Суммы. Линейная Алгебра

Чепелин В.А.

Содержание

1 Введение.

Здесь содержатся мои решения задач про суммы из сборника Фадеева Соминского. Можете передавать этот листик, кому хотите. Надеюсь, вам пригодится он. Всем успехов на кр и в жизни!

2 Фадеев Соминский.

2.1 № 150

Доказать:

a) $2^{2m}\cos^{2m}x = 2\sum\limits_{k=0}^{m-1} C_{2m}^{k}\cos 2(m-k) + C_{2m}^{m}$

Ну во-первых вспомним, что у нас за тема — комплексные числа. Давайте думать.

Пусть у нас есть какое-то комплексное число $a = \cos x + i\sin x$, посмотрим на его Re часть(Вещественная).

$Re\, a = \cos x = \dfrac{a+\overline{a}}{2}$. Давайте возведем второе и третье выражения в степень 2m.

$\cos^2 mx = \left(\dfrac{a+\overline{a}}{2}\right)^{2m}$. А это что-то похожее на то, что нам дано.

Ну давайте подставим и посмотрим:

$2^{2m}\cos^{2m}x = 2^{2m}\left(\dfrac{a+\overline{a}}{2}\right)^{2m} = (a+\overline{a})^{2m}$.

Разложим по биному и получим:

$(a+\overline{a})^{2m} = C_{2m}^{0}a^{2m} + \ldots + C_{2m}^{k}a^{2m-k}(\overline{a}^{k}) + \ldots C_{2m}^{2m}(\overline{a}^{2m})$.

Давайте заметим, что $a\cdot\overline{a} = 1$ (потому что $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$). Давайте поделим нашу сумму на две других и посокращаем везде $a\cdot\overline{a}$.

$C_{2m}^{0}a^{2m} + \ldots + C_{2m}^{k}a^{2m-k}(\overline{a}^{k}) + \ldots C_{2m}^{2m}(\overline{a}^{2m}) = C_{2m}^{0}a^{2m} + \ldots + C_{2m}^{m-1}a^{m+1}(\overline{a}^{m-1}) + C_{2m}^{m}a^{m}(\overline{a}^{m}) + C_{2m}^{m+1}a^{m-1}(\overline{a}^{m+1}) + \ldots C_{2m}^{2m}(\overline{a}^{2m}) = \sum\limits_{k=0}^{m-1} C_{2m}^{k}a^{2m-2k} + C_{2m}^{m} + \sum\limits_{k=m+1}^{2m} C_{2m}^{k}(\overline{a}^{2k-2m})$

Теперь вспомним, что a - комплексное число. $a^k = \cos kx + i\sin ky$. Подставим.

$\sum\limits_{k=0}^{m-1} C_{2m}^{k}(\cos(2m-2k)x + i\sin(2m-2k)y) + C_{2m}^{m} + \sum\limits_{k=m+1}^{2m} C_{2m}^{k}(\cos(2k-2m)x - i\sin(2k-2m)y)$.

Заметим, что все синусы сократятся (хотя бы потому, что это изначально было $a+\overline{a}$ в степени, то есть рациональное) останется:

$\sum\limits_{k=0}^{m-1} C_{2m}^{k}\cos(2m-2k)x + C_{2m}^{m} + \sum\limits_{k=m+1}^{2m} C_{2m}^{k}(\cos(2k-2m)x$

А методом пристального взгляда получаем, что это искомое.

b) $2^{2m}\cos^{2m+1}x = \sum\limits_{k=0}^{m} C_{2m+1}^{k}\cos(2m-2k+1)x$

Давайте заметим, что это почти то же самое, что и в пункте а. Умножим обе части на 2. Давайте повторим все то же самое, что мы делали в пункте а и получим нужный нам ответ. В угоду размера пдф и моего сна, полного решения **не будет**.

c) $2^{2m}\sin^{2m}x = 2\sum\limits_{k=0}^{m-1}(-1)^{m+k}C_{2m}^{k}\cos 2(m-k)x + C_{2m}^{m}$

Начнем решать. Давайте делать, как в пункте а.

Пусть у нас есть какое-то комплексное число $a = \cos x + i\sin x$, посмотрим на его Im часть(Мнимая).

$Im\, a = \sin x = \dfrac{a-\overline{a}}{2i}$. Давайте возведем второе и третье выражения в степень 2m. $\sin^2 mx = \left(\dfrac{a-\overline{a}}{2i}\right)^{2m}$. А это что-то похожее на то, что нам дано.

$2^{2m}\sin^{2m}x = (-1)^m\cdot(-1)^m\cdot 2^{2m}\sin^{2m}x = (-1)^m\cdot(a-\overline{a})^{2m}$. Теперь давайте сделаем то же самое, что и в пункте а, при этом у нас останется вещественная часть, но она будет знакочередоваться. В самом конце домножим нашу сумму на вынесенную за скобочки $(-1)^m$ и получим итоговую, которую от нас просят. В угоду размера пдф и моего сна, полного решения **не будет**.

d) $2^{2m}\sin^{2m+1}x = \sum\limits_{k=0}^{m}(-1)^{m+k}C_{2m+1}^{k}\sin(2m-2k+1)x$

Давайте заметим, что это почти то же самое, что и в пункте с. Умножим обе части на 2. Давайте повторим все то же самое, что мы делали в пункте с, но заметим, что нам надо будет выносить мнимую часть, то есть синусы, также в самом начале у нас останется i за скобками, на которое мы умножим сумму. Так мы получим сумму, которую от нас просят. В угоду размера пдф и моего сна, полного решения **не будет**.

2.2 № 151

Доказать: $\dfrac{\sin mx}{\sin x} = (2\cos x)^{m-1} - C^1_{m-2}(2\cos x)^{m-3} + \dots$

Докажем. Заметим $\sin(k+1)x + \sin(k-1)x = 2\cos x \sin kx$. (из обычной формулы суммы синусов)

Пусть $T_k = \dfrac{\sin kx}{\sin x}$. Заметим $T_k = 2\cos x \cdot T_{k-1} - T(k-2)$. (метод раскрытия скобочек)

Применим метод мат. индукции и докажем искомое выражение.

База: (проверьте сами для k=1, 2)

Переход: Пусть верно для n и меньше, тогда докажем, что верно для n+1. Запишем T_n и T_{n-1}

$$T_n = (2\cos x)^{n-1} - C^1_{n-2}(2\cos x)^{n-3} + C^2_{n-3}(2\cos x)^{n-5} + \dots$$

$$T_{n-1} = (2\cos x)^{n-2} - C^1_{n-3}(2\cos x)^{n-4} + C^2_{n-4}(2\cos x)^{n-6} +$$

$$T_n \cdot 2\cos x = (2\cos x)^n \quad - C^1_{n-2}(2\cos x)^{n-2} + C^2_{n-3}(2\cos x)^{n-4} + \dots$$

Теперь, если пристально посмотреть и вычесть из третьего равенства второе (специально подвинул второе, чтобы было видно, как красиво там получается $C^k_n + C^{k-1}_n = C^k_{n+1}$), то получится то, что должно получится по индукции. А по формуле получившийся ранее мы получаем, что это T_k. Q.E.D.

Собственно, где комплексные

2.3 № 152

Выразить $\cos mx$ через $\cos x$

$2\sin x\cos mx = (\sin(m+1)x - \sin(m-1)x)$.

Давайте сделаем примерно то же самое, что в 151 и получим искомое (если я нигде не накосячил). В угоду размера пдф и моего сна, полного решения **не будет**.

2.4 № 153

Найти:

a) $1 - C_n^2 + C_n^4 - \ldots = ?$

b) $C_n^1 - C_n^3 + \ldots = ?$

Давайте разложим по Биному $(1+i)^n$. Заметим, что Re часть этой штуки как раз наш пункт a, а Im часть - наш пункт b.

С другой стороны $(1+i)^n = (\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}))^n = (\sqrt{2})^n(\cos\frac{\pi n}{4} + i\sin\frac{\pi n}{4})$

Ну тут уже видно чему равна наша рациональная часть, а чему мнимая.

2.5 № 154

Найти:

$C_n^1 - \frac{1}{3}C_n^3 + \frac{1}{9}C_n^5 + \ldots = ?$

Так. Что-то похожее на № 153 b. У нас там было $Im(1+i)^n$, а теперь там появились тройки. Так давайте посмотрим на разложение $(1+\frac{i}{sqrt(3)})^n$. Проделаем аналогичные действия и получим счастье.

Ответ: $\dfrac{2^n}{3^{(\frac{n-1}{2})}} \sin \dfrac{n\pi}{6}$

2.6 № 155

Доказать, что $(x+a)^m + (x+aw)^m + (x+aw^2)^m = 3x^m + 3C_m^3 x^{(m-3)}a^3 + \ldots + 3C_m^n x^{(m-n)}a^n$, где n - ближайшее кратное трем не превосходящее m число. $w = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$.

Выглядит страшно, но нам придется это делать. Заметим, что $w^3 = 1$. Давайте представим каждую как сумму:

$$\sum_{k=0}^{m} C_n^k x^k a^{m-k} + \sum_{k=0}^{m} C_n^k x^k a^{m-k} w^{m-k} + \sum_{k=0}^{m} C_n^k x^k a^{m-k} w^{2m-2k}$$

Теперь загоним каждую такую под один знак суммы:

$$\sum_{k=0}^{m} C_n^k x^k a^{m-k} + C_n^k x^k a^{m-k} w^{m-k} + C_n^k x^k a^{m-k} w^{2m-2k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} C_n^k x^k a^{m-k} \cdot (1 + w^{m-k} + w^{2m-2k})$$

Для дальнейшего удобства поменяем чуть-чуть сумму:

$$\sum_{k=0}^{m} C_n^k x^k a^{m-k} \cdot (1 + w^{m-k} + w^{2m-2k}) = \sum_{k=0}^{m} C_n^{m-k} x^{m-k} a^k \cdot (1 + w^k + w^{2k})$$

Теперь посмотрим чему равна $(1 + w^k + w^{2k})$ в зависимости от k.

1. k **дает остаток 1 по модулю 3**. Пусть $k = 3t+1$, тогда подставим:

   $(1 + w^k + w^{2k}) = (1 + w^{3t+1} + w^{6t+2}) = (1 + w + w^2)$. Исходя из того, что $w^3 = 1$. Заметим, что $w + w^2 + 1 = 0$, поэтому таких k в итоговой сумме не будет

2. k **дает остаток 2 по модулю 3**. Пусть $k = 3t+2$, тогда подставим:

   $(1 + w^k + w^{2k}) = (1 + w^{3t+2} + w^{6t+4}) = (1 + w^2 + w^1)$. Исходя из того, что $w^3 = 1$. Заметим, что $w + w^2 + 1 = 0$, поэтому таких k в итоговой сумме не будет

3. k **дает остаток 0 по модулю 3**. Пусть $k = 3t+3$, тогда подставим:

   $(1 + w^k + w^{2k}) = (1 + w^{3t+3} + w^{6t+6}) = 3$.

А теперь заметим, что получившиеся сумма с выброшенными k будет как раз той, которая нам нужна.

2.7 № 156

Доказать:

a) $1 + C_n^3 + C_n^6 + \ldots = \frac{1}{3}(2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3})$

b) $C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + \ldots = \frac{1}{3}(2^n + 2\cos\frac{(n-2)\pi}{3})$

c) $C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + \ldots = \frac{1}{3}(2^n + 2\cos\frac{(n-4)\pi}{3})$

(Эта задача заняла у меня много времени на втыкание)

Давайте начнем с пункта a. Заметим тут отголоски прошлой задачи, если поставить туда a = 1, x = 1.

$(1+1)^n + (1+1w)^n + (1+1w^2)^n = 3 + 3C_n^3 + 3C_n^6 \ldots$, заметим, что если домножить искомое на 3, то правая часть этого уравнения, совпадет с левой частью изначального.

Значит надо доказать, что$(1+1)^n + (1+1w)^n + (1+1w^2)^n = 2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}$ или

$(1+w)^n + (1+w^2)^n = 2\cos\frac{n\pi}{3}$.

$w = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$, $w^2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$.

Подставим и шок, удивление, получим, что нам надо.

Как получить b,c — нам лишь надо модифицировать формулу из прошлого задания, сделав $w = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$ например. Тогда в прошлом номере при сокращении у нас останется или модуль 1, или модуль 2.

Либо рассмотрев немного другую сумму $(x+a)^m + w^{-1}(x+aw)^m + w^{-2}(x+aw^2)^m$ или такую $(x+a)^m + w^1(x+aw)^m + w^2(x+aw^2)^m$

В угоду размера пдф и моего сна, полного решения **не будет**.

2.8 № 157,158

Найти и доказать:

$\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \dfrac{\sin\frac{n+1}{2}\cdot\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{n}{2}}$

$\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = ?$

Пусть $a = \cos\frac{x}{2} + i\sin\frac{x}{2}$.

Заметим, что $\sum\limits_{k=1}^{n}\cos kx + i\sum\limits_{k=1}^{n}\sin kx = a^2 + a^4 + \ldots + a^{2n}$.

$a^2 + a^4 + \ldots + a^{2n} = a^2\cdot\dfrac{a^{2n}-1}{a^2-1}$. Давайте домножим и поделим на -ia.

Тогда знаменатель $(1-\frac{1}{a^2})\cdot(-ia) = -i(a-\frac{1}{a})$. Интересный факт: $a\cdot\overline{a} = 1$, поэтому:

$-i(a-\frac{1}{a}) = -i(a-\overline{a}) = 2\sin\frac{x}{2}$. Оставим пока так, вернемся к числителю:

$-ia(a^{2n}-1) = -i(a^{2n+1}-a) = i(\cos\frac{x}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})x) + \sin\frac{2n+1}{2}x - \sin\frac{x}{2}$.

Используя формулу разности косинусов и синусов могу получит искомые формулы взяв Re или Im от:

$$\frac{\sin\dfrac{nx}{2}\cdot\cos\dfrac{(n+1)x}{2} + i\sin\dfrac{nx}{2}\cdot\sin\dfrac{(n+1)x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}$$

P.S. $\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = ?$, чтобы получить эту формулу подставьте в нашу формулу без разности косинусов и синусов и получите $\dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}$

2.9 № 159

Найти: $1 + b\cos x + b^2\cos 2x + \ldots + b^n\cos nx = ?$

Возьмем прошлую задачу и модифицируем (это что prog intro?)

Пусть $a = \cos x + i\sin x$.

Заметим, что $1 + \sum\limits_{k=1}^{n} b^k\cos kx + i\sum\limits_{k=0}^{n} b^k\sin kx = 1 + ba + (ab)^2 + \ldots + b^n \cdot a^n$. Соберу геом. прогрессию:

$$\frac{b^{n+1}a^{n+1} - 1}{ab - 1} = \frac{b^{n+1}a^{n+1} - 1}{ab - 1} \cdot \frac{b\overline{a} - 1}{b\overline{a} - 1} = \frac{b^{n+2}a^k - b^{n+1}a^{n+1} - b\overline{a} + 1}{b^2 - b(a + \overline{a}) + 1}$$

Откуда уже можно получить ответ взяв Re часть.

$$S = \frac{b^{n+2}\cos x - b^{n+1}\cos(n+1)x - b\cos x + 1}{b^2 - 2b\cos x + 1}$$

2.10 № 160

Найти: $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}\cos 2x+\ldots+(\frac{1}{2})^n\cos nx)=?$

В угоду размера пдф и моего сна, полного решения **не будет**. Но будут рукомахания и ответ. Давайте возьмем получившийся в прошлом задании ответ, подставим и найдем предел. Ответ: $\dfrac{2(2-\cos x)}{(5-4\cos x)}$

2.11 № 161

Дано: $\sin\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1}{2n}$

Доказать: $\cos\dfrac{\theta}{2} + \cos\dfrac{3\theta}{2} + \ldots + \cos\dfrac{(2n-1)\theta}{2} = n\sin n\theta$

Пусть $a = \cos\dfrac{\theta}{2} + i\sin\dfrac{\theta}{2}$.

Тогда посмотрим на $a + a^3 + \ldots + a^{2n-1}$, воспользуюсь задачей 159 и временно заменю $a^2 = t$

$a + a^3 + \ldots + a^{2n-1} = \overline{a}\cdot(t + \ldots + t^n)$

Воспользуюсь выкладками из задачи 157:

$$\overline{a}\cdot(t + \ldots + t^n) = \overline{a}\cdot\left(\frac{\sin\dfrac{n\theta}{2}\cdot\cos\dfrac{(n+1)\theta}{2} + i\sin\dfrac{n\theta}{2}\cdot\sin\dfrac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}}\right)$$

Теперь представим $\overline{a} = \cos\frac{\theta}{2} - i\sin\frac{\theta}{2}$ и возьму Re часть, так как изначально нам нужна была сумма косиносов. Получу (пропущены некоторые выкладки, тк я устану их печатать в latex):

$\dfrac{\sin\dfrac{n\theta}{2}\cdot\cos\dfrac{n\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}}$, что уже и есть то, что нам надо доказать (подставим то, что дано и соберем удвоенный угол)

2.12 № 162

Доказать, что если $b < 1$, то ряды сходятся:

a) $\cos a + b\cos(a + x) + b^2\cos(a + 2x) + \ldots$

b) $\sin a + b\sin(a + x) + b^2\sin(a + 2x) + \ldots$

В угоду размера пдф и моего сна, полного решения **не будет**. Но зато будет рукомахание. ЗАМЕТИМ, что это по факту то, что и было в номере 159, но добавилось a. А давайте мы теперь будем смотреть комплексную сумму из решения номер 159, но умноженное на какое-то комплексное число с углом a. Но, заметим, что так мы не посчитаем лишнее из-за прикольных свойст умножения комплексных чисел (если я не ошибаюсь). Поэтому нам надо будет просто взять Re или Im часть получившегося числа. (такая же идея будет рассмотрена в следующей задаче)

2.13 № 163

Найти:

a) $\cos x + C_n^1 \cos 2x + C_n^2 + \ldots + C_n^n \cos(n+1)x$

b) $\sin x + C_n^1 \sin 2x + C_n^2 + \ldots + C_n^n \sin(n+1)x$

Давайте возьмем комплексное числа $a = \cos x + i \sin x$

Разложим по Биному $(1+a)^n$:

$(1+a)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^k$. Давайте домножим обе части на а. Получу:

$(1+a)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^{k+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \cos{(k+1)} + i \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \sin{(k+1)}$

Заметим. что Re часть от правой части уравнения - искомое под пунктом a, а Im - искомое под пунктом b. Так что посмотрим, чему равно $(1+a)^n \cdot a$.

$1 + \cos x = 2 \cdot \cos^2(\frac{x}{2})$ - по косинусу двойного угла

$sinx = 2 \cdot \cos(\frac{x}{2}) \cdot \sin(\frac{x}{2})$ - по синусу двойного угла

Получу:

$1 + \cos x + \sin x = 2 \cos \frac{x}{2} \cdot (\cos \frac{x}{2} + i \sin \frac{x}{2})$

Возведу в степень n и получу:

$2^n \cdot \cos^n(\frac{x}{2}) \cdot (\cos \frac{nx}{2} + i \sin \frac{nx}{2})$

Осталось только умножить это на а и получу то, что ищу:

$\cos x + C_n^1 \cos 2x + C_n^2 + \ldots + C_n^n \cos(n+1)x = 2^n \cdot \cos^n \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{(n+2)x}{2}$

$\sin x + C_n^1 \sin 2x + C_n^2 + \ldots + C_n^n \sin(n+1)x = 2^n \cdot \cos^n \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{(n+2)x}{2}$

2.14 № 164

Найти: $\sin^2 x + \sin^2 3x + \ldots \sin^2(2n-1)x$

В угоду размера пдф и моего сна, полного решения **не будет**. Но зато будет рукомахание. $sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{cos 2x}{2}$. Воспользуемся этим и останется задача, похожая на 161. Сделаем то же самое, что и там, и получим искомое.

Ответ: $\dfrac{n}{2} - \dfrac{\sin 4nx}{4\sin 2x}$

2.15 № 165

Доказать:

a)$\sin^2 x + \sin^2 2x + \ldots \sin^2 nx = \dfrac{n}{2} - \dfrac{\cos(n+1)x \sin nx}{2\sin x}$

b)$\cos^2 x + \cos^2 2x + \ldots \cos^2 nx = \dfrac{n}{2} + \dfrac{\cos(n+1)x \sin nx}{2\sin x}$

Пункт a решается аналогично задаче 164. Чтобы решить пункт b, заметим, что сумма двух левых частей должны дать n. Значит и сумма правых даст n.все

2.16 № 166

Найти:

a) $\cos x + 2\cos 2x + 3\cos 3x + \ldots n\cos nx = ?$

b) $\sin x + 2\sin 2x + 3\sin 3x + \ldots n\sin nx = ?$

Давайте делать все как обычно:

Пусть $a = cosx + isinx$

Заметим, что $\operatorname{Re}\sum\limits_{k=1}^{n} ke^{ixk}$ это ответ из пункта a, а $\operatorname{Im}\sum\limits_{k=1}^{n} ke^{ixk}$ это ответ для пункта b.

Заметим, что $\sum\limits_{k=1}^{n} ke^{ixk}$ это производная $\sum\limits_{k=1}^{n} e^{ixk}$. Формулу для $\sum\limits_{k=1}^{n} e^{ixk}$ мы считать умеем(см номер 157). Вроде как производные учат считать на матане, и поэтому в угоду размера пдф и моего сна, полного решения **не будет**.

3 Разбор задач с Кр. Объяснение основного принципа решения сумм.

3.1 Обычные суммы. Метод геом прогрессии

Начнем с самых простых сумм.

$\sum\limits_{k=1}^{n} \sin kx$. Нам нужно посчитать чему это равно.

Давайте возьмем $a = \cos x + i \sin x$. Тогда Посмотрим на сумму

$\sum\limits_{k=1}^{n} a^k = \sum\limits_{k=1}^{n} \cos kx + i \sin kx = \sum\limits_{k=1}^{n} \cos kx + i \sum\limits_{k=1}^{n} \sin kx$

То есть сумма которая от нас требуется это всего лишь Im часть от этой суммы. Основной концепт задач, когда мы не видем в сумме С-шек или k-шек — разложить в сумму комплексных чисел. Давайте посмотрим, чему равна наша сумма:

$\sum\limits_{k=1}^{n} a^k = a + a^2 + a^3 + \ldots + a^k$ — геом прогресссия!!!

А такие мы умеем собирать по формуле геом прогрессии. Например так:

$a + a^2 + a^3 + \ldots + a^k = a(1 + a + a^2 + \ldots + a^{k-1}) = a \cdot \dfrac{a^k - 1}{a - 1}$

Когда мы встречаем комплексное число -1 — выносим корень.

$a - 1 = a^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}})$. Если представить наше в другой форме, то заметно, что $a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}ix} - e^{-\frac{1}{2}ix} = 2i \sin \frac{1}{2}x$. Заменим

$a^{\frac{1}{2}} \cdot \dfrac{a^k - 1}{2i \sin \frac{1}{2}x}$. Сделаем знаменатель рациональным.

$$a^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{ia^k - i}{-2 \sin \frac{1}{2}x} = \frac{(\cos \frac{1}{2}x + \sin \frac{1}{2}i)(i(\cos kx + i \sin kx) - i)}{-2 \sin \frac{1}{2}x} =$$

$$= \frac{(\cos \frac{1}{2}x + \sin \frac{1}{2}i)(i \cos kx - i \sin kx - i)}{-2 \sin \frac{1}{2}x}.$$

Дальше, тк знаменатель рациональный, то, Im часть от дроби - Im часть от произведения в числителе(перемножьте 2 скобки и возьмите Im) и поделить на знаменатель. Так мы и находим ответ.

Теперь понятно как считать сумму косинусов такую:

$\sum\limits_{k=1}^{n} \cos kx$ — Re часть от того, что насчитано сверху

При этом не пугайтесь других чисел в такой сумме:

$\sum\limits_{k=1}^{n} \cos 2kx$. — Делается аналогично, просто шаг геом. прогрессии будет больше.

Также мы можем домножать на b^k. Например:

$\sum\limits_{k=1}^{n} b^k \cos kx$ — все что меняется - шаг геом. прогрессии

И это все может комбинироваться:

$\sum\limits_{k=1}^{n} 10^k \cos(k+1)x$ — решается геом. прогрессией

Ну очевидно мы можем их домножать на числа и т.п.

3.2 Бином Ньютона. Суммы, связанные с ним.

Посчитать сумму:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos kx$$

Пусть $a = \cos x + i \sin x$

Тогда заметим:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (\cos kx + i \sin kx) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos kx + i \sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin kx$$

Получем, что наш ответ - Re часть от этой суммы. Посчитаем чему она равна:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k$$

Когда мы видим С-шки - 100 проц надо разложить в бином Ньютона. Краткое напоминание

Бином:$(x+y)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}$. Давайте разложим нашу сумму по биному:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k = (1+a)^n.$$

$(1+a) = a^{\frac{1}{2}}(a^{-\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}})$. Если представить это в другом виде, то сразу станет очевидно, что это $2\cos\frac{1}{2}x$.

$$(1+a)^n = (a^{\frac{1}{2}}(2\cos\tfrac{1}{2}x))^n = a^{\frac{n}{2}} 2^n \cos^n \tfrac{1}{2}x = (\cos\tfrac{n}{2}x + i \sin\tfrac{n}{2}x) 2^n \cos^n \tfrac{1}{2}x$$

Наш ответ — Re часть от этого, то есть $\cos\frac{n}{2}x 2^n \cos^n \frac{1}{2}x$

Аналогично можем посчитать сумму синусов: $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \sin kx$ — Im часть от ответа.

Также можем считать домноженное на b^k:

$\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \cos kx \cdot b^k$. Бином будет такой: $(1+ba)^n$

Также можем считать такое:

$\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \cos(k+1)x$ — перед разложением в бином вынести за скобки одну из a-шек.

Также можем считать домноженное на b^{n-k}:

$\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \cos kx \cdot b^{n-k}$. Бином будет такой: $(b+a)^n$

И очевидно комбинация всего вышесказанного.

3.3 Производные. Суммы с k внутри.

$\sum\limits_{k=1}^{n} k \sin kx$. Вообще непонятно, что тут делать.

Но заметим, что $\sum\limits_{k=1}^{n} k \sin kx$, это производная:

$-\sum\limits_{k=1}^{n} \cos kx$. Мы уже умеем считать такую сумму(см. выше)

И получив ответ для той суммы, просто возьмем производную от ответа и победим.

Аналогично делаются все с умножением на b^k и например C_k^n. То есть при появлении внутри k, я смотрю для какой функции эта является производной, решаю для нее и беру производную.

3.4 Комбинация и степени.

$\sum\limits_{k=1}^{n} \sin^4 kx.$ — степень

В таком случае мы должны воспользоваться формулой:

$\sin^4 kx = (\frac{e^{kxi} - e^{-kxi}}{2i})^4 = \frac{(e^{kxi} - e^{-kxi})^4}{16} = \frac{e^{4kxi} - 4 \cdot e^{2kxi} + 6 - 4 \cdot e^{-2ki} + e^{-4kxi}}{16}.$
Приведя е-шки в нормальный вид, получим:

$\sin^4 kx = \frac{(2\cos 4kx - 8\cos 2kx + 6)}{16}$

И дальше подставим это в нашу сумму:

$\sum\limits_{k=1}^{n} \sin^4 kx = \frac{1}{16}(2\sum\limits_{k=1}^{n} \cos 4kx - 8\sum\limits_{k=1}^{n} \cos 2kx + \sum\limits_{k=1}^{n} 6)$

И решать уже три суммы. Очевидно, что каждая из них может модифицироваться всяикими домножениями и т.п

Задачи с кр - комбинация 4-ех вышесказанных методов. Всем удачи в подготовке :)

3.5 Задача 1в

$\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\cos^4(k+1)x$

Давайте разложим $\cos^4 x(k+1) = (\dfrac{e^{(k+1)ix}+e^{-(k+1)ix}}{2})^4 = \dfrac{(e^{(k+1)ix}+e^{-(k+1)ix})^4}{16} =$
$\frac{1}{16}(e^{4(k+1)ix}+4e^{2(k+1)ix}+6+4e^{-2(k+1)ix}+e^{-4(k+1)ix}) =$

$= \frac{1}{16}(\cos 4(k+1)x + 4\cos 2(k+1)x + 6 + 4\cos 2(k+1)x + \cos 4(k+1)x) =$

$= \frac{1}{16}(2\cos 4(k+1)x + 8\cos 2(k+1)x + 6)$

То есть нашу искомую сумму можно переписать как:

$\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\cos^4(k+1)x = \frac{1}{16}(2\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\cos 4(k+1)x + 8\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\cos 2(k+1)x + \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k 6)$

Начнем решать по очереди, **посчитаем:**

$\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\cos 4(k+1)x$

Пусть $a = i\sin x + \cos x$. Тогда

$\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k a^{4(k+1)} = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\cos 4(k+1)x + i\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\sin 4(k+1)x.$

То есть та сумма, которую мы ищем - Re часть от суммы $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k a^{4(k+1)}$

Посмотрим на эту сумму:

$\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k a^{4(k+1)} = a^4 - a^8 + \ldots + (-1)^n a^{4(n+1)} = a^4(1 - a^4 + a^8 - \ldots + (-1)^n a^{4n}) =$

$= a^4\dfrac{(-a^4)^{n+1}-1}{-a^4-1} = a^4\dfrac{(-a^4)^{n+1}-1}{-a^2(a^2+a^{-2})} = a^4\dfrac{(-a^4)^{n+1}-1}{-a^2(a^2+\overline{a}^2)} = a^4\dfrac{(-a^4)^{n+1}-1}{-a^2(2\cos 2x)} =$

$\dfrac{((-a^4)^{n+1}-1)\cdot(a^2)}{-(2\cos 2x)} = \dfrac{((-1)^{n+1}(\cos 4(n+1)x + i\sin 4(n+1)x) - 1)\cdot(\cos 2x + i\sin 2x)}{-(2\cos 2x)}$

Мне нужна Re часть от этого. Тк знаменатель рациональный, то я могу взять Re от числителя и поделить на знаменатель.

Re часть $= \dfrac{(-1)^{n+1}\cos 4(n+1)x\cos 2x - \cos 2x - (-1)^{n+1}\sin 4(n+1)x\sin 2x}{-2\cos 2x} =$

$= \dfrac{(-1)^{n+1}\cos(4(n+1)x+2x) - \cos 2x}{-2\cos 2x}$

(Тут можно еще разность косинусов написать ну и так хорошо выглядит)

То есть $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\cos 4(k+1)x = \dfrac{(-1)^{n+1}\cos(4(n+1)x+2x) - \cos 2x}{-2\cos 2x}$

Аналогичным образом решается и вторая. **Посчитаем:**

$\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\cos 2(k+1)x$

Пусть $a = i\sin x + \cos x$. Тогда

$\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k a^{2(k+1)} = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\cos 2(k+1)x + i\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\sin 2(k+1)x.$

То есть та сумма, которую мы ищем - Re часть от суммы $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k a^{2(k+1)}$

Посмотрим на эту сумму:

$\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k a^{2(k+1)} = a^2 - a^4 + \ldots + (-1)^n a^{2(n+1)} = a^2(1 - a^2 + a^4 - \ldots + (-1)^n a^{2n}) =$

$= a^2\dfrac{(-a^2)^{n+1}-1}{-a^2-1} = a^2\dfrac{(-a^2)^{n+1}-1}{-a(a+a^{-1})} = a^2\dfrac{(-a^2)^{n+1}-1}{-a(2\cos x)} =$

$\dfrac{((-a^2)^{n+1}-1)\cdot(a)}{-(2\cos x)} = \dfrac{((-1)^{n+1}(\cos 2(n+1)x + i\sin 2(n+1)x) - 1)\cdot(\cos x + i\sin x)}{-(2\cos x)}$

Мне нужна Re часть от этого. Тк знаменатель рациональный, то я могу взять Re от числителя и поделить на знаменатель.

Re часть $= \dfrac{(-1)^{n+1}\cos 2(n+1)x\cos x - \cos x - (-1)^{n+1}\sin 2(n+1)x\sin x}{-2\cos x} =$

$= \dfrac{(-1)^{n+1}\cos(2(n+1)x+x) - \cos x}{-2\cos x}$

То есть наша искомая сумма:

$\frac{1}{16}(2\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\cos 4(k+1)x + 8\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\cos 2(k+1)x + \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k 6) =$

$$\tfrac{1}{16}(2\frac{(-1)^{n+1}\cos(4(n+1)x+2x)-\cos 2x}{-2\cos 2x}+8\frac{(-1)^{n+1}\cos(2(n+1)x+x)-\cos x}{-2\cos x}+\sum_{k=0}^{n}(-1)^k 6)$$