Домашние задания по Матлогу.

Чепелин Вячеслав

Содержание

1 Домашнее задание 1.

Во всех задачах буду пользоваться данной таблицей:

(1) $\alpha \to \beta \to \alpha$
(2) $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$
(3) $\alpha \to \beta \to \alpha \& \beta$
(4) $\alpha \& \beta \to \alpha$
(5) $\alpha \& \beta \to \beta$
(6) $\alpha \to \alpha \vee \beta$
(7) $\beta \to \alpha \vee \beta$
(8) $(\alpha \to \gamma) \to (\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \gamma)$
(9) $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \neg \beta) \to \neg \alpha$
(10) $\neg \neg \alpha \to \alpha$

1.1 Задача 1.

$$\vdash (A \to A \to B) \to (A \to B) \tag{a}$$

Доказательство:

(1) $(A \to A) \to (A \to A \to B) \to (A \to B)$ (A9)
(2)
$\vdots$ copy-paste from lection
(8) $A \to A$
(9) $(A \to A \to B) \to (A \to B)$ (MP (8,1))

Q.E.D.

$$\vdash \neg(A \& \neg A) \tag{b}$$

Доказательство:

(1) $((A\&\neg A) \to A) \to ((A\&\neg A) \to \neg A) \to \neg(A\&\neg A)$
Аксиома 9 $[\alpha := (A\&\neg A), \beta = A]$

(2) $(A\&\neg A) \to A$
Аксиома 4 $[\alpha := A, \beta = \neg A]$

(3) $(A\&\neg A) \to \neg A$
Аксиома 5 $[\alpha := A, \beta = \neg A]$

(4) $((A\&\neg A) \to \neg A) \to \neg(A\&\neg A)$
Moduse Ponens 2, 1

(5) $\neg(A\&\neg A)$
Moduse Ponens 3, 4

$$\vdash (A\&B) \to (B\&A) \tag{c}$$

Для доказательство этого воспользуемся Теоремой о дедукции и докажем:

$$(A\&B) \vdash (B\&A)$$

Доказательство:

(1) $A\&B \to A$ Аксиома 4 $[\alpha := A, \beta := B]$

(2) $A\&B \to B$ Аксиома 5 $[\alpha := A, \beta := B]$

(3) $(A\&B)$ Гипотеза

(4) A Moduse Ponuns 3, 1

(5) B Moduse Ponuns 3, 2

(6) $B \to A \to B\&A$ Аксиома 3 $[\alpha :=\text{B}, \beta :=\text{A}]$

(7) $A \to B\&A$ Moduse Ponuns 5, 6

(8) $B\&A$ Moduse Ponuns 4, 7

Q.E.D.

$$\vdash (A \vee B) \to (B \vee A) \tag{d}$$

Доказательство:

(1)	$(A \to A \vee B) \to (B \to A \vee B) \to (A \vee B \to A \vee B)$	Аксиома 8 $[\alpha := \text{A}, \beta := \text{B}, \gamma := A \vee B]$
(2)	$A \to A \vee B$	Аксиома 6 $[\alpha := \text{A}, \beta := \text{B}]$
(3)	$B \to A \vee B$	Аксиома 7 $[\alpha := \text{B}, \beta := \text{A}]$
(4)	$(B \to A \vee B) \to ((A \vee B) \to (B \vee A))$	Moduse Ponuns 2, 1
(5)	$(A \vee B) \to (B \vee A)$	Moduse Ponuns 3, 4

Q.E.D.

$$A\&\neg A \vdash B \tag{e}$$

Доказательство:

(1)	$A\&\neg A \to A$	Аксиома 4 [$\alpha :=A, \beta :=\neg A$]
(2)	$A\&\neg A \to \neg A$	Аксиома 5 [$\alpha :=A, \beta :=\neg A$]
(3)	$A\&\neg A$	Гипотеза
(4)	A	Moduse Ponuns 3, 1
(5)	$\neg A$	Moduse Ponuns 3, 2
(6)	$(B \to A) \to (B \to \neg A) \to \neg B$	Аксиома 9 [$\alpha :=$B$, \beta :=$A]
(7)	$A \to B \to A$	Аксиома 1 [$\alpha :=$A$, \beta :=$B]
(8)	$\neg A \to B \to \neg A$	Аксиома 1 [$\alpha :=\neg A, \beta :=$B]
(9)	$A \to \neg B \to A$	Аксиома 1 [$\alpha :=$A$, \beta :=\neg B$]
(10)	$\neg A \to \neg B \to \neg A$	Аксиома 1 [$\alpha :=\neg A, \beta :=\neg B$]
(11)	$B \to A$	Moduse Ponuns 4, 7
(12)	$B \to \neg A$	Moduse Ponuns 5, 8
(13)	$\neg B \to A$	Moduse Ponuns 4, 9
(14)	$\neg B \to \neg A$	Moduse Ponuns 5, 10
(15)	$(B \to \neg A) \to \neg B$	Moduse Ponuns 11, 6
(16)	$\neg B$	Moduse Ponuns 12, 15
(17)	$(\neg B \to A) \to (\neg B \to \neg A) \to \neg\neg B$	Аксиома 9 [$\alpha :=\neg B, \beta :=$A]
(18)	$(\neg B \to \neg A) \to \neg\neg B$	Moduse Ponuns 13, 17
(19)	$\neg\neg B$	Moduse Ponuns 14, 18
(20)	$\neg\neg B \to B$	Аксиома 10 [$\alpha :=$B]
(21)	B	Moduse Ponuns 19, 20

1.2 Задача 2.

a) Докажем, что $\vdash \alpha \to \neg\neg\alpha$. Для этого воспользуемся Теоремой о дедукции и докажем:

$$\alpha \vdash \neg\neg\alpha$$

Доказательство:

(1) $\alpha \to \neg\alpha \to \alpha$
Аксиома 1 $[\alpha := \alpha, \beta := \neg\alpha]$

(2) α
Гипотеза

(3) $\neg\alpha \to \alpha$
Moduse Ponens 2, 1

(4) $(\neg\alpha \to \alpha) \to (\neg\alpha \to \neg\alpha) \to \neg\neg\alpha$
Аксиома 9 $[\alpha := \neg\alpha, \beta := \alpha]$

(5)
$\vdots$ copy-paste from lection
(12) $\neg\alpha \to \neg\alpha$

(13) $(\neg\alpha \to \neg\alpha) \to \neg\neg\alpha$
Moduse Ponens 3, 4

(14) $\neg\neg\alpha$
Moduse Ponens 12, 13

Q.E.D.

$$\neg A, B \vdash \neg(A\&B) \tag{b}$$

Доказательство:

(1)	$((A\&B) \to A) \to ((A\&B) \to \neg A) \to \neg(A\&B)$	Аксиома 9 $[\alpha :=(A\&B), \beta :=A]$
(2)	$A\&B \to A$	Аксиома 4 $[\alpha :=A, \beta :=B]$
(3)	$\neg A$	Гипотеза
(4)	B	Гипотеза
(5)	$\neg A \to (A\&B) \to \neg A$	Аксиома 1 $[\alpha :=\neg A, \beta :=(A\&B)]$
(6)	$(A\&B) \to \neg A$	Moduse Ponuns 3, 5
(7)	$((A\&B) \to \neg A) \to \neg(A\&B)$	Moduse Ponuns 2, 1
(8)	$\neg(A\&B)$	Moduse Ponuns 6, 7

$$\neg A, \neg B \vdash \neg(A \lor B) \tag{c}$$

Доказательство:

Докажем, что $\neg A \vdash A \to \neg(A \lor B)$. Для этого по теореме о дедукции, надо доказать $\neg A, A \to \neg(A \lor B)$. Для этого воспользуемся доказательством 1e. Откуда есть доказательство вышесказанного. Аналогично есть доказательство $\neg B \vdash B \to \neg(A \lor B)$. Назовем эти доказательства Леммой 1 и Леммой 2 соответственно.

Вернемся к исходному доказательству:

(1) $\neg A$
Гипотеза
(2) $\neg B$
Гипотеза
(3) $((A \lor B) \to A) \to ((A \lor B) \to \neg A) \to \neg(A \lor B)$
Аксиома 9 $[\alpha :=(A \lor B), \beta :=A]$
(4) $(A \to \neg(A \lor B)) \to (B \to \neg(A \lor B)) \to (A \lor B \to \neg(A \lor B))$
Аксиома 8 $[\alpha :=A, \beta :=B, \gamma :=\neg(A \lor B)]$
(5) $\neg A \to \neg A \to \neg A$

Теперь воспользуемся нашими предположениями:

(6)
$\vdots$ copy-paste from lemma 1
(5+n) $A \to \neg(A \lor B)$
(6+n)
$\vdots$ copy-paste from lemma 2
$(5+n+m)$ $B \to \neg(A \lor B)$
$(6+n+m)$ $(B \to \neg(A \lor B)) \to (A \lor B \to \neg(A \lor B))$
Moduse Ponuns $(5+n)$, 4
$(7+n+m)$ $A \lor B \to \neg(A \lor B)$
Moduse Ponuns $(5+n+m)$, $(6+n+m)$
$(8+n+m)$
$\vdots$ copy-paste from lection
$(15+n+m)$ $A \lor B \to A \lor B$
$(16+n+m)$ $((A \lor B) \to (A \lor B)) \to ((A \lor B) \to \neg(A \lor B)) \to \neg(A \lor B)$
Аксиома 9 $[\alpha :=A \lor B, \beta :=A \lor B]$
$(17+n+m)$ $((A \lor B) \to \neg(A \lor B)) \to \neg(A \lor B)$
Moduse Ponuns $(15+n+m)$, $(16+n+m)$
$(18+n+m)$ $\neg(A \lor B)$
Moduse Ponuns $(7+n+m)$, $(17+n+m)$

Q.E.D

$$A, \neg B \vdash \neg(A \to B) \tag{d}$$

(1)	A	Гипотеза
(2)	$\neg B$	Гипотеза
(3)	$\neg B \to (A \to B) \to \neg B$	Аксиома 1 [$\alpha := \neg B, \beta := (A \to B)$]
(4)	$(A \to B) \to \neg B$	Moduse Ponuns 2, 3
(5)	$A \to (A \to B) \to A$	Аксиома 1 [$\alpha := A, \beta := (A \to B)$]
(6)	$(A \to B) \to A$	Moduse Ponuns 1, 5
(7)		
$\vdots$	copy-paste from lection	
(15)	$(A \to B) \to (A \to B)$	
(16)	$((A \to B) \to A) \to ((A \to B) \to A \to B) \to ((A \to B) \to B)$	Аксиома 2 [$\alpha := A \to B, \beta :=A, \gamma :=$B]
(17)	$((A \to B) \to A \to B) \to ((A \to B) \to A)$	Moduse Ponuns 6, 16
(18)	$(A \to B) \to B$	Moduse Ponuns 15, 17
(19)	$((A \to B) \to B) \to ((A \to B) \to \neg B) \to \neg(A \to B)$	Аксиома 9 [$\alpha := A \to B, \beta :=$B]
(20)	$((A \to B) \to \neg B) \to \neg(A \to B)$	Moduse Ponuns 18, 19
(21)	$\neg(A \to B)$	Moduse Ponuns 4, 20

$$\neg A, B \vdash A \to B \tag{e}$$

Доказательство:

(1)	$\neg A$	Гипотеза
(2)	B	Гипотеза
(3)	$B \to A \to B$	Аксиома 1 [α :=B, β :=A]
(4)	$A \to B$	Moduse Ponuns 2, 3

1.3 Задача 3.

$$\vdash (A \to B) \to (B \to C) \to (A \to C) \tag{a}$$

Воспользуемся теоремой о дедукции и будем доказывать:

$$(A \to B), (B \to C) \vdash (A \to C)$$

Доказательство:

(1)	$(A \to B)$	Гипотеза
(2)	$(B \to C)$	Гипотеза
(3)	$(A \to B) \to (A \to B \to C) \to (A \to C)$	Аксиома 2 [α :=A, β :=B, γ :=C]
(4)	$(B \to C) \to A \to (B \to C)$	Аксиома 1 [$\alpha := B \to C$, β :=A]
(5)	$A \to B \to C$	Moduse Ponuns 2, 4
(6)	$(A \to B \to C) \to (A \to C)$	Moduse Ponuns 1, 3
(7)	$A \to C$	Moduse Ponuns 5, 6

Q.E.D.

$$\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A) \tag{b}$$

Доказательство:

Воспользуемся теоремой о дедукции и будем доказывать:

$$(A \to B), \neg B \vdash \neg A$$

(1)	$(A \to B)$	Гипотеза
(2)	$\neg B$	Гипотеза
(3)	$(A \to B) \to (A \to \neg B) \to \neg A$	Аксиома 9 [α :=A, β :=B]
(4)	$\neg B \to A \to \neg B$	Аксиома 1 [$\alpha := \neg B, \beta :=$A]
(5)	$A \to \neg B$	Moduse Ponuns 2, 4
(6)	$(A \to \neg B) \to \neg A$	Moduse Ponuns 1, 3
(7)	$\neg A$	Moduse Ponuns 5, 6

Q.E.D

$$\vdash \neg(\neg A \& \neg B) \to (A \vee B) \tag{c}$$

Доказательство:

Воспользуемся теоремой о дедукции и будем доказывать:

$$\neg(\neg A \& \neg B) \vdash (A \vee B)$$

(1)	$\neg(\neg A \& \neg B)$	Гипотеза
(2)	$\neg A \to \neg B \to \neg A \& \neg B$	Аксиома 3 $[\alpha := \neg A, \beta := \neg B]$
(3)	$A \to A \vee B$	Аксиома 6 $[\alpha :=$A$, \beta :=$B$]$
$\vdots$	copy-paste from 3b	
(3 + n)	$(A \to A \vee B) \to (\neg(A \vee B) \to \neg A)$	
(4 + n)	$\neg(A \vee B) \to \neg A$	Moduse Ponuns 3, 3+n
(5 + n)	$B \to A \vee B$	Аксиома 7 $[\alpha :=$B$, \beta :=$A$]$
$\vdots$	copy-paste from 3b	
$(5+2n)$	$(B \to A \vee B) \to (\neg(A \vee B) \to \neg B)$	
$(6+2n)$	$\neg(A \vee B) \to \neg B$	Moduse Ponuns $5+n$, $5+2n$

Хотим получить: $\neg(A \vee B) \to (\neg A \& \neg B)$

$(7+2n)$ $((\neg(A \vee B)) \to \neg B) \to ((\neg(A \vee B)) \to \neg B \to (\neg A \& \neg B)) \to ((\neg(A \vee B)) \to (\neg A \& \neg B))$
Аксиома 2 $[\alpha := (\neg(A \vee B)), \beta := \neg B, \gamma := (\neg A \& \neg B)]$

$(8+2n)$ $(\neg(A \vee B) \to \neg A) \to (\neg(A \vee B) \to \neg A \to (\neg B \to (\neg A \& \neg B))) \to (\neg(A \vee B) \to (\neg B \to (\neg A \& \neg B$
помогите, оно не влезает
Аксиома 2 $[\alpha := \neg(A \vee B), \beta := \neg A, \gamma := (\neg B \to (\neg A \& \neg B))]$

$(9+2n)$ $(\neg(A \vee B) \to \neg A \to (\neg B \to (\neg A \& \neg B))) \to (\neg(A \vee B) \to (\neg B \to (\neg A \& \neg B)))$
Moduse Ponuns $(4+n)$, $(8+2n)$

$(10+2n)$ $(\neg A \to \neg B \to \neg A \& \neg B) \to \neg(A \vee B) \to (\neg A \to \neg B \to \neg A \& \neg B)$
Аксиома 1 $[\alpha := (\neg A \to \neg B \to \neg A \& \neg B), \beta := \neg(A \vee B)]$

$(11+2n)$ $\neg(A \vee B) \to \neg A \to (\neg B \to (\neg A \& \neg B))$
Moduse Ponuns 2, $10+2n$

$(12+2n)$ $\neg(A \vee B) \to \neg B \to (\neg A \& \neg B)$
Moduse Ponuns $(11+2n)$, $(9+2n)$

$(13+2n)$ Пропущу 13-ый + 2n шаг в угоду сохранения моей психики
Moduse Ponuns $6+2n$, $7+2n$

$(14+2n)$ $\neg(A \vee B) \to (\neg A \& \neg B)$
Moduse Ponuns $12+2n$, $13+2n$

$(15+2n)$ $(\neg(A \vee B) \to (\neg A \& \neg B)) \to (\neg(A \vee B) \to \neg(\neg A \& \neg B)) \to \neg\neg(A \vee B)$
Аксиома 9 $[\alpha := \neg(A \vee B), \beta := \neg A \& \neg B]$

$(16+2n)$ $\neg(\neg A \& \neg B) \to \neg(A \vee B) \to \neg(\neg A \& \neg B)$
Аксиома 1 $[\alpha := \neg(\neg A \& \neg B), \beta := \neg(A \vee B)]$

$(17+2n)$ $\neg\neg(A \vee B) \to (A \vee B)$
Аксиома 10 $[\alpha := (A \vee B)]$

(18 + 2n) $\neg(A \vee B) \to \neg(\neg A \& B)$
Moduse Ponuns 1, $16 + 2n$
(19 + 2n) $(\neg(A \vee B) \to \neg(\neg A \& \neg B)) \to \neg\neg(A \vee B)$
Moduse Ponuns $14 + 2n$, $15 + 2n$
(20 + 2n) $\neg\neg(A \vee B)$
Moduse Ponuns $18 + 2n$, $19 + 2n$
(21 + 2n) $(A \vee B)$
Moduse Ponuns $20 + 2n$, $17 + 2n$

Q.E.D.

Моя психика травмирована

$$\vdash A \vee B \to \neg(\neg A \& \neg B) \tag{d}$$

Доказательство:

Сперва докажем, что:

$$\vdash A \to \neg(\neg A \& \neg B))$$

Буду пользоваться теоремой о дедукции и докажу:

$$A \vdash \neg(\neg A \& \neg B))$$

(1) A
Гипотеза
(2) $((\neg A \& \neg B) \to A) \to ((\neg A \& \neg B) \to \neg A) \to \neg(\neg A \& \neg B)$
Аксиома 9 $[\alpha := (\neg A \& \neg B), \beta := A]$
(3) $A \to (\neg A \& \neg B) \to A$
Аксиома 1 $[\alpha := A, \beta := (\neg A \& \neg B)]$
(4) $\neg A \& \neg B \to \neg A$
Аксиома 4 $[\alpha := \neg A, \beta := \neg B]$
(5) $(\neg A \& \neg B) \to A$
Moduse Ponuns 1, 3
(6) $((\neg A \& \neg B) \to \neg A) \to \neg(\neg A \& \neg B)$
Moduse Ponuns 5, 2
(7) $\neg(\neg A \& \neg B)$
Moduse Ponuns 4, 6

Q.E.D.

Аналогично докажем

$$\vdash B \to \neg(\neg A \& B))$$

Назовем это Леммой 1 и Леммой 2 соответственно. Докажем искомое:

(1) $A \vee B$
Гипотеза
(2) $(A \to \neg(\neg A \& \neg B)) \to (B \to \neg(\neg A \& \neg B)) \to (A \vee B \to \neg(\neg A \& \neg B))$
Аксиома 8 $[\alpha :=$A$, \beta :=$B$, \gamma := \neg(\neg A \& \neg B)]$
$\vdots$
$(2+n)$ $B \to \neg(\neg A \& B))$
copy-paste from lemma 2
$\vdots$
$(2+2n)$ $A \to \neg(\neg A \& B))$
copy-paste from lemma 1
$(3+2n)$ $(B \to \neg(\neg A \& \neg B)) \to (A \vee B \to \neg(\neg A \& \neg B))$
Moduse Ponuns $(2+2n$, 2
$(4+2n)$ $A \vee B \to \neg(\neg A \& \neg B)$
Moduse Ponuns $(2+n$, $3+2n$

Q.E.D

$$\vdash (\neg A \vee \neg B) \to \neg(A\&B) \tag{e}$$

Сперва докажем, что:

$$\vdash \neg A \to \neg(A\&B)$$

Для этого по теореме о дедукции докажем, что:

$$\neg A \vdash \neg(A\&B)$$

(1) $\neg A$
Гипотеза
(2) $A\&B \to A$
Аксиома 4 $[\alpha := A, \beta := B]$
(3) $((A\&B) \to A) \to ((A\&B) \to \neg A) \to \neg(A\&B)$
Аксиома 9 $[\alpha := (A\&B), \beta := A]$
(4) $\neg A \to (A\&B) \to \neg A$
Аксиома 1 $[\alpha := \neg A, \beta := (A\&B)]$
(5) $A\&B \to \neg A$
Moduse Ponuns 1, 4
(6) $(A\&B \to \neg A) \to \neg(A\&B)$
Moduse Ponuns 2, 3
(7) $\neg(A\&B)$
Moduse Ponuns 5, 6

Q.E.D.

Аналогично докажем, что

$$\vdash \neg B \to \neg(A\&B)$$

Назовем это Леммой 1 и Леммой 2 соответственно.

Теперь докажем искомое:

(1) $(\neg A \to \neg(A\&B)) \to (\neg B \to \neg(A\&B)) \to (\neg A \vee \neg B \to \neg(A\&B))$
Аксиома 8 $[\alpha := \neg A\ , \beta := \neg B, \gamma := \neg(A\&B)]$

$\vdots$

$(1+n)$ $\neg A \to \neg(A\&B)$
copy-paste from lemma 1

$\vdots$

$(1+2n)$ $\neg B \to \neg(A\&B)$
copy-paste from lemma 2
$(2+2n)$ $(\neg B \to \neg(A\&B)) \to ((\neg A \vee \neg B) \to \neg(A\&B))$
Moduse Ponuns $1+n$, 1
$(3+2n)$ $(\neg A \vee \neg B) \to \neg(A\&B)$
Moduse Ponuns $1+2n$, $2+2n$

Q.E.D.

$$\vdash (A \to B) \to (\neg A \vee B) \tag{f}$$

Соглашение: В дальнейшем доказательстве буду пользоваться раннее доказанными фактами, они будут как бы вставляться в доказательство, а снизу будет подписано, чем я пользовался (иначе это займет бесконечность времени)

Используем теорему о дедукции и будем доказывать

$$(A \to B) \vdash (\neg A \vee B)$$

(1) $A \to B$
Гипотеза

(2) $B \to \neg A \vee B$
Аксиома 7 $[\alpha :=$B$, \beta := \neg A]$

(3) $(A \to B) \to (A \to B \to \neg A \vee B) \to (A \to \neg A \vee B)$
Аксиома 2 $[\alpha :=$A$, \beta :=$B$, \gamma := \neg A \vee B]$

(4) $(A \to B \to \neg A \vee B) \to (A \to \neg A \vee B)$
Moduse Ponuns 1, 3

(5) $(B \to \neg A \vee B) \to A \to (B \to \neg A \vee B)$
Аксиома 1 $[\alpha :=(B \to \neg A \vee B), \beta := A]$

(6) $A \to B \to \neg A \vee B$
Moduse Ponuns 2, 5

(7) $A \to \neg A \vee B$
Moduse Ponuns 6, 4

(8) $\neg A \to \neg A \vee B$
Аксиома 6 $[\alpha := \neg A, \beta :=B]$

(9) $(A \to (A \vee \neg A)) \to (\neg A \to (A \vee \neg A)) \to (A \vee \neg A \to (A \vee \neg A))$
Аксиома 9 $[\alpha :=$A$, \beta := \neg A, \gamma :=(A \vee \neg A)]$

(10) $(\neg A \to \neg A \vee B) \to (A \vee \neg A \to \neg A \vee B)$
Moduse Ponuns 7, 9

(11) $A \vee \neg A \to \neg A \vee B$
Moduse Ponuns 8, 10

(12) $A \vee \neg A$
$\alpha \vee \neg \alpha$ по 3i

(13) $\neg A \vee B$
Moduse Ponuns 12, 11

Q.E.D.

$$\vdash A\&B \to A \vee B \tag{g}$$

Доказательство:

Используем теорему о дедукции и будем доказывать

$$A\&B \vdash A \vee B$$

(1) $A\&B$
Гипотеза
(2) $A\&B \to A$
Аксиома 4 [α :=A, β :=B]
(3) $A \to A \vee B$
Аксиома 6 [α :=A, β :=B]
(4) A
Moduse Ponuns 1, 2
(5) $A \vee B$
Moduse Ponuns 4, 3

Q.E.D.

$$\vdash ((A \to B) \to A) \to A \tag{h}$$

Доказательство:

Соглашение: В дальнейшем доказательстве буду пользоваться раннее доказанными фактами, они будут как бы вставляться в доказательство, а снизу будет подписано, чем я пользовался (иначе это займет бесконечность времени)

Используем теорему о дедукции и будем доказывать:

$$(A \to B) \to A \vdash A$$

(1) $(A \to B) \to A$
Гипотеза

(2) $(\neg A \to A) \to (\neg A \to \neg A) \to \neg\neg A$
Аксиома 9 $[\alpha :=\neg A, \beta := A]$

(3) $(\neg A \to (A \to B)) \to (\neg A \to (A \to B) \to A) \to (\neg A \to A)$
Аксиома 2 $[\alpha :=\neg A, \beta :=(A \to B), \gamma := A]$

(4) $\neg A \to A \to B$
$A, \neg A \vdash B$ по заданию 1e

(5) $((A \to B) \to A) \to \neg A \to ((A \to B) \to A)$
Аксиома 1 $[\alpha :=((A \to B) \to A), \beta :=\neg A]$

(6) $\neg A \to (A \to B) \to A$
Moduse Ponuns 1, 5

(7) $(\neg A \to (A \to B) \to A) \to (\neg A \to A)$
Moduse Ponuns 4, 3

(8) $\neg A \to A$
Moduse Ponuns 6, 7

(9) $\neg A \to \neg A$
$\alpha \to \alpha$, доказано на лекции

(10) $(\neg A \to \neg A) \to \neg\neg A$
Moduse Ponuns 8, 2

(11) $\neg\neg A$
Moduse Ponuns 9, 10

(12) $\neg\neg A \to A$
Аксиома 10 $[\alpha := A]$

(13) A
Moduse Ponuns 11, 12

$$\vdash A \vee \neg A \tag{i}$$

Соглашение: В дальнейшем доказательстве буду пользоваться раннее доказанными фактами, они будут как бы вставляться в доказательство, а снизу будет подписано, чем я пользовался (иначе это займет бесконечность времени)

Доказательство:

(1) $A \to A \vee \neg A$
Аксиома 6 $[\alpha :=\text{A}, \beta :=\neg A]$

(2) $\neg\neg(A \vee \neg A) \to (A \vee \neg A)$
Аксиома 10 $[\alpha := A \vee \neg A]$

(3) $(\neg(A \vee \neg A) \to (A \vee \neg A)) \to (\neg(A \vee \neg A) \to \neg(A \vee \neg A)) \to \neg\neg(A \vee \neg A)$
Аксиома 9 $[\alpha :=\neg(A \vee \neg A), \beta := A \vee \neg A]$

(4) $\neg(A \vee \neg A) \to \neg(A \vee \neg A)$
$\alpha \to \alpha$, доказано на лекции

(5) $(\neg(A \vee \neg A) \to \neg A) \to (\neg(A \vee \neg A) \to \neg A \to (A \vee \neg A)) \to (\neg(A \vee \neg A) \to (A \vee \neg A))$
Аксиома 2 $[\alpha :=\neg(A \vee \neg A), \beta :=\neg A, \gamma := A \vee \neg A]$

(6) $\neg A \to A \vee \neg A$
Аксиома 7 $[\alpha :=\neg A, \beta := A]$

(7) $(\neg A \to A \vee \neg A) \to \neg(A \vee \neg A) \to (\neg A \to A \vee \neg A)$
Аксиома 1 $[\alpha :=\neg A \to A \vee \neg A, \beta :=\neg(A \vee \neg A)]$

(8) $\neg(A \vee \neg A) \to (\neg A \to A \vee \neg A)$
Moduse Ponuns 6, 7

(9) $(A \to A \vee \neg A) \to (\neg(A \vee \neg A) \to \neg A)$
$(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$, доказано в $3b$

(10) $\neg(A \vee \neg A) \to \neg A$
Moduse Ponuns 1, 9

(11) $(\neg(A \vee \neg A) \to (\neg A \to A \vee \neg A)) \to (\neg(A \vee \neg A) \to (A \vee \neg A))$
Moduse Ponuns 10, 5

(12) $\neg(A \vee \neg A) \to (A \vee \neg A)$
Moduse Ponuns 8, 11

(13) $(\neg(A \vee \neg A) \to \neg(A \vee \neg A)) \to \neg\neg(A \vee \neg A)$
Moduse Ponuns 12, 3

(14) $\neg\neg(A \vee \neg A)$
Moduse Ponuns 4, 13

(15) $A \vee \neg A$
Moduse Ponuns 14, 2

Q.E.D.

$$\vdash (A\&B \to C) \to (A \to B \to C) \tag{j}$$

Доказательство:

Если я докажу:

$$(A\&B \to C), A, B \vdash C$$

То воспользуясь теоремой о дедукции получу искомое.

Докажем:

(1) $(A\&B) \to C$
Гипотеза
(2) A
Гипотеза
(3) B
Гипотеза
(4) $A \to B \to A\&B$
Аксиома 3 [α :=A, β :=B]
(5) $B \to A\&B$
Moduse Ponuns 2, 4
(6) $A\&B$
Moduse Ponuns 3, 5
(7) C
Moduse Ponuns 6, 1

Q.E.D.

$$\vdash A\&(B \lor C) \to (A\&B) \lor (A\&C) \tag{k}$$

Доказательство:

Воспользуемся теоремой о дедукции, надо доказать:

$$A\&(B \lor C) \vdash (A\&B) \lor (A\&C)$$

(1) $A\&(B \lor C)$
Гипотеза
(2) $A\&(B \lor C) \to A$
Аксиома 4 $[\alpha := A, \beta := B \lor C]$
(3) $A\&(B \lor C) \to (B \lor C)$
Аксиома 5 $[\alpha := A, \beta := B \lor C]$
(4) A
Moduse Ponuns 1, 2
(5) $B \lor C$
Moduse Ponuns 1, 3
(6) $A \to B \to A\&B$
Аксиома 3 $[\alpha := A, \beta := B]$
(7) $A \to C \to A\&C$
Аксиома 3 $[\alpha := A, \beta := C]$
(8) $(B \to (A\&B) \lor (A\&C)) \to (C \to (A\&B) \lor (A\&C)) \to (B \lor C \to (A\&B) \lor (A\&C))$
Аксиома 8 $[\alpha := B, \beta := C, \gamma := (A\&B) \lor (A\&C)]$
(9) $(B \to A\&B) \to (B \to A\&B \to (A\&B) \lor (A\&C)) \to (B \to (A\&B) \lor (A\&C))$
Аксиома 2 $[\alpha := B, \beta := A\&B, \gamma := (A\&B) \lor (A\&C)]$
(10) $B \to A\&B$
Moduse Ponuns 4, 6
(11) $(B \to A\&B \to (A\&B) \lor (A\&C)) \to (B \to (A\&B) \lor (A\&C))$
Moduse Ponuns 10, 9
(12) $(A\&B) \to (A\&B) \lor (A\&C)$
Аксиома 6 $[\alpha := (A\&B), \beta := (A\&C)]$
(13) $(A\&B \to (A\&B) \lor (A\&C)) \to B \to (A\&B \to (A\&B) \lor (A\&C))$
Аксиома 1 $[\alpha := A\&B \to (A\&B) \lor (A\&C), \beta := B]$
(14) $(B \to A\&B \to (A\&B) \lor (A\&C))$
Moduse Ponuns 12, 13
(15) $B \to (A\&B) \lor (A\&C)$
Moduse Ponuns 14, 11

(16) $(C \to A\&C) \to (C \to A\&C \to (A\&B) \vee (A\&C)) \to (C \to (A\&B) \vee (A\&C))$
Аксиома 2 $[\alpha := C, \beta := A\&C, \gamma := (A\&B) \vee (A\&C)]$
(17) $B \to A\&B$
Moduse Ponuns 4, 7
(18) $(C \to A\&C \to (A\&B) \vee (A\&C)) \to (C \to (A\&B) \vee (A\&C))$
Moduse Ponuns 17, 16
(19) $(A\&C) \to (A\&B) \vee (A\&C)$
Аксиома 7 $[\alpha := (A\&C), \beta := (A\&B)]$
(20) $(A\&C \to (A\&B) \vee (A\&C)) \to C \to (A\&C \to (A\&B) \vee (A\&C))$
Аксиома 1 $[\alpha := A\&C \to (A\&B) \vee (A\&C), \beta := C]$
(21) $(C \to A\& \to (A\&B) \vee (A\&C))$
Moduse Ponuns 19, 20
(22) $C \to (A\&B) \vee (A\&C)$
Moduse Ponuns 21, 18
(23) $(C \to (A\&B) \vee (A\&C)) \to (B \vee C \to (A\&B) \vee (A\&C))$
Moduse Ponuns 15, 8
(24) $B \vee C \to (A\&B) \vee (A\&C)$
Moduse Ponuns 22, 23
(25) $(A\&B) \vee (A\&C)$
Moduse Ponuns 5, 24

$$\vdash (A \to B \to C) \to (A\&B \to C) \tag{1}$$

Доказательство:

По теореме о дедукции:

$$(A \to B \to C), A\&B \vdash C$$

(1) $A \to B \to C$
Гипотеза

(2) $A\&B$
Гипотеза

(3) $A\&B \to A$
Аксиома 4 [α :=A, β :=B]

(4) $A\&B \to B$
Аксиома 5 [α :=A, β :=B]

(5) A
Moduse Ponuns 2, 3

(6) B
Moduse Ponuns 2, 4

(7) $B \to C$
Moduse Ponuns 5, 1

(8) C
Moduse Ponuns 6, 7

Q.E.D.

$$\vdash (A \to B) \lor (B \to A) \tag{m}$$

Доказательство:

(1) $(A \to (A \to B) \lor (B \to A)) \to (\neg A \to (A \to B) \lor (B \to A)) \to (A \lor \neg A \to (A \to B) \lor (B \to A))$
Аксиома 7 $[\alpha := A, \beta := \neg A, \gamma := (A \to B) \lor (B \to A)]$

(2) $(A \to (B \to A)) \to (A \to (B \to A) \to (A \to B) \lor (B \to A)) \to (A \to (A \to B) \lor (B \to A))$
Аксиома 2 $[\alpha := A, \beta := B \to A, \gamma := (A \to B) \lor (B \to A)]$

(3) $A \to B \to A$
Аксиома 1 $[\alpha := A, \beta := B]$

(4) $(A \to (B \to A) \to (A \to B) \lor (B \to A)) \to (A \to (A \to B) \lor (B \to A))$
Moduse Ponuns 3, 2

(5) $(B \to A) \to (A \to B) \lor (B \to A)$
Аксиома 7 $[\alpha := (B \to A), \beta := (A \to B)]$

(6) $((B \to A) \to (A \to B) \lor (B \to A)) \to A \to ((B \to A) \to (A \to B) \lor (B \to A))$
Аксиома 1 $[\alpha := (B \to A) \to (A \to B) \lor (B \to A), \beta := A]$

(7) $A \to (B \to A) \to (A \to B) \lor (B \to A)$
Moduse Ponuns 5, 6

(8) $A \to (A \to B) \lor (B \to A)$
Moduse Ponuns 7, 4

(9) $(\neg A \to (A \to B) \lor (B \to A)) \to (A \lor \neg A \to (A \to B) \lor (B \to A))$
Moduse Ponuns 8, 1

(10) $(\neg A \to A \to B) \to (\neg A \to A \to B \to (A \to B) \lor (B \to A)) \to (\neg A \to (A \to B) \lor (B \to A))$
Аксиома 2 $[\alpha := \neg A, \beta := (A \to B), \gamma := (A \to B) \lor (B \to A)]$

(11) $\neg A \to A \to B$
$A, \neg A \vdash B$ по заданию 1e

(12) $(\neg A \to (A \to B) \to (A \to B) \lor (B \to A)) \to (\neg A \to (A \to B) \lor (B \to A))$
Moduse Ponuns 11, 10

(13) $(A \to B) \to (A \to B) \lor (B \to A)$
Аксиома 6 $[\alpha := (A \to B), \beta := (B \to A)]$

(14) $((A \to B) \to (A \to B) \lor (B \to A)) \to A \to ((A \to B) \to (A \to B) \lor (B \to A))$
Аксиома 1 $[\alpha := (B \to A) \to (A \to B) \lor (B \to A), \beta := \neg A]$

(15) $\neg A \to (A \to B) \to (A \to B) \lor (B \to A)$
Moduse Ponuns 13, 14

(16) $\neg A \to (A \to B) \lor (B \to A)$
Moduse Ponuns 15, 12

(17) $A \lor \neg A \to (A \to B) \lor (B \to A)$
Moduse Ponuns 16, 9

(18) $(A \to B) \lor (B \to A)$
по 3i

(19) $A \lor \neg A$
Moduse Ponuns 18, 17

Q.E.D.

$$\vdash (A \to B) \lor (B \to C) \lor (C \to A) \tag{n}$$

Временно обозначу за $F := (A \to B) \lor (B \to C)$

(1) $(A \to F \lor (C \to A)) \to (\neg A \to F \lor (C \to A)) \to (A \lor \neg A \to F \lor (C \to A))$
Аксиома 8 $[\alpha := A, \beta := \neg A, \gamma := F \lor (C \to A)]$

(2) $(A \to (C \to A)) \to (A \to (C \to A) \to F \lor (C \to A)) \to (A \to F \lor (C \to A))$
Аксиома 2 $[\alpha := A, \beta := C \to A, \gamma := F \lor (C \to A)]$

(3) $A \to C \to A$
Аксиома 1 $[\alpha := A, \beta := C]$

(4) $(A \to (C \to A) \to F \lor (C \to A)) \to (A \to F \lor (C \to A))$
Moduse Ponuns 3, 2

(5) $(C \to A) \to F \lor (C \to A)$
Аксиома 7 $[\alpha := (C \to A), \beta := F]$

(6) $((C \to A) \to F \lor (C \to A)) \to A \to ((C \to A) \to F \lor (C \to A))$
Аксиома 1 $[\alpha := ((C \to A) \to F \lor (C \to A)), \beta := A]$

(7) $A \to (C \to A) \to F \lor (C \to A)$
Moduse Ponuns 5, 6

(8) $A \to F \lor (C \to A)$
Moduse Ponuns 7, 4

(9) $(\neg A \to F \lor (C \to A)) \to (A \lor \neg A \to F \lor (C \to A))$
Moduse Ponuns 8, 1

(10) $\neg A \to A \to B$
$A, \neg A \vdash B$ по заданию 1e

(11) $(\neg A \to (A \to B)) \to (\neg A \to (A \to B) \to F) \to (\neg A \to F)$
Аксиома 2 $[\alpha := \neg A, \beta := (A \to B), \gamma := F]$

(12) $(\neg A \to (A \to B) \to F) \to (\neg A \to F)$
Moduse Ponuns 10, 11

(13) $(A \to B) \to (A \to B) \lor (B \to C)$
Аксиома 6 $[\alpha := (A \to B), \beta := (B \to C)]$

(14) $((A \to B) \to F) \to \neg A \to ((A \to B) \to F)$
Аксиома 1 $[\alpha := (A \to B) \to F, \beta := \neg A]$

(15) $(\neg A \to (A \to B) \to F)$
Moduse Ponuns 13, 14

(16) $\neg A \to F$
Moduse Ponuns 15, 12

(17) $(\neg A \to F) \to (\neg A \to F \to F \vee (C \to A)) \to (\neg A \to F \vee (C \to A))$
Аксиома 2 $[\alpha := \neg A, \beta := F, \gamma := F \vee (C \to A)]$
(18) $(\neg A \to F \to F \vee (C \to A)) \to (\neg A \to F \vee (C \to A))$
Moduse Ponuns 16, 17
(19) $F \to F \vee (C \to A)$
Аксиома 7 $[\alpha := F, \beta := (C \to A)]$
(20) $(F \to F \vee (C \to A)) \to \neg A \to (F \to F \vee (C \to A))$
Аксиома 1 $[\alpha := (F \to F \vee (C \to A)), \beta := \neg A]$
(21) $\neg A \to F \to F \vee (C \to A)$
Moduse Ponuns 19, 20
(22) $\neg A \to F \vee (C \to A)$
Moduse Ponuns 21, 18
(23) $A \vee \neg A \to F \vee (C \to A)$
Moduse Ponuns 22, 9
(24) $A \vee \neg A$
По пукнту 3i
(25) $F \vee (C \to A)$
Moduse Ponuns 24, 23

Q.E.D.

1.4 Задача 4.

Будем пользоваться фактом из $3i :\vdash \alpha \vee \neg\alpha$

По теореме о дедукции $\alpha \vdash \beta \Leftrightarrow \vdash \alpha \to \beta$.

По теореме о дедукции $\neg\alpha \vdash \beta \Leftrightarrow \vdash \neg\alpha \to \beta$

Докажем, что $\vdash \beta$:

Доказательство

$\vdots$

(n) $\alpha \to \beta$
по вышесказанному

$\vdots$

$(n+m)$ $\neg\alpha \to \beta$
по вышесказанному

$(n+m+1)$ $(\alpha \to \beta) \to (\neg\alpha \to \beta) \to (\alpha \vee \neg\alpha \to \beta)$
Аксиома 8 $[\alpha := \alpha, \beta := \neg\alpha, \gamma := \beta]$

$(n+m+2)$ $(\neg\alpha \to \beta) \to (\alpha \vee \neg\alpha \to \beta)$
Moduse Ponuns n, $(n+m+1)$

$(n+m+3)$ $(\alpha \vee \neg\alpha \to \beta)$
Moduse Ponuns $(n+m)$, $(n+m+2)$

$\vdots$

$(n+m+k+3)$ $\alpha \vee \neg\alpha$
По 3i

$(n+m+k+4)$ β
Moduse Ponuns $(n+m+k+3)$, $(n+m+3)$

2 Домашнее задание 2.

2.1 Задача 1.

Покажите, что в классическом исчислении высказываний $\Gamma \models \alpha \Rightarrow \Gamma \vdash \alpha$.

Решение:

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ - пропозициональные переменные, которые участвуют в формуле α, их конечное количество.

Посмотрю на таблицу истинности (2^n строк оценки), для α.

Для каждой выполненной строчки выполнено:

$T_1 \wedge \ldots \wedge T_n \models \alpha$, где $T_i = X_i$ или $T_i = \neg X_i$, в зависимости

Это эквивалентно тому, что формула верна $\models (T_1 \wedge \cdots \wedge T_n) \to \alpha$. Откуда по теореме о полноте из лекции:

$$\vdash (T_1 \wedge T_2 \wedge \cdots \wedge T_n) \to \alpha$$

Используем теорему о дедукции и получим:

$$(T_1 \wedge T_2 \wedge \cdots \wedge T_n) \vdash \alpha$$

Заметим, что $\Gamma \models (T_1 \wedge T_2 \wedge \cdots \wedge T_n) \vee (Q_1 \ldots) \vee \ldots$ —выводит какое-то конечное количество множество строк нашей таблицы истинности

Осталось показать, что

$$\Gamma \vdash (T_1 \wedge T_2 \wedge \cdots \wedge T_n) \vee (Q_1 \ldots) \vee \ldots$$

И тогда будет выполнено $\Gamma \vdash \alpha$

Обозначу $(T_1 \wedge T_2 \wedge \cdots \wedge T_n) \vee (Q_1 \ldots) \vee \ldots = D$

Формула D построена так, что она "перечисляет"все возможные строки Γ. В классической логике это эквивалентно тому, что Γ эквивалентно D (в плане таблицы истинности)

2.2 Задача 2.

а) Возьмем открытое множество из R, по определению вокруг каждой точки открытого множества есть шар, возьмем объедение и победим (будем рассматривать только $\mathbb{Q}$, а так как Q плотно в $\mathbb{R}$ и так как $\mathbb{Q}$ - счетно, то покрытие будет счетно и по определению мы сможем взять объединение) TODO: расписать

б) нет

в) нет

3 Домашнее задание 3.

3f

```
// (A -> B) -> (not B -> not A)

template<typename A, typename B, typename C>
//f_a_to_b = A -> B
auto proof_f(std::function<B(A)> f_a_to_b) {
    // not B = B -> false
    return [f](std::function<C(B)> not_b) {
        return [f_a_to_b, not_b](A a){
            b = f_a_to_b(a)
            return not_b(b) // C
            // -> мы вернули функцию, которая по A возвращает false
        }
    };
}
```

4 Домашнее задание 4.

4.1 Задача № 1

Докажем

1. $1 \Rightarrow 2$. Выполнена формула $A\&\neg A$.
2. $2 \Rightarrow 3$. Используем аксиому $4, 5$, чтобы получить α и $\neg\alpha$ и используем принцип Взрыва, чтобы доказать $A\&\neg A$. Воз
3. $3 \Rightarrow 4$. Используем аксиому $4, 5$, получим, что для $\alpha = A$ выполнено
4. $4 \Rightarrow 1$. Используем принцип Взрыва и получим то, что надо

4.2 Задача № 2

a. 2 мира w_0, w_1. Связаны $w_0 \leq w_1$

Для первого мира:

$$\not\Vdash A, \not\Vdash B$$

Для второго мира:

$$\Vdash A, \not\Vdash B$$

Покажем, что $((A \to B) \to A) \to A$ не выполнено в данной модели Крипке:

В w_0 не выполнено:

$$A \to B$$

При этом тогда $\Vdash (A \to B) \to A$ выполнено и в w_0 и w_1. Заметим, что тогда не может быть выполнено:

$$((A \to B) \to A) \to A$$

Потому что тогда $w_0 \Vdash A$, что не так

b. 2 мира w_0, w_1. Связаны $w_0 \leq w_1$

Для первого мира:

$$\not\Vdash A, \not\Vdash B$$

Для второго мира:

$$\Vdash A, \Vdash B$$

Покажем, что $(A \to B) \to \neg A \vee B$ не выполнено в данной модели Крипке:

В w_0 и w_1 выполнено:

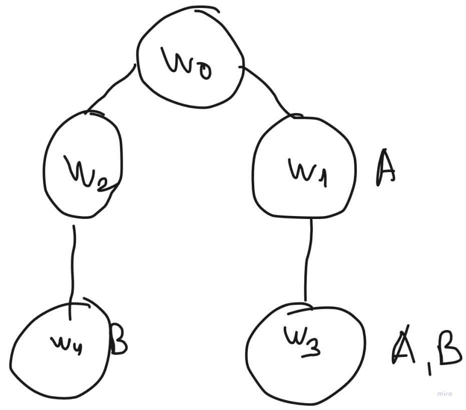
$$A \to B$$

Поймем выполнено ли $\neg A \vee B$ в w_0:

$$w_0 \not\Vdash B, w_0 \not\Vdash \neg A \Rightarrow w_0 \not\Vdash \neg A \vee B$$

Заметим, что тогда в w_0 не выполняется наше условие

c. 5 миров: $w_1, \ldots w_5$. Отношение порядка задается таким графом:



$w_1 \Vdash A, w_4 \Vdash B, w_3 \Vdash A, w_3 \Vdash B$

Проверим $B \vee \neg B$ для каждого мира:

w_0 $w_0 \nVdash \neg B, w_0 \nVdash B \Rightarrow w_0 \nVdash B \vee \neg B$

w_1 $w_1 \nVdash \neg B, w_1 \nVdash B \Rightarrow w_1 \nVdash B \vee \neg B$

w_2 $w_2 \nVdash \neg B, w_2 \nVdash B \Rightarrow w_2 \nVdash B \vee \neg B$

w_3 $w_3 \Vdash B \Rightarrow w_3 \Vdash B \vee \neg B$

w_4 $w_4 \Vdash B \Rightarrow w_4 \Vdash B \vee \neg B$

Проверим $A \to (B \vee \neg B)$ в w_0. Если $\Vdash A \to (B \vee \neg B)$, то в $w_0 \Vdash B \vee \neg B$, что не так.

Откуда в $w_0 \nVdash A \to (B \vee \neg B)$.

Проверим $\neg A \to (B \vee \neg B)$ в w_0. Если $\Vdash \neg A \to (B \vee \neg B)$, то в $w_2 \Vdash B \vee \neg B$, что не так.

Откуда в $w_0 \nVdash \neg A \to (B \vee \neg B)$.

Отсюда очевидно, что в w_0 не выполнено искомое утверждение, что и надо доказать.

5 Домашнее задание 5.

5.1 Задание № 3.

Утверждение:

$$\frac{\text{Все Саши любят матлог} \quad \text{Все Саши - люди (человеки)}}{\text{Существует человек, который любит матлог}}$$

$$\frac{\text{Все единороги имеют рога} \quad \text{Все единороги млекопитающие}}{\text{Существует млекопитающее с рогом}}$$

В предикатах:

$$\exists x : M(x), \forall x : M(x) \to P(x), \forall x : M(x) \to S(x) \vdash \exists x : S(x) \& P(x)$$

Доказательство:

(1)	$\forall x.M(x) \to P(x)$	Гипотеза
(2)	$\forall x.M(x) \to S(x)$	Гипотеза
(3)	$\exists x.M(x)$	Гипотеза (условие существования)
(3.5)	$\exists x.M(x) \to M(a)$	Аксиома 12
(4)	$M(a)$	Modus Ponens из 3 и (3.5)
(5)	$M(a) \to P(a)$	см замечание
(6)	$M(a) \to S(a)$	см замечание
(7)	$P(a)$	Modus ponens из (4) и (5)
(8)	$S(a)$	Modus ponens из (4) и (6)
(9)	$S(a) \& P(a)$	Введение конъюнкции из (7) и (8)
(10)	$S(a) \& P(a) \to \exists x.S(x) \& P(x)$	(12) аксиома
(11)	$\exists x.S(x) \& P(x)$	Modus ponens из (9) и (10)

Замечание: 5,6 пункт следуют из 11 аксиомы при подстановке a вместо x и modus ponens.

Контрпример с существованием:

$D = \{0, 1\}$

$M(x) = (x == 0) \& (x == 1)$, $S(x) = (x == 0)$, $P(x) = (x == 1)$

5.2 Задание № 5.

Докажите или опровергните следующие формулы:

1. $(\forall x.\phi) \to (\forall y.\phi[x := y])$, если есть свобода для подстановки y вместо x в ϕ и y не входит свободно в ϕ.

   Решение:

(1)	$(\forall x.\varphi) \to \varphi[x := y]$	(A11)
(2)	$(\forall x.\varphi) \to \forall y.\varphi[x := y]$	Правило вывода $\forall$

2. $(\forall x.\phi) \to (\exists x.\phi)$ и $(\forall x.\forall x.\phi) \to (\forall x.\phi)$

   Решение:

   x свободно для подстановки в φ вместо x,

(1)	$(\forall x.\phi) \to \phi[x := x]$	(A11)
(2)	$\phi \to (\exists x.\phi[x := x])$	(A12)
(3)	$((\forall x.\phi) \to \phi) \to ((\forall x.\phi) \to \phi \to (\exists x.\phi)) \to ((\forall x.\phi) \to (\exists x.\phi))$	(A2)
(4)	$((\forall x.\phi) \to \phi \to (\exists x.\phi)) \to ((\forall x.\phi) \to (\exists x.\phi))$	Moduse Ponuns 1, 3
(5)	$(\phi \to (\exists x.\phi)) \to (\forall x.\phi) \to (\phi \to (\exists x.\phi))$	(A1)
(6)	$(\forall x.\phi) \to \phi \to (\exists x.\phi)$	Moduse Ponuns 1, 5
(7)	$(\forall x.\phi) \to (\exists x.\phi)$	Moduse Ponuns 6, 4

   Второе:

(1)	$(\forall x.\varphi) \to (\forall x.\varphi)$	$\alpha \to \alpha$
(2)	$(\forall x.(\forall x.\varphi)) \to (\forall x.\varphi)$	(A11)

3. $(\forall x.\phi) \to (\neg\exists x.\neg\phi)$ и $(\exists x.\neg\phi) \to (\neg\forall x.\phi)$
4. $(\forall x.\alpha \vee \beta) \to (\neg\exists x.\neg\alpha)\&(\neg\exists x.\neg\beta)$
5. $((\forall x.\alpha) \vee (\forall y.\beta)) \to \forall x.\forall y.\alpha \vee \beta$. Какие условия надо наложить на переменные и формулы? Приведите контрпримеры, поясняющие необходимость условий.
6. $(\alpha \to \beta) \to \forall x.(\alpha \to \beta)$. Возможно, нужно наложить какие-то условия на переменные и формулы? Приведите контрпримеры, поясняющие необходимость условий (если условия требуются).
7. $(\alpha \to \forall x.\beta) \to (\forall x.\alpha \to \beta)$ при условии, что x не входит свободно в α.

6 Домашнее задание 7.

6.1 № 5

Рассмотрим аксиоматику Пеано. Пусть

$$a^b = \begin{cases} 1, & b = 0 \\ a^c \cdot a, & b = c' \end{cases}$$

Сложение:

$$\begin{cases} a + 0 = a \\ a + b' = (a + b)' \end{cases}$$

Умножение:

$$\begin{cases} a \cdot 0 = 0 \\ a \cdot b' = a \cdot b + a \end{cases}$$

Докажите, что:

1. $a \cdot b = b \cdot a$
2. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
3. $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$
4. $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$
5. $(a + b) + c = a + (b + c)$

Доказательство

5.$(a + b) + c = a + (b + c)$

Доказательство индукцией по c:

База: $c = 0$

$$(a + b) + 0 = a + b = a + (b + 0)$$

Предположение индукции:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Шаг индукции: $c \to c'$

$$(a + b) + c' = ((a + b) + c)' = (a + (b + c))'$$
$$a + (b + c') = a + (b + c)' = (a + (b + c))'$$

1. $a \cdot b = b \cdot a$

Докажем вспомогательное утверждение

$$b' \cdot a = b \cdot a + a$$

База: $a = 0$

$$b' \cdot 0 = 0$$

очевидно

Предположение: $b' \cdot a = b \cdot a + a$

Шаг: $a \to a'$

$$b' \cdot a' = b' \cdot a + b' = b \cdot a + a + b' =$$

$$= b \cdot a + (a + b)' = b \cdot a + (b + a)' = b \cdot a + b + a' = b \cdot a' + a'$$

Доказано вернемся к искомой задаче

База: $b = 0$

$$a \cdot 0 = 0 = 0 \cdot a$$

очевидно

Предположение: $a \cdot b = b \cdot a$

Шаг: $b \to b'$

$$a \cdot b' = a \cdot b + a = b \cdot a + a = b' \cdot a$$

2.$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

База: $c = 0$

$$(a + b) \cdot 0 = 0 = 0 + 0 = a \cdot 0 + b \cdot 0$$

Предположение:

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Шаг: $c \to c'$

$$(a + b) \cdot c' = (a + b) \cdot c + (a + b) = (a \cdot c + b \cdot c) + (a + b)$$

$$a \cdot c' + b \cdot c' = (a \cdot c + a) + (b \cdot c + b) = a \cdot c + b \cdot c + a + b$$

3. $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$

База: $c = 0$

$$a^{b+0} = a^b = a^b \cdot 1 = a^b \cdot a^0$$

Предположение:

$$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$$

Шаг: $c \to c'$

$$a^{b+c'} = a^{(b+c)'} = a^{b+c} \cdot a = (a^b \cdot a^c) \cdot a$$

$$a^b \cdot a^{c'} = a^b \cdot (a^c \cdot a) = (a^b \cdot a^c) \cdot a$$

4. $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$

База: $c = 0$

$$(a^b)^0 = 1 = a^0 = a^{b \cdot 0}$$

Предположение:

$$(a^b)^c = a^{b \cdot c}$$

Шаг: $c \to c'$

$$(a^b)^{c'} = (a^b)^c \cdot a^b = a^{b \cdot c} \cdot a^b$$

$$a^{b \cdot c'} = a^{b \cdot c + b} = a^{b \cdot c} \cdot a^b$$

6.2 № 6

Определим отношение «меньше или равно» так: $0 \le a$ и $a' \le b'$, если $a \le b$. Докажите, что:

1. $x \le x + y$;
2. $x \le x \cdot y$ (укажите, когда это так — в остальных случаях приведите контрпримеры);
3. Если $a \le b$ и $m \le n$, то $a \cdot m \le b \cdot n$;
4. $x \le y$ тогда и только тогда, когда существует n, что $x + n = y$;
5. Будем говорить, что a делится на b с остатком, если существуют такие p и q, что $a = b \cdot p + q$ и $0 \le q < b$. Покажите, что p и q всегда существуют и единственны, если $b > 0$.

$a \le a'$ - очевидно

1. $x \le x + y$

База: $y = 0$ $x + 0 = x$, очевидно $x \le x$.

Предположение индукции: $x \le x + y$

Шаг индукции: $y \to y'$

$$x + y' = (x + y)'$$

Из предположения $x \le x + y$ и $a \le a'$:

$$x + y \le (x + y)' = x + y'$$

2. $x \le x \cdot y$

$x \le x \cdot y$ выполняется тогда и только тогда, когда $x = 0$ или $y \ge 1$.

Доказательство:

Если $x = 0$: $0 \cdot y = 0$, и $0 \le 0$.

Если $y = 1$: $x \cdot 1 = x$, и $x \le x$.

Если $y \ge 1$:

База: $y = 1$ — уже проверено.

Предположение: $x \le x \cdot y$

Шаг: $y \to y'$

$$x \cdot y' = x \cdot y + x$$

$$x \le x \cdot y$$

По пункту 1.

$$x \le x \cdot y + x = x \cdot y'$$

Контрпример:

При $x = a$, $y = 0$: $a \cdot 0 = 0$, но $a \nleq 0$.

3. Если $a \le b$ и $m \le n$, то $a \cdot m \le b \cdot n$

Доказательство:

Из пункта 4:

$$a \le b \Leftrightarrow \exists k : b = a + k$$
$$m \le n \Leftrightarrow \exists l : n = m + l$$

Тогда:

$$b \cdot n = (a + k)(m + l)$$

$$a \cdot m + a \cdot l + k \cdot m + k \cdot l$$

Следовательно,

$$b \cdot n = a \cdot m + (a \cdot l + k \cdot m + k \cdot l)$$

По пункту 4: $a \cdot m \le b \cdot n$.

4. $x \le y \iff \exists n : x + n = y$

Доказательство:

$\Rightarrow$:

1. База: Если $x = 0$, то $n = y$.
2. Если $x = a'$, $y = b'$ и $a \le b$, то по предположению $\exists n : a + n = b$.

   Тогда:

   $$b' = (a + n)' = a' + n \Rightarrow x + n = y$$

$\Leftarrow$

1. База:

   $$n = 0 : x + 0 = x \Rightarrow x \le x$$

2. По предположению: $x \le x + n$. Так как $x \le x + n, x \le x + n' = y$ по пункту 1

6.3 № 7

Обозначим за $\overline{n}$ представление числа n в формальной арифметике:

$$\overline{n} = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ \left(\overline{k}\right)', & n = k + 1 \end{cases}$$

Например, $\overline{5} = 0'''''$. Докажите в формальной арифметике (доказательства могут использовать метаязык, но при этом из текста должно быть понятно, как выстроить полное доказательство):

1. $\vdash \overline{2} \cdot \overline{2} = \overline{4}$;
2. $\vdash \forall a.a \cdot 0 = 0 \cdot a$;
3. $\vdash \forall a.a \cdot \overline{2} = a + a$;
4. $\vdash \forall p.(\exists q.q' = p) \vee p = 0$ (единственность нуля);

1. $\vdash \overline{2} \cdot \overline{2} = \overline{4}$

Используем аксиомы умножения и сложения:

1. $\overline{2} = 0''$, $\overline{1} = 0'$, $\overline{0} = 0$.
2. По аксиоме умножения: $a \cdot b' = a \cdot b + a$.
3. По аксиоме сложения: $a + b' = (a + b)'$.

Вычисляем:

1. $\overline{2} \cdot \overline{1} = \overline{2} \cdot \overline{0}' = \overline{2} \cdot \overline{0} + \overline{2} = 0 + \overline{2} = \overline{2}$ (так как $0 + a = a$ — ранее доказанное свойство).

2. $\overline{2} \cdot \overline{2} = \overline{2} \cdot \overline{1}' = \overline{2} \cdot \overline{1} + \overline{2} = \overline{2} + \overline{2}$.

3. $\overline{2} + \overline{2} = \overline{2} + \overline{1}' = (\overline{2} + \overline{1})' = \overline{3}' = \overline{4}$.

Таким образом, $\overline{2} \cdot \overline{2} = \overline{4}$.

2. $\vdash \forall a.a \cdot 0 = 0 \cdot a$;

Лемма 2: $a = b \vdash b = a$

(1)	$a = b$	Гипотеза
(2)	$a = a$	из лекции
(3)	$a = b \to a = a \to b = a$	A1
(4)	$b = a$	MP (1,2),3

Лемма 2: $0 \cdot a = 0$

(1)	$0 \cdot 0 = 0$	A7
(2)	$0 \cdot a' = 0 \cdot a + 0$	A8
(3)	$0 \cdot a + 0 = 0 \cdot a$	A7
(4)	$0 \cdot a' = 0 \cdot a$	Из аксиомы 1, см доказательство(транзитивность $=$)
(5)	$0 \cdot a = 0 \cdot a'$	по Лемме 1
(6)	$0 \cdot a = 0 \cdot a' \to 0 \cdot a = 0 \to 0 = 0 \cdot a'$	A1
(7)	$0 \cdot a = 0 \to 0 = 0 \cdot a'$	MP 5,6
(7.5)	$\forall a.0 \cdot a = 0 \to 0 = 0 \cdot a'$	MP 5,6, обозначим это за T
(8)	$\varphi[a := 0] \& (\forall a.\varphi \to \varphi[a := a']) \to \varphi$	по схеме индукции, где $\varphi(a) := 0 \cdot a = 0$
(9)	$0 \cdot 0 = 0 \to T \to 0 \& T$	A4 из исчисления предикатов
(10)	$T \to 0 \& T$	MP 9,1
(11)	$0 \& T$	MP 7.5,10
(12)	φ	MP 11,8

Доказательство

(1)	$0 = a \cdot 0 \to 0 = 0 \cdot a \to a \cdot 0 = 0 \cdot a$	A1
(2)	$a \cdot 0 = 0 \to a \cdot 0 = a \cdot 0 \to 0 = a \cdot 0$	A1
(3)	$a \cdot 0 = 0$	A7
(4)	$a \cdot 0 = a \cdot 0$	из лекции
(5)	$a \cdot a \cdot 0 \to 0 = a \cdot 0$	MP 3,2
(6)	$0 = a \cdot 0$	MP 4,5
(7)	$0 \cdot a = 0$	по Лемме 2
(8)	$0 = 0 \cdot a$	из Лемме 1
(9)	$0 = 0 \cdot a \to a \cdot 0 = 0 \cdot a$	MP 7,1
(10)	$a \cdot 0 = 0 \cdot a$	MP 8,9

6.4 № 2

7 Домашнее задание 8.

7.1 № 3

С использованием эмулятора рекурсивных функций (применённый на лекции синтаксис подсказывает использование библиотеки на C++, но вы можете выбрать любой другой способ эмуляции), покажите, что следующие функции примитивно-рекурсивны. Ваше решение должно быть продемонстрировано в работе на простых примерах. Возможно, при реализации сложных функций вам потребуется для ускорения работы заменить базовые функции на «нативные» (например, умножение, реализованное через примитивы, заменить на встроенную операцию) — это можно делать при условии, что для них у вас есть эквивалентная примитивно-рекурсивная реализация.

1. умножение и ограниченное вычитание;
2. целочисленное деление и остаток от деления;
3. вычисление n-го простого числа (напомним теорему Бертрана-Чебышёва: для любого натурального $n \geq 2$ найдётся простое число между n и $2n$);
4. частичный логарифм $\text{PLOG}_n(k) = \max\{p \mid k \vdots n^p\}$ (например, $\text{PLOG}_2(96) = 5$);
5. вычисление длины списка в гёделевой нумерации (например, $\text{LEN}(3796875000) = \text{LEN}(2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^9) = 3$);
6. выделение подсписка из списка (например, $\text{SUBLIST}(2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^4 \cdot 7^5, 2, 2) = 2^4 \cdot 3^5$);

```cpp
// Реализация конкретных примитивно-рекурсивных функций
class PRFunctions {
private:
    // Сложение
    static unsigned add_recursive(unsigned x, unsigned y) {
        // add(0, y) = y
        // add(x', y) = incr(add(x, y))
        auto f = [](const vector<unsigned>& args) { return args[0]; }; // f(y) =
            ↪ y
        auto g = [](unsigned n, unsigned prev, const vector<unsigned>& args) {
            return PrimitiveRecursive::incr (prev);
        };
        return PrimitiveRecursive::recursion(f, g, x, {y});
    }

    // Умножение
    static unsigned mult_recursive(unsigned x, unsigned y) {
        // mult(0, y) = 0
        // mult(x', y) = add(mult(x, y), y)
        auto f = [](const vector<unsigned>& args) { return 0; };
        auto g = [](unsigned n, unsigned prev, const vector<unsigned>& args) {
            return add_recursive(prev, args[0]);
        };
        return PrimitiveRecursive::recursion(f, g, x, {y});
    }

    // Предшественник
    static unsigned pred_recursive(unsigned x) {
        // pred(0) = 0
        // pred(x') = x
        auto f = [](const vector<unsigned>& args) { return 0; };
```

```
        auto g = [](unsigned n, unsigned prev, const vector<unsigned>& args) {
            return n;
        };
        return PrimitiveRecursive::recursion(f, g, x, {});
    }

    // Ограниченное вычитание
    static unsigned monus_recursive(unsigned x, unsigned y) {
        // x - 0 = x
        // x - (y+1) = pred(x - y)
        auto f = [](const vector<unsigned>& args) { return args[0]; };
        auto g = [](unsigned n, unsigned prev, const vector<unsigned>& args) {
            return pred_recursive(prev);
        };
        return PrimitiveRecursive::recursion(f, g, y, {x});
    }

public:
    static unsigned add(unsigned x, unsigned y) {
        return x + y;
    }

    static unsigned mult(unsigned x, unsigned y) {
        return x * y;
    }

    static unsigned pred(unsigned x) {
        return (x == 0) ? 0 : x - 1;
    }

    static unsigned monus(unsigned x, unsigned y) {
        return (x < y) ? 0 : x - y;
    }

     // Функция сравнения (x <= y)
    static unsigned leq(unsigned x, unsigned y) {
        return (monus(x, y) == 0) ? 1 : 0;
    }

     // Функция равенства
    static unsigned eq(unsigned x, unsigned y) {
        return (leq(x, y) == 1 && leq(y, x) == 1) ? 1 : 0;
    }
};
```

2.

```
// Целочисленное деление
unsigned div(unsigned x, unsigned y) {
    if (y == 0) return 0; // защита от деления на 0

    unsigned q = 0;
    while ((q + 1) * y <= x) { // это на самом деле for
        q++;
    }
    return q;
```

```
}
```

7.2 № 4.

Определите следующие функции в общерекурсивных функциях:

1. умножение, деление;
2. проверку числа на простоту;
3. частичный логарифм;
4. функцию Аккермана.

1. Вспомогательное:

$$\begin{cases} monus(x,0) = x \\ monus(0,y') = 0 \\ monus(x',y') = monus(x,y) \\ g(x,0) = 1 \\ g(0,y') = 0 \\ g(x',y') = g(x,y) \end{cases}$$

   Умножение:

$$\begin{cases} mult(x,0) = 0 \\ mult(x,y') = add(mult(x,y),x) \end{cases}$$

   Деление:

$$\begin{cases} div(0,y') = 0 \\ div(x,y') = add(g(x,y'), div(monus(x,y'),y')) \end{cases}$$

2. Эквивалентность:

$$\begin{cases} eq(0,0) = 1 \\ eq(0,y') = 0 \\ eq(x',0) = 0 \\ eq(x',y') = eq(x,y) \end{cases}$$

   Больше или равно:

$$\begin{cases} ge(0,0) = 1 \\ ge(0,y') = 0 \\ ge(x',0) = 1 \\ ge(x',y') = gt(x,y) \end{cases}$$

   Не:

   $not(x) = monus(0',x)$

   И:

   $and(x,y) = gt(mult(x,y),0)$

   Или:

   $or(x,y) = not(and(not(x),not(y)))$

$$\begin{cases} divides(n, d) = eq(n, mult(d, div(n, d))) \\ D(n, n) = 0 \\ D(n, d) = or(divides(n, d), D(n, d')) \\ has\_divisor(n) = D(n, 2) \\ is\_prime(n) = and(gt(n, 1), not(has\_divisor(n))) \end{cases}$$

3. $\begin{cases} llog(m, n) = 0, gt(m, n) = 1 \\ llog(m, n) = llog(m, div(n, m))' \\ log(m, n)' = llog(m, n) \end{cases}$

   Или по-другмоу $\begin{cases} log(m, n) = 0, \text{если } gt(m, n) = 1 \\ log(m, n) = log(m, div(n, m))' \end{cases}$

4. $\begin{cases} A(0, n) = n' \\ A(m', 0) = A(m, 1) \\ A(m', n') = A(m, A(m', n)) \end{cases}$

8 Домашнее задание 9.

1. Покажите, что омега-непротиворечивая теория непротиворечива.

2. Пусть $\zeta_\varphi(x) := \forall z.\sigma(x, x, z) \to \varphi(z)$, где формула $\sigma(p, q, r)$ представляет функцию $\mathrm{SUBST}(p, q)$, заменяющую в формуле с гёделевым номером p все свободные переменные x_1 на формулу q. Тогда покажите, что формулу $\alpha_\varphi := \zeta_\varphi(\overline{\ulcorner \zeta_\varphi \urcorner})$ можно взять в качестве формулы α в лемме об автоссылках: $\vdash \varphi(\overline{\ulcorner \alpha_\varphi \urcorner}) \leftrightarrow \alpha_\varphi$.

3. Покажите, что если в некоторой корректной теории $\mathcal{S}$, имеющей модель M, ввести дополнительную аксиому α, причём $[\![\alpha]\!]_M = \text{И}$, то тогда получившаяся теория не станет противоречивой и будет иметь ту же модель M и те же оценки для формул, что и исходная.

4. Покажите, что вопрос о принадлежности формулы $\alpha(x) = \forall p.\delta(x, p) \to \neg\sigma(p)$ в доказательстве теоремы о невыразимости доказуемости к множеству $Th_{\mathcal{S}}$ ведёт к противоречию.

5. Покажите, что формула $D(x)$ из доказательства теоремы о невыразимости доказуемости является представимой в формальной арифметике.

6. Рассмотрим определение предела последовательности:

$$\forall \varepsilon > 0.\exists N \in \mathbb{N}.\forall n \in \mathbb{N}.n > N \to |a_n - l| < \varepsilon$$

   Раскройте все нелогические предикатные и функциональные символы, переведите эту формулу на язык исчисления предикатов, постройте эквивалентную формулу с поверхностными кванторами, проведите её сколемизацию и постройте эквивалентную систему дизъюнктов.

7. Рассмотрим формулы $\forall n.P(n) \to Q(n)$ и $\forall n.P(n) \to P(f(n)) \lor P(g(n))$, здесь P и Q — некоторые предикатные символы. Постройте для каждой из них эрбранов универсум и система основных примеров.

8. Принципом Дирихле («pigeonhole principle») называется утверждение о том, что нельзя разместить n кроликов в m ящиках (при $m < n$) так, чтобы каждый кролик находился бы в ящике один.

   Пусть пропозициональные переменные $P_{i,j}$, где $i \in \overline{1, n}$ и $j \in \overline{1, m}$ соответствуют утверждениям вида «кролик i находится в ящике j». Формализуйте в исчислении высказываний условие «каждый кролик находится в отдельном ящике в одиночестве», понимаемое как условие на переменные $P_{i,j}$, постройте соответствующее выражение в КНФ.

   Какова будет его система основных примеров? Покажите, что система основных примеров формулы противоречива при $m < n$.

9 Информация о курсе

Поток — y2024.
Группы M3132-M3139.
Преподаватель — Штукенберг Дмитрий Григорьевич.