Разбор КР по Тензорам.

Чепелин Вячеслав

Содержание

1 Разбор Кр прошлых лет

1.1 Задание 1.

M_2 пространство матриц 2×2. $C = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \forall x \in M_2 : f(x) = tr(XC)$

1. Докажите, что $f \in M_2^*$
2. Найдите координаты в базисе сопряженном базису $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

Решение:

1) Пусть $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$. Тогда $XC = \begin{pmatrix} 3x_1 - 2x_2 & * \\ * & 5x_3 + x_4 \end{pmatrix}$.

Тогда след равен $3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4$. Заметим, что наше f линейно, откуда $f \in M_2^*$.

2) Теперь представим каждую матрицу, как столбики в каноническом базиск $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Тогда матрица перехода из канонического в наш будет:

$T = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Как мы знаем $a' = aT$. Откуда найдем $a = (3, -2, 5, 1)$.

Умножим и получим:

$$a' = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

Либо я мог просто напросто подставить эти вектора в мою формулу!

1.2 Задание 2.

1. $\alpha \in T(1,2), \beta \in T(1,0)$. Найти тип и матрицу тензора $\alpha \otimes \beta$, $\alpha = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right)$, $(2 \quad -1)$

2. $\gamma \in T(1,3)$. Применить γ_j^{ijk} и $\gamma_l^{i[jk]}$ $\gamma = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & -3 & 0 \\ \hline 2 & 2 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right)$

Решение:

1. Мы получим $\gamma = \alpha \otimes \beta \in T(2,2)$. При этом $\gamma_{kl}^{ij} = \alpha_k^{ij} \cdot \beta_l$. Тогда матрица будет вот такой:

$$\gamma = \left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \\ \hline 4 & 0 & -2 & 0 \\ -6 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

2. Делаем свертку: $\beta^{ik} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

   Делаем альтернирование по 2-ум индексам. Выпишем $i = 1, k = 1$ Alt $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

   Аналогично для остальных получим: $\beta_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 4 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -4 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

1.3 Задание 3.

$\alpha = (4e_1 - e_2 + 2e_3) \otimes (e_2 - e_3) \otimes e_2 + (e_1 + e_2) \otimes (-e_2 + 3e_3) \otimes (e_1 - 2e_2)$

1. Найти тип тензора.
2. Найти тензор, сделанный перестанвокой $\sigma = (kij)$
3. Найти $\beta(\eta^1, \eta^2, \eta^3)$, если $\eta_1 = w^1 - w^2 + w^3; \eta^2 = w^1 + 2w^2 + w^2; \eta^3 = w^2 - 2w^3$.

Решение:

1. тензор типа (0,3).
2. Найдем сначала матрицу нашего тензора: $\alpha = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & -1 & 3 & 0 & 6 & -10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 1 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

   Будем делать транспонрование по частям (312) $\to$ (132) $\to$ (123)

   У нас фиксирован слой. Сделаем перестановку Сделаем β:

$$\beta' = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 6 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & -10 & -5 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

   Теперь у нас зафиксирована строка, сделаем перестановку:

$$\beta = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & -10 & 0 & 3 & -5 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

3. $\beta(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \alpha(\xi_3, \xi_1, \xi_2)$. Дорешайте сами

1.4 Задание 4.

Даны 3 ковектора $f^1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, f^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, f^3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -30 \end{pmatrix}$

1. найти существенные координаты 3-формы $f = f^1 \wedge f^2 \wedge f^3$
2. выписать матицу в пространстве f
3. найти $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$

Решение

Буквально номер из дзшки. Смотрите разборы практик и дз.

2 Информация о курсе

Поток — y2024.
Группы M3138-M3139.
Преподаватель — Кучерук Екатерина Аркадьевна.

Данный разбор сделан не в коммерческих целях, я не хочу никого обидеть, я просто пишу конспекты для себя плак плак плак