdash \alpha$.*

Определение 14 (условное отрицание) *Зададим некоторую оценку переменных, такую, что $[\![\alpha]\!] = x$.*

Тогда условным отрицанием *формулы α назовём следующую формулу $(\!|\alpha|\!)$:*

$$(\!|\alpha|\!) = \begin{cases} \alpha, & x = \text{И} \\ \neg\alpha, & x = \text{Л} \end{cases}$$

Аналогично записи для оценок, будем указывать оценку переменных, если это потребуется / будет неочевидно из контекста:

$$(\!|\neg X|\!)^{X:=\text{Л}} = \neg X \qquad (\!|\neg X|\!)^{X:=\text{И}} = \neg\neg X$$

Также, если $\Gamma := \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, то за $(\!|\Gamma|\!)$ обозначим $(\!|\gamma_1|\!), (\!|\gamma_2|\!), \dots (\!|\gamma_n|\!)$.

Таблицы истинности и высказывания

Рассмотрим связку «импликация» и её таблицу истинности:

$[\![A]\!]$	$[\![B]\!]$	$[\![A \to B]\!]$	формула
Л	Л	И	$\neg A, \neg B \vdash A \to B$
Л	И	И	$\neg A, B \vdash A \to B$
И	Л	Л	$A, \neg B \vdash \neg(A \to B)$
И	И	И	$A, B \vdash A \to B$

Заметим, что с помощью условного отрицания данную таблицу можно записать в одну строку:

$$(\!|A|\!), (\!|B|\!) \vdash (\!|A \to B|\!)$$

Теорема 4 (О полноте исчисления высказываний) *Если* $\models \alpha$, *то* $\vdash \alpha$

1. Построим таблицы истинности для каждой связки ($\star$) и докажем в них каждую строку:

$$(\!|\varphi|\!), (\!|\psi|\!) \vdash (\!|\varphi \star \psi|\!)$$

2. Построим таблицу истинности для α и докажем в ней каждую строку:

$$(\!|\Xi|\!) \vdash (\!|\alpha|\!)$$

3. Если формула общезначима, то в ней все строки будут иметь вид $(\!|\Xi|\!) \vdash \alpha$, потому от гипотез мы сможем избавиться и получить требуемое $\vdash \alpha$.

<u>Доказательство:</u>

<u>Шаг 1. Лемма о связках</u>

Запись

$$(\!|\varphi|\!), (\!|\psi|\!) \vdash (\!|\varphi \star \psi|\!)$$

сводится к 14 утверждениям:

$$\begin{array}{rcl@{\qquad\qquad}rcl}
\neg\varphi, \neg\psi & \vdash & \neg(\varphi \,\&\, \psi) & \neg\varphi, \neg\psi & \vdash & (\varphi \to \psi) \\
\neg\varphi, \psi & \vdash & \neg(\varphi \,\&\, \psi) & \neg\varphi, \psi & \vdash & (\varphi \to \psi) \\
\varphi, \neg\psi & \vdash & \neg(\varphi \,\&\, \psi) & \varphi, \neg\psi & \vdash & \neg(\varphi \to \psi) \\
\varphi, \psi & \vdash & (\varphi \,\&\, \psi) & \varphi, \psi & \vdash & (\varphi \to \psi) \\
\neg\varphi, \neg\psi & \vdash & \neg(\varphi \vee \psi) & \varphi & \vdash & \neg\neg\varphi \\
\neg\varphi, \psi & \vdash & (\varphi \vee \psi) & \neg\varphi & \vdash & \neg\varphi \\
\varphi, \neg\psi & \vdash & (\varphi \vee \psi) & & & \\
\varphi, \psi & \vdash & (\varphi \vee \psi) & & &
\end{array}$$

<u>Шаг 2. Обобщение на любую формулу</u>

Лемма 4 (Условное отрицание формул) *Пусть пропозициональные переменные* $\Xi := \{X_1, \ldots, X_n\}$ *— все переменные, которые используются в формуле* α. *И пусть задана некоторая оценка переменных.*

Тогда, $(\!|\Xi|\!) \vdash (\!|\alpha|\!)$

<u>Доказательстсво леммы:</u>

Индукция по длине формулы α.

- База: формула α — атомарная, т.е. $\alpha \equiv X_i$. Тогда при любом Ξ выполнено $(\!|\Xi|\!)^{X_i := И} \vdash X_i$ и $(\!|\Xi|\!)^{X_i := Л} \vdash \neg X_i$.

- Переход: $\alpha \equiv \varphi \star \psi$, причём $(\!|\Xi|\!) \vdash (\!|\varphi|\!)$ и $(\!|\Xi|\!) \vdash (\!|\psi|\!)$

  Тогда построим вывод:

$(1) \dots (n)$	$(\!|\varphi|\!)$	индукционное предположение
$(n+1) \dots (k)$	$(\!|\psi|\!)$	индукционное предположение
$(k+1) \dots (l)$	$(\!|\varphi \star \psi|\!)$	лемма о связках: $(\!|\varphi|\!)$ и $(\!|\psi|\!)$ доказаны выше, значит, их можно использовать как гипотезы

Q.E.D. Леммы

Шаг 3. Избавляемся от гипотез

Лемма 5 *Пусть при всех оценках переменных* $(\!|\Xi|\!) \vdash \alpha$, *тогда* $\vdash \alpha$.

Доказательство:

Индукция по количеству переменных n.

- База: $n = 0$. Тогда $\vdash \alpha$ есть из условия.
- Переход: пусть $(\!|X_1, X_2, \dots X_{n+1}|\!) \vdash \alpha$. Рассмотрим 2^n пар выводов:

$$(\!|X_1, X_2, \dots X_n|\!), X_{n+1} \vdash \alpha \qquad (\!|X_1, X_2, \dots X_n|\!), \neg X_{n+1} \vdash \alpha$$

  По лемме об исключении допущения тогда

$$(\!|X_1, X_2, \dots X_n|\!) \vdash \alpha$$

При этом, $(\!|X_1, X_2, \dots X_n|\!) \vdash \alpha$ при всех оценках переменных $X_1, \dots X_n$. Значит, $\vdash \alpha$ по индукционному предположению.

Q.E.D. Леммы

Замечание:

Теорема о полноте — конструктивна. Получающийся вывод — экспоненциальный по длине.

Несложно по изложенному доказательству разработать программу, строящую вывод.

Вывод для формулы с 3 переменными — порядка 3 тысяч строк.

2.3 Интуиционистская логика

2.3.1 Интуиционизм

Основные положения:

1. Математика не формальна.
2. Математика независима от окружающего мира.
3. Математика не зависит от логики — это логика зависит от математики.

То есть суть в том, что мы доказываем, что какой-то объект существует «на самом деле», не как в теореме о неподвижной точке например (там мы просто показываем, что такой точки не может не быть, но есть ли она?)

ВНК-интерпретация логических связок

ВНК — это сокращение трёх фамилий: Брауэр, Гейтинг, Колмогоров.

Пусть α, β — некоторые конструкции, тогда:

- $\alpha \mathbin{\&} \beta$ построено, если построены α и β
- $\alpha \vee \beta$ построено, если построено α или β, и мы знаем, что именно
- $\alpha \to \beta$ построено, если есть способ перестроения α в β
- $\perp$ — конструкция, не имеющая построения
- $\neg\alpha$ построено, если построено $\alpha \to \perp$

Дизъюнкция

Конструкция $\alpha \vee \neg\alpha$ не имеет построения в общем случае. Что может быть построено: α или $\neg\alpha$?

Возьмём за α нерешённую проблему, например, $P = NP$

Авторам в данный момент не известно, выполнено $P = NP$ или же $P \neq NP$.

Отличия импликации

Высказывание общезначимо в И.В. и не выполнено в ВНК-интерпретации:

$$(A \to B) \vee (B \to C) \vee (C \to A)$$

Давайте дадим следующий смысл пропозициональным переменным:

- A — 13.09.2025 в Санкт-Петербурге идёт дождь;
- B — 13.09.2025 в Санкт-Петербурге светит солнце;
- C — во 2 семестре ровно 2 человека из групп 38-39 получили «отлично» по матанализу, списав.

Импликацию можно понимать как «формальную» и как «материальную».

- Материальная импликация $A \to B$ — надо посмотреть в окно.

- Формальная импликация $A \to B$ места не имеет (причинно-следственной связи нет).

Формализация интуиционистской логики возможна, но интуитивное понимание — основное.

Определение 15 *Аксиоматика интуиционистского исчисления высказываний в гильбертовском стиле: аксиоматика КИВ, в которой 10 схема аксиом*

$$\text{(10)} \quad \neg\neg\alpha \to \alpha$$

заменена на

$$\text{(10и)} \quad \alpha \to \neg\alpha \to \beta$$

2.3.2 Интуиционистское И.В. (натуральный, естественный вывод)

- Формулы языка (секвенции) имеют вид: $\Gamma \vdash \alpha$. Правила вывода:

$$\frac{\text{посылка 1} \qquad \text{посылка 2} \qquad \dots}{\text{заключение}}\ \text{(аннотация)}$$

- Аксиома:
$$\frac{}{\Gamma, \alpha \vdash \alpha}\ \text{(акс.)}$$

- Правила введения связок:
$$\frac{\Gamma, \alpha \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \to \beta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta}, \frac{\Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha \qquad \Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \,\&\, \beta}$$

- Правила удаления связок:
$$\frac{\Gamma \vdash \alpha \quad \Gamma \vdash \alpha \to \beta}{\Gamma \vdash \beta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha \to \gamma \quad \Gamma \vdash \beta \to \gamma \quad \Gamma \vdash \alpha \vee \beta}{\Gamma \vdash \gamma} \frac{\Gamma \vdash \alpha \,\&\, \beta}{\Gamma \vdash \alpha} \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha \,\&\, \beta}{\Gamma \vdash \beta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \alpha}$$

- Пример доказательства:
$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{A \,\&\, B \vdash A \,\&\, B}\ \text{(акс.)}}{A \,\&\, B \vdash B}\ \text{(удал\&)} \qquad \cfrac{\cfrac{}{A \,\&\, B \vdash A \,\&\, B}\ \text{(акс.)}}{A \,\&\, B \vdash A}\ \text{(удал\&)}}{A \,\&\, B \vdash B \,\&\, A}\ \text{(введ\&)}$$

Связь с продемонстрированным ранее гильбертовским вариантом КИВ

- Немного другой предметный язык: гипотезы включены в формулу (соответственно, в натуральном выводе $\vdash$ есть часть предметного языка!), вместо одноместного $\neg$ нульместный $\bot$, можно рассмотреть $|\alpha|_{\text{г}}$ и $|\alpha|_{\text{н}}$.
- Для исключения разночтений, будем писать индексы снизу (метаязык): $\vdash_{\text{и}} \alpha$, $\vdash_{\text{к}} \alpha$.
- Классический нормальный вывод получится при замене “принципа взрыва” на “снятие двойного отрицания”:
$$\frac{\Gamma \vdash (A \to \bot) \to \bot}{\Gamma \vdash A}$$

- Можно показать эквивалентность при помощи индукции:
  - $\Gamma \vdash_{\text{ги}} \alpha$ влечёт выводимость $|\Gamma|_{\text{н}} \vdash_{\text{ни}} |\alpha|_{\text{н}}$
  - Выводимость $\Gamma \vdash_{\text{ни}} \alpha$ влечёт $|\Gamma|_{\text{ги}} \vdash_{\text{г}} |\alpha|_{\text{ги}}$.

2.4 Немного об общей топологии

2.4.1 Топологическое пространство

Определение 16 *Топологическим пространством называется упорядоченная пара* $\langle X, \Omega \rangle$*, где* X *— некоторое множество, а* $\Omega \subseteq \mathcal{P}(X)$*, причём:*

1. $\varnothing, X \in \Omega$
2. *если* $A_1, \ldots, A_n \in \Omega$*, то* $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \in \Omega$*;*
3. *если* $\{A_\alpha\}$ *— семейство множеств из* Ω*, то и* $\bigcup_\alpha A_\alpha \in \Omega$*.*

Множество Ω *называется* топологией*. Элементы* Ω *называются открытыми множествами.*

Определение 17 *Внутренность множества* A° *— наибольшее* T*, что* $T \in \Omega$ *и* $T \subseteq A$*.*

2.4.2 Топологические пространства как модель ИИВ

Теорема 5 *Если* $\langle X, \Omega \rangle$ *— некоторое топологическое пространство, то следующий способ оценки высказываний даёт корректную модель ИИВ:* $V = \Omega$*,* $u = X$ *и*

$$\begin{array}{l} [\![\alpha \,\&\, \beta]\!] = [\![\alpha]\!] \cap [\![\beta]\!] \\ [\![\alpha \vee \beta]\!] = [\![\alpha]\!] \cup [\![\beta]\!] \\ [\![\neg\alpha]\!] = (c[\![\alpha]\!])^\circ \\ [\![\alpha \to \beta]\!] = (c[\![\alpha]\!] \cup [\![\beta]\!])^\circ \end{array}$$

Определение 18 $\models \alpha$ *в топологических моделях, если при всех* $\langle X, \Omega \rangle$ *имеет место* $[\![\alpha]\!] = X$*.*

Теорема 6 *Полнота топологических моделей ИИВ:* $\models \alpha$ *тогда и только тогда, когда* $\vdash_u \alpha$*.*

3 Информация о курсе.

Поток — y2024.
Группы M3132-M3139.
Преподаватель — Штукенберг Дмитрий Григорьевич.

Это мат. лог ребятки