Линейная алгебра

Чепелин Вячеслав

Содержание

1 Линейные формы. **3**
1.1 Практика 1. 3
1.1.1 Задача 1. 3
1.1.2 Задача 2. 3
1.1.3 Задача 3. 3
1.1.4 Задача 4. 4
1.2 Дз 1. 5
1.2.1 Задача 1. 5

2 Тензоры. **6**
2.1 Практика 1-2. 6
2.1.1 Задание 1. 6
2.1.2 Задание 2. 6
2.1.3 Задание 3. 7
2.1.4 Задание 4. 7
2.1.5 Задание 5. 7
2.1.6 Задание 6. 8
2.1.7 Задание 7. 8
2.2 Домашнее задание 2. 9
2.2.1 Задание 1. 9
2.2.2 Задание 2. 9
2.2.3 Задание 3. 10
2.2.4 Задание 4. 11
2.3 Практика 3. 12
2.3.1 Задача 1. 12
2.3.2 Задача 2. 12
2.3.3 Задача 3. 13
2.4 Домашнее задание 3. 14
2.4.1 Задание 1. 14
2.4.2 Задание 2. 14
2.4.3 Задание 3. 15

3 Евклидовы пространства. **16**
3.1 Практика 1. 16
3.1.1 Задача 1. 16

3.1.2 Задача 2. 16
3.1.3 Задача 3. 16
3.1.4 Задача 4. 17
3.1.5 Задача 5. 17
3.2 Домашнее задание 1. 19
3.2.1 Задача № 1367. 19
3.2.2 Задача № 1371 19
3.2.3 Задача № 1374(a) 20
3.2.4 Задача № 1377 20
3.3 Практика 2. 21
3.3.1 Задание 1. 21
3.3.2 Задание 2. 21

4 Операторы евклидовых пространств. 22
4.1 Практика 1. 22
4.1.1 Задание 1. 22
4.1.2 Задание 2. 22
4.1.3 Задание 3. 23
4.2 Домашнее задание 1. 24
4.2.1 Задание 1. 24
4.2.2 Задание 2. 24

5 Информация о курсе 26

1 Линейные формы.

1.1 Практика 1.

1.1.1 Задача 1.

V_3 — пространство геометрических векторов. Отображение $f : V_3 \to \mathbb{R}$ определено равенством $\forall \overline{x} \in V_3, f(\overline{x}) = (\overline{x}, \overline{a})$, где $\overline{a} = \overline{i} + 2\overline{j} - 3\overline{k}$.

1. Доказать, что $f \in V_3^*$
2. найти коэффициенты f относительно стандартного базиса пространства V_3.

Решение:

Ну давайте, докажем, что это линейная форма.

$$\forall x_1, x_2 \in V_3, \lambda \in R : f(x_1 + \lambda x_2) = (x_1 + \lambda x_2, a) = (x_1, a) + \lambda(x_2, a) = f(x_1) + \lambda f(x_2)$$

Откуда линейная форма.

Теперь найдем коэффициенты f относительного стандартного базиса. Для этого мы должны применить функцию. К базисным векторам:

$f(e_1) = 1, f(e_2) = 2, f(e_3) = -3$, то есть $a_f = (1, 2, -3)$ — в стандартном базисе

1.1.2 Задача 2.

P_n - пространство многочленов степени не выше n. Отображение $f : P_n \to \mathbb{R}$ определено равенством $\forall p \in P_n : f(p) = p(t_0)$, где t_0 - фиксированное константа из $\mathbb{R}$.

1. Доказать, что $f \in P_n^*$
2. Найти коэффициенты f относительно канонического базиса пространства P_n
3. Найти коэффициенты f относительно базиса $1, (t - t_0)$ и так далее.

Решение:

Показать, что это линейная форма крайне тривиально. Подставляя канонический базис мы получим $a_f = (1, t_0, \dots, t^n)$, подставляя сдвинутый базис получим $a_f = (1, 0, 0, 0, \dots, 0)$

1.1.3 Задача 3.

e_1, e_2, e_3 - базис линейного пространства V. $\forall x = x^i e_i \in V : f(x) = x^1 + 2x^2 + 3x^3$. Найти выражение для f в базисе $e_1' = e_1 + e_2, e_2' = e_2 + e_3, e_3' = e_3 + e_1$.

Решение:

Тут можно поступать разными образами. Можно просто подставить в функцию новые базисы и найти их значения. Можно найти обратную матрицу перехода и по ней получить новые значения. В общем тривиально, думать не хочу.

1.1.4 Задача 4.

P_2 - пространство многочленов степени не выше 2.

1. линейная форма δ сопоставляет каждому многочлену его свободный член. Разложить δ в комбинацию линейных форм f^1, f^2, f^3, где f^j определены равенством $\forall p \in P_2, f^j(p) = p(j)$
2. Для базиса f^1, f^2, f^3 построить сопряженный к нему и с помощью найти координаты δ в базисе f^1, f^2, f^3.

Решение:

Найдем каждую f в базисе e_1, e_2, e_3. Для этого мы должны подставить в f-ки наши базисные вектора. Получим:

$a_{f^1} = (1, 1, 1); a_{f^2} = (1, 2, 4); a_{f^3} = (1, 3, 9)$. Получили вот такую штучку. Теперь надо с помощью них собрать $a_\delta = (1, 0, 0)$. Для этого можно решить уравнение но я бы перешел дальше.

$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$. Тогда найдем $T = S^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2,5 & 4 & -1,5 \\ 0,5 & -1 & 0,5 \end{pmatrix}$. Теперь, чтобы найти координаты в базисе f мы должны:

$$a' = aT = (1, 0, 0) \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2,5 & 4 & -1,5 \\ 0,5 & -1 & 0,5 \end{pmatrix} = (3, -3, 1)$$

Все верно!!!

1.2 Дз 1.

1.2.1 Задача 1.

На пространстве P_2 — многочленов степени не выше второй заданы две системы линейных форм f^i и g^j:

$$\forall p \in P_2 : f^i(p) = p(i), i = 1, 2, 3$$

$$\forall p \in P_2 : g^j = p^{(j-1)}(2), j = 1, 2, 3$$

1. Проверить, что каждая из систем является базисом в пространстве $(P_2)^*$
2. Построить сопряженные базисы к каждой из систем
3. Найти матрицы S и T
4. Написать ковариантный и контрвариантный законы преобразования координат

Решение:

Сперва распишем все в сопряженным к базису e_1, e_2, e_3. Для этого подставим в f^i, g^j e_1, e_2, e_3.

$a_{f^1} = (1, 1, 1), a_{f^2} = (1, 2, 4), a_{f^3} = (1, 3, 9)$

$a_{g^1} = (1, 2, 4), a_{g^2} = (0, 1, 4), a_{g^3} = (0, 0, 2)$

В принципе видно, что ранги системы векторов равны 3 в обоих случаях, откуда базисы в $(P_2)^*$

Теперь напишем $S_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}, S_g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, T_f = S_f^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2,5 & 4 & -1,5 \\ 0,5 & -1 & 0,5 \end{pmatrix}, T_g = S_g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}$

Теперь напишем ковариантный и контрвариантный законы координат:

$x' = Sx$ - контрвариатное. $a' = aT$ - ковариантное.

2 Тензоры.

2.1 Практика 1-2.

2.1.1 Задание 1.

1. Отображение $f\colon \mathbb{R}^3 \times (\mathbb{R}^3)^* \to \mathbb{R}$ определено равенством $\forall\, x \in \mathbb{R}^3$, $\forall\, y \in (\mathbb{R}^3)^*$
1) $f(x,y) = 3x^1y_2 - x^2y_2 + 2x^2y_3 - 4x^3y_1 - 2x^3y_2$;
2) $f(x,y) = 3x^1y_2 - x^2y_2 + 2x^2y_3 - 4x^3(y_1)^2 - 2x^3y_2$;
3) $f(x,y) = 3x^1y_2 - x^2y_2 + 2x^2y_3 + 3 - 4x^3y_1 - 2x^3y_2$.
Является ли отображение f тензором? Если да, то какого типа и какова матрица тензора?
4) Фиксируем $e_1, \cdots, e_n$ базис пространства V.
$\forall f \in V^*\ \forall\, x = \mathrm{x}^i e_i\ \in V\ \ f(x) = \mathrm{x}^i a_i$.
Отображение $g\colon V^* \to \mathbb{R}$ определено равенством $\forall\, f \in V^*\ g(f) = a_1 + a_2 + \cdots a_n$.
Является ли отображение g тензором? Если да, то какого типа и какова матрица тензора?

(Мне стало лень перепечатывать)

Решение:

Так ну давайте быстренько

1. Да. $f \in T(3,3)$. Матрица тензора находится подстановкой базисных векторов, сами посчитаете, дорогие читатели.
2. Нет, тк есть $(y_1)^2$ и ломается линейность.
3. Нет, тк есть 3 и ломается линейность.
4. Нет, тк мы изначально фиксируем базис для работы этой функции!!!

2.1.2 Задание 2.

$\dim V = 3, D$ - 3-форма на пространстве V такая, что $D(e_1, e_2, e_3) = 1$, где e_1, e_2, e_3 - базис пространства V.

1. Определить тип тензора D и составить его матрицу
2. Записать матрицу любой другой три формы на пространстве V
3. выписать формулу для значения D на наборе векторов a, b, c пространства V

Решение:

$D \in T(3,0)$. Ну начнем с того, что у нас D - форма антисимметрична, то есть значения при совпадающих индексах i, j, k будут нулями. Зная это составим матрицу и получим:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Если мы хотим получить любую такую матрицу, то нам надо будет лишь подставить α - значение на базисных векторах:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Выписать формулу тривиально, тк это будет просто определитель матрицы.

2.1.3 Задание 3.

Записать формулу замены координат для тензора ранга 2 в матричном виде.

Решение:

У нас есть три случая:

1. $\alpha^{ij} \in T(0,2)$.
$$\alpha'^{kl} = \alpha^{ij} s_i^k s_j^l = (S\alpha S^T)_l^k$$

2. $\alpha_j^i \in T(1,1)$.
$$a_l'^k = \alpha_j^i t_l^j s_i^k = (\alpha_j^i t_l^j) s_i^k = (\alpha T)_l^i s_i^k = (S\alpha T)_l^k$$

3. $\alpha_{ij} \in T(2,0)$.
$$\alpha'_{kl} = \alpha_{ij} t_k^i t_l^j = (T^T \alpha T)_l^k$$

2.1.4 Задание 4.

Тензор $\alpha \in T(2,1)$ задан матрицей своих координат

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Вычислить элемент матрицы тензора α'^2_{13} в новом базисе $e'_1 = e_1, e'_2 = e_3, e'_3 = e_2$.

Решение:

Ну тут все легко, ведь просто поменяли местами 2 вектора. То есть на самом деле $\alpha'^2_{13} = \alpha^3_{12} = 6$

2.1.5 Задание 5.

Найти тип и матрицу тензора $\gamma = \alpha \otimes \beta$ и $\overline{\gamma} = \beta \otimes \alpha$, где α и β заданы соответственно своими матрицами.

1. $\alpha \in T(0,1), \alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta \in T(2,0), \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

2. $\alpha \in T(0,1), \alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta \in T(1,1), \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Решение:

Решим сначала первый случай. Заметим, что в данном случае $\gamma = \overline{\gamma}$. И будем делать все по формуле:

$$\gamma^i_{jk} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 4 & 7 & 2 & 5 & 8 & 3 & 6 & 9 \\ -1 & -4 & -7 & -2 & -5 & -8 & -3 & -6 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Теперь второй пункт:

$$\gamma^{ij}_k = \alpha^i \cdot \beta^j_k = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 4 & 7 & 2 & 5 & 8 & 3 & 6 & 9 \\ -1 & -4 & -7 & -2 & -5 & -8 & -3 & -6 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overline{\gamma}^{ij}_k = \beta^i_k \cdot \alpha^j = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 2 & -2 & 0 & 3 & -3 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 5 & -5 & 0 & 6 & -6 & 0 \\ 7 & -7 & 0 & 8 & -8 & 0 & 9 & -9 & 0 \end{array}\right)$$

2.1.6 Задание 6.

6. $\dim V = 3$. Найти значение тензора $\gamma = \alpha \otimes \beta$ на наборе векторов $\xi_1 = 2e_1 - e_2$, $\xi_2 = e_1 + 2e_2 - e_3$, $\xi_3 = e_2 + e_3$ и $\eta^1 = 3\omega^1 - 2\omega^2 + \omega^3$, $\eta^2 = \omega^2 + 2\omega^3$, если $\alpha = 2\omega^2 \otimes e_2 + (\omega^1 + 3\omega^2) \otimes (e_1 - 2e_2 + 3e_3)$, а все координаты тензора β в стандартном базисе пространства $\mathrm{T}_{(2,1)}$ равны 2.

Решение:

Для этого, я должен раскидать ξ, η между a, b. $a \in T(1,1)$, $b \in T(2,1)$. Жестко раскидываем векторочки по функциональному свойству и выиграли.

2.1.7 Задание 7.

$\alpha \in T(1,1), x \in T(0,1), \gamma = \alpha \otimes x$

Написать две возможные свертки.

Решение:

просто в тупую

2.2 Домашнее задание 2.

2.2.1 Задание 1.

1. $\alpha = (e_1 - e_2 - e_3)\otimes(-2e_2 + e_3)\otimes 2e_2 - e_3\otimes(-e_1 + e_2 + 2e_3)\otimes e_1$
а) найти матрицу тензора β, полученного из тензора α транспонированием по правилу $\beta^{ijk} = \alpha^{kji}$,
б) найти $\beta(\eta^1, \eta^2, \eta^3)$, если $\eta^1 = \omega^1 + \omega^2 + \omega^3$, $\eta^2 = 2\omega^1 - \omega^2 - \omega^3$, $\eta^3 = 3\omega^1 - \omega^2 + \omega^3$; решить задачу двумя способами, используя перестановку аргументов тензора α и перестановку функций в сумме тензорных произведений, определяющих тензор α.

Решение:

а) Давайте найдем нашу σ. Она равна (321). То есть, у нас такое транспонирование. Давайте тогда сначала надйем матрицу $\alpha \in T(0,3)$. Если я не дурачок и умею считать, то получается

$$\alpha = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 4 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Теперь транспонируем, у нас зафиксирован столбец:

$$\beta = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & 2 & 0 & 4 & -2 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Все верно!

b) Найдем $\beta(\eta^1, \eta^2, \eta^3) = \beta(w^1 + w^2 + w^3, 2w^1 - w^2 - w^3, 3w^1 - w^2 + w^3)$ Раскладываем эту штуку по линейности и получаем ответ. Но мне куда более нравится:

$$\beta(\eta^1, \eta^2, \eta^3) = \alpha(\eta^3, \eta^2, \eta^1)$$

Дальше мы просто подставляем в искомую и получаем $3 \cdot 1 \cdot 2 - (1 \cdot -5 \cdot 1) = 11$

2.2.2 Задание 2.

2.Тензор $\alpha \in T_{(0,3)}$ задан матрицей. Выяснить, является ли тензор симметричным (антисимметричным), и если да, то по каким индексам:

$$\alpha = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ответ: тензор кососимметричен по 1 и 3-му индексам.

Я не знаю как это нормально делать, на глаз?

2.2.3 Задание 3.

3.Тензор $\alpha \in \mathrm{T}_{(2,2)}$ задан матрицей.

$$\alpha = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 6 & 5 & 2 \\ 9 & 2 & 1 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

Найти матрицы тензоров $\alpha^{(ij)}_{kl}$, $\alpha^{(ij)}_{(kl)}$, $\alpha^{ij}_{(kl)}$, $\alpha^{[ij]}_{kl}$, $\alpha^{ij}_{[kl]}$, $\alpha^{[ij]}_{[kl]}$, $\alpha^{(ij)}_{[kl]}$, $\alpha^{[ij]}_{(kl)}$.

Решение:

Симметрирование - круглые скобки. Альтернирование - квадратные

1) $\alpha^{(ij)}_{kl} = \begin{pmatrix} 3 & 15/2 & 5 & 3/2 \\ 15/2 & 2 & 3/2 & 4 \\ 1 & 1/2 & 2 & 7/2 \\ 1/2 & 1 & 7/2 & 1 \end{pmatrix}$

В данном случае слой и сечение зафиксированы, так что чилл море песок, нам всего лишь надо просимметрировать квадратные матрички.

2) В данном случае порядок симметрирования не имеет значения.

$\alpha^{(ij)}_{(kl)} = \begin{pmatrix} 3 & 15/2 & 3 & 1 \\ 15/2 & 2 & 1 & 5/2 \\ 3 & 1 & 2 & 7/2 \\ 1 & 5/2 & 7/2 & 1 \end{pmatrix}$

3) $\alpha^{ij}_{(kl)} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & 3/2 \\ 9 & 2 & 1/2 & 5/2 \\ 3 & 3/2 & 2 & 3 \\ 1/2 & 5/2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

4) $\alpha^{[ij]}_{kl} = \begin{pmatrix} 0 & -3/2 & 0 & 1/2 \\ 3/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

В данном примере у нас происходит альтернирование в каждой части

5) $\alpha^{ij}_{[kl]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 3/2 \\ -2 & -1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & -3/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

6) $\alpha^{[ij]}_{[kl]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$7)\alpha^{(ij)}_{[kl]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 3/2 \\ -2 & -1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & -3/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$8)\ \alpha^{[ij]}_{(kl)} = \begin{pmatrix} 0 & -3/2 & 0 & 1/2 \\ 3/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

2.2.4 Задание 4.

4*. Тензор $\alpha \in \mathrm{T}_{(1,1)}$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Вычислить α^i_i, $\alpha^i_{[i}\alpha^j_{j]}$, $\alpha^i_{[i}\alpha^j_j\alpha^k_{k]}$.

Замечание: $\beta = \alpha \otimes \alpha$; $\beta^{ij}_{km} = \alpha^i_k \alpha^j_m$; $\alpha^i_{[k}\alpha^j_{m]} = \beta^{ij}_{[km]}$; аналогично $\alpha^i_{[i}\alpha^j_j\alpha^k_{k]}$.

Ответ: $\alpha^i_i = \mathrm{tr}A = 5$; $\alpha^i_{[i}\alpha^j_{j]} = M^{12}_{12} + M^{13}_{13} + M^{23}_{23} = 5$; $\alpha^i_{[i}\alpha^j_j\alpha^k_{k]} = \det A = 6$.

Решение.

Ну в первом случае это просто след матрицы.

$\beta^{ij}_{kl} = \alpha^i_k \otimes \alpha^j_k$

Заметим, что альтернируя по нижним индексам, мы получим, что на совпадающих i, j стоят нули, откуда нам надо сложить только челиков, на несовпадающих. При этом не забыв про альтернировать. Откуда уже вроде получается нужное

2.3 Практика 3.

2.3.1 Задача 1.

$f^1 = w^2 + 2w^3 + 2w^4, f^2 = w^1 + w^2 + 3w^4, f^3 = w^1 + w^3 + w^4$ - 1 формы. $\xi_1 = e_1 - e_3 + e_4, \xi_2 = -e_1 + e_2 + e_3 + e_4, \xi_3 = 2e_1 + e_2 + e_3$, $\dim V = 4$

Найти

1. внешнее произведение $f = f^1 \wedge f^2 \wedge f^3$
2. значение $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$

Решение:

Выпишем наши функции в стандартном базисе $f^1 = (0, 1, 2, 2)$, $f^2 = (1, 1, 0, 3)$, $f^3 = (1, 0, 1, 1)$.

Аналогично выпишем $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

1) $f = f^1 \wedge f^2 \wedge f^3 = 3!\text{Alt}\ (f^1 \otimes f^2 \otimes f^3)$. Если вы очень хотите, то можете посчитать. Я таким заниматься не буду.

$$f = f^1 \wedge f^2 \wedge f^3 = \sum_{j_1 < j_2 < j_3} \begin{vmatrix} a^1_{j_1} & a^1_{j_2} & a^1_{j_3} \\ a^2_{j_1} & a^2_{j_2} & a^2_{j_3} \\ a^3_{j_1} & a^3_{j_2} & a^3_{j_3} \end{vmatrix} w^{j_1} \wedge w^{j_2} \wedge w^{j_3}$$

Такое уже считать гораздо легче, это $\beta = (-3, 0, 6, -3) = (\beta_{123}, \beta_{124}, \beta_{134}, \beta_{234})$. Мы нашли нашу функцию в базисе p-форм. В принципе понятно, как ее перевести в базис тензоров.

Также можно было просто в тупую раскрыть:

$$f^1 \wedge f^2 \wedge f^3 = (w^2 + 2w^3 + 2w^4) \wedge (w^1 + w^2 + 3w^4) \wedge (w^1 + w^3 + w^4)$$

И разложить данную штуку по диструбитивности. Я этим заниматься не буду в экономии своего времени, но как вариант так тоже можно.

2) $f^1 \wedge f^2 \wedge f^3(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \det \begin{pmatrix} f^1(\xi_1) & f^1(\xi_2) & f^1(\xi_3) \\ f^2(\xi_1) & f^2(\xi_2) & f^2(\xi_3) \\ f^3(\xi_1) & f^3(\xi_2) & f^3(\xi_3) \end{pmatrix}$

Или можно например использовать формулу:

$$f^1 \wedge f^2 \wedge f^3(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{j_1 < j_2 < j_3} \begin{vmatrix} a^1_{j_1} & a^1_{j_2} & a^1_{j_3} \\ a^2_{j_1} & a^2_{j_2} & a^2_{j_3} \\ a^3_{j_1} & a^3_{j_2} & a^3_{j_3} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi^{j_1}_1 & \xi^{j_1}_2 & \xi^{j_1}_3 \\ \xi^{j_2}_1 & \xi^{j_2}_2 & \xi^{j_2}_3 \\ \xi^{j_3}_1 & \xi^{j_3}_2 & \xi^{j_3}_3 \end{vmatrix}$$

Ответом будет -27.

2.3.2 Задача 2.

$f = w^1 + w^2 + 2w^3, g = w^1 + 3w^2 + w^3, h = w^1 + w^3$ - 1 формы. $\dim V = 3$. Найти внешнее произведение:

Решение:

Конечно, мы можем пользоваться решениями из прошлых пунктов но это крайне скучно, поэтому мы воспользуемся одним примером, что тк у нас 3-форма и $\dim V = 3$, то будет выполнено:

$$f \wedge g \wedge h = \beta_{123} w^1 \wedge w^2 \wedge w^3 = \det \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix} = -3$$

2.3.3 Задача 3.

$\dim V = 4, f \in \Lambda^2 V, f = w^1 \wedge w^2 + w^1 \wedge w^3 + w^1 \wedge w^4 + w^2 \wedge w^3 + w^3 \wedge w^4$. Найти представления в базисах пространства V(тензоров) и p-форм.

Решение:

Решение здесь будет крайне тривиальным. Найдем сначала представление в базисе p-форм. Мы получим, что у нас оно $\beta = (1, 1, 1, 1, 0, 1)$. И теперь восстановим нашу матрицу в пространстве тензоров:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2.4 Домашнее задание 3.

2.4.1 Задание 1.

Тензор $f \in T(2,0)$ задан матрицей своих компонент F, а g - 1 форма, заданная строкой:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Найти внешнее произведение $f \wedge g$
2. выписать матрицу тензора $f \wedge g$ в базисе $T(3,0)$.
3. представить f в виде внешнего произведения линейных форм

Решение:

1) Заметим, что f, g - p-формы

Внешнее произведение $f \wedge g = \frac{3!}{1! \cdot 2!} \text{Alt } (f \otimes g)$

Найдем $f \otimes g = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 6 & 12 & 0 & -3 & 6 & 0 & -3 & 6 \\ 6 & 0 & -12 & 3 & 0 & -6 & 3 & 0 & -6 \\ -12 & 12 & 0 & -6 & 6 & 0 & -6 & 6 & 0 \end{array}\right)$

Проальтернируем и получим

$$\text{Alt } (f \otimes g) = -21 \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$f \wedge g = \beta_{123} w^1 \wedge w^2 \wedge w^3 = -21 w^1 \wedge w^2 \wedge w^3$$

2) Уже написано выше

3) Как это делать нормально я не знаю. Можно решать уравнения, можно еще что-нибудь:

$$f = -w^1 \wedge w^2 + 2w^1 \wedge w^2 - 2w^2 \wedge w^3$$

$$f^1 = \beta_1 w^1 + \beta_2 w^2 + \beta_3 w^3; f^2 = \alpha_1 w^1 + \alpha_2 w^2 + \alpha_3 w^3$$

$$f^1 \wedge f^2 = (\beta_1 w^1 + \beta_2 w^2 + \beta_3 w^3) \wedge (\alpha_1 w^1 + \alpha_2 w^2 + \alpha_3 w^3)$$

Раскрывайте и решайте уравнение с 6 переменными.

Получите $f = (w^1 + w^2 - 4w^3) \wedge (-w^1 - 2w^2 + 6w^3)$

2.4.2 Задание 2.

Найти существенные координаты внешнего произведение трех векторов:

$$f^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, f^2 = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, f^3 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение:

Делаем это крайне в тупую по формуле через определитель(как делали в практике в номере один под пунктом 1) и получаем:

$f^1 \wedge f^2 \wedge f^3 = (-12, -12, -18, 0, 18, 18, 0, 24, 24, 0)$

2.4.3 Задание 3.

Найти значение 2-формы, заданной своими сущ. координатами $f = \begin{pmatrix}-2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$ на векторах $x = (-1, 1, 1, 0)^T, y = (-2, 1, 1, 2)^T$.

Решение:

Воспользуемся формулой из следствия теоремы 1.

3 Евклидовы пространства.

3.1 Практика 1.

3.1.1 Задача 1.

Проверить, что векторы следующих систем попарно ортогональны, и дополнить их до ортогональных базисов. $a = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Решение.

Так как у нас базовое обычно скалярное произведение, то проверить, что $(a, b) = 0$ тривиально. Проверив, мы получим, что это и правда так.

Давайте дополним до ортогональных базисов. Сперва дополним до базиса и получим:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Теперь воспользуемся Грама-Шмидтом и получим ответ.

3.1.2 Задача 2.

Найти базис ортогонального дополнения L^* подпространства L, натянутого на векторы $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Решение:

Заметим, что ранг этой системы векторов 2, поэтому выделю базис a_1, a_3.

$L^\perp = \begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$, то есть множество X - множество которое будет выдавать 0 при обычном скалярном произведении с нашими векторами. Решим СЛОУ мы получим базис

3.1.3 Задача 3.

Найти ортогональную проекцию y и ортогональную составляющую z вектора x. $x = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, L$ натянуто на $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

Решение:

Ранг этой системы векторов 2. Возьму 1 и 3 вектор в качестве базиса. $R^4 = L \oplus L^{\perp} : \forall x \in R^4 :$ $x = y + z$

Заметим, что $y \in L : y = c_1 a_1 + c_2 a_3$. Поэтому должно быть выполнено:

$$\begin{cases} (x, a_1) = c_1(a_1, a_1) + c_2(a_3, a_1) + (z, a_1) \\ (x, a_3) = c_1(a_1, a_3) + c_2(a_3, a_3) + (z, a_3) \end{cases}$$

Заметим, что $L \perp z$, откуда скалярное равно нуля. Решаю простую СЛНУ для c_1, c_2 найдем y и победили.

3.1.4 Задача 4.

1. $\forall x, y \in V\ (x, y) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + 5x_2y_1 + 2x_2y_2 - 3x_2y_3 + 3x_2y_3$, где x_i, y_j – координаты векторов x, y в некотором базисе пространства V.
   а) запишите данную функцию в матричной форме;
   б) ответьте на вопросы:
   является ли данная функция билинейной формой?
   определяет ли данная функция скалярное произведение на пространстве V?

Решение:

Это не билинейная функция и не скалярное (так как на диагонали есть нули)

3.1.5 Задача 5.

2. $\forall x, y \in V\ (x, y) = 2x_1y_1 + 5x_2y_2 + 2x_3y_3 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 - x_1y_3 - x_3y_1 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2$, где x_i, y_j – координаты векторов x, y в некотором базисе e_1, e_2, e_3 пространства V.
   а) чему равно $(e_1, e_3) =$?
   б) запишите матрицу Грама;
   в) вычислите (x, y), если $x = 2e_1 - e_3$, $y = e_1 - e_2 + e_3$;
   г) ортогонализуйте систему векторов $a_1 = e_1 + e_3$, $a_2 = e_2 + e_3$, $a_3 = e_3$.

Решение:

$(e_1, e_3) = -1$. $G = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Заметим, что на диагонали числа больше 0, а также симметричная форма.

$$(x, y) = x^T G y = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 7$$

Чтобы ортогонализовать систему векторов надо не забыть, что у нас новое скалярное произведение, которое задается через матрицу Грама. А так обычный ГМШ.

3.2 Домашнее задание 1.

3.2.1 Задача № 1367.

Линейное подпространство L задано уравнениями :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Найти уравнение задающее $L^\perp$ и само $L^\perp$

Решение:

Давайте найдем L. Для этого решим соответствующую СЛОУ.

Получим $L = span(\begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$.

Теперь, чтобы задать $L^\perp$ я получаю такую СЛОУ(так как скалярное с $\forall x \in L^\perp$ должно быть нулем):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -6 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Решим и получим: $L^\perp = span(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix})$

Можно проверить, что наши вектора делают то, что надо, но это и так видно.

3.2.2 Задача № 1371

Найти ортогональную проекцию y и ортогональную составляющую z вектора x на линейное подпространство L.

$x = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, L натянуто на векторы $a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$

Решение:

Давайте выделим базис сначала. Ранг системы векторов равен 2, поэтому возьму за базис a_1, a_2. Повторяя, процесс описанный в практике, получаю СЛОУ:

$$\begin{cases} (x, a_1) = c_1(a_1, a_1) + c_2(a_2, a_1) \\ (x, a_2) = c_1(a_1, a_3) + c_2(a_3, a_3) \end{cases}$$

Решая это простое СЛНУ найдем решение и получим ответ.

3.2.3 Задача № 1374(a)

Найти расстояние от точки, заданной вектором x, до линейного многообразия, заданнного системой векторов.

$$\begin{cases} x = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 9 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 12 \end{cases}$$

Решение:

Из теории $dist(x, P) = ||z||$, где $y + z = x - x_0$. Давайте найдем линейное многообразие:

$$P = \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

А дальше мы уже проделывали аналогичные вещи в прошлой задаче, так что я пропущу это.

3.2.4 Задача № 1377

1377. Найти расстояние между двумя плоскостями $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}_1 t_1 + \boldsymbol{a}_2 t_2 + \boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}_3 t_1 + \boldsymbol{a}_4 t_2 + \boldsymbol{x}_2$, где

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_1 &= (1, 2, 2, 2), & \boldsymbol{a}_2 &= (2, -2, 1, 2), \\ \boldsymbol{a}_3 &= (2, 0, 2, 1), & \boldsymbol{a}_4 &= (1, -2, 0, -1); \\ \boldsymbol{x}_1 &= (4, 5, 3, 2), & \boldsymbol{x}_2 &= (1, -2, 1, -3). \end{aligned}$$

Это делается крайне легко, нужно лишь воспользоваться следствием, что

$dist(P_1, P_2) = ||z||$, где z ортогональная составляющая $x_1 - x_2$ относительно $L = L_1 + L_2$.

3.3 Практика 2.

3.3.1 Задание 1.

$e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ - базис, координаты векторов которого заданы относительно некоторого о.н.б. Найти взаимный базис.

Решение:

$\Gamma = E$, по формуле $e^* = e\Gamma_e^{-1}$. Как мы знаем по формуле:

$\Gamma_e = T^T \Gamma T = T^T T$. $\Gamma = \begin{pmatrix} 65 & 18 & 23 \\ 18 & 38 & 53 \\ 23 & 53 & 74 \end{pmatrix}$

Далее находим Γ^{-1} и по формуле находим взаимный базис.

3.3.2 Задание 2.

Тензор $\alpha \in T(2,0)$ задан матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ в евклидовом пространстве с ковариантным метрическим тензором $\Gamma = \begin{pmatrix} 21 & -10 & -4 \\ -10 & 5 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу тензора:

1. с поднятым 1-ым индексом
2. с поднятным 2-ым индесом.
3. с поднятыми двумя индексами

Решение:

Найдем контрвариантный тензор $\Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

$\beta = \alpha^i_j = \alpha_{æj} g^{æi} \Rightarrow \beta = \Gamma^{-1} A \in T(1,1)$

$\alpha^{j}_{i\cdot} = \alpha_{iæ} g^{æj} = A \cdot \Gamma^{-1}$

$\alpha^{ij} = \alpha_{km} g^{ki} g^{km} = (\Gamma^{-1} A \Gamma^{-1})$

Задача 3.

Прекрасное решение от ЕА есть в беседе

4 Операторы евклидовых пространств.

4.1 Практика 1.

4.1.1 Задание 1.

1. Скалярное произведение в пространстве V задано билинейной формой:
$\forall x, y \in V \ \ (x, y) = x_1y_1 + 5x_2y_2 + 6x_3y_3 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 + 3x_2y_3 + 3x_3y_2$,
где x_i, y_j – координаты векторов x, y в некотором базисе пространства V.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ – матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом же базисе.

Найти матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ в этом же базисе.

Решение:

Напишем матрицу Грама: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$. $A^{\circledast} = \overline{\Gamma^{-1}} A^* \overline{\Gamma} = \Gamma^{-1} A^T \Gamma$. Считаем и побеждаем.

4.1.2 Задание 2.

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ – матрица оператора $\mathcal{A}$ в базисе $v = (v_1, v_2, v_3)$, где

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Координаты векторов записаны в о.н.б.

Найти матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ в базисе v двумя способами.

Решение:

Можно решить двумя способами: $A_v^{\circledast} = T^{-1} A_e^{\circledast} T$, либо $A_v^{\circledast} = \Gamma_v^{-1} A_v^T \Gamma_v$

4.1.3 Задание 3.

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ – матрица оператора $\mathcal{A}$ в базисе с матрицей Грама

$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Проверить выполнение следующих свойств сопряженного оператора:
$(\mathrm{Ker}\mathcal{A})^{\perp} = \mathrm{Im}\mathcal{A}^{*}$, $(\mathrm{Im}\mathcal{A})^{\perp} = \mathrm{Ker}\mathcal{A}^{*}$.

не думаю, что тут стоит что-либо писать, так как это просто комбинация прошлых задач.

4.2 Домашнее задание 1.

4.2.1 Задание 1.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 2i & 1 \end{pmatrix}$ – матрица оператора $\mathcal{A}$ в базисе $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (координаты векторов e_1, e_2 заданы в о.н.б.)

Найти:

а) матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$;

б) характеристические многочлены $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$;

в) каким свойством обладают корни характеристических многочленов сопряженных линейных операторов?

г) для векторов $x = e_1 - ie_2$ и $y = -2e_1 + 2ie_2$ проверить выполнение равенства $(x, \mathcal{A}^* y) = (\mathcal{A}x, y)$.

Решение:

а) Сперва найдем матрицу Грама для наших базисных векторов $\Gamma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Чтобы найти матрицу сопряженного оператора воспользуемся формулой: $A^{\circledast} = \overline{\Gamma^{-1} A^T \Gamma} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -2i & 1 \end{pmatrix}$

б) Найдем характ многочлен A: $\chi_A(t) = (t-1)^2 - (-2) = t^2 - 2t + 3$. Пользуясь свойством 7, так как у нас корни парные(сопряженные), то у A^* такой же характ.

в) корни сопряжены

г) Пользуясь формулой скалярного произведения получаю: $-6 - 6i = -6 - 6i$ ура победа!

4.2.2 Задание 2.

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ – матрица оператора $\mathcal{A}$ в базисе с матрицей Грама

$\Gamma = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Найти:

а) матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$;

б) $(\mathrm{Ker}\mathcal{A})^\perp$, $(\mathrm{Im}\mathcal{A})^\perp$. Проверить, что $(\mathrm{Ker}\mathcal{A})^\perp = \mathrm{Im}\mathcal{A}^*$, $(\mathrm{Im}\mathcal{A})^\perp = \mathrm{Ker}\mathcal{A}^*$;

в) характеристические многочлены $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$. Сделать вывод о собственных числах сопряженных линейных операторов;

г) собственные подпространства операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$. Убедиться в ортогональности собственных подпространств, отвечающих различным собственным числам операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$.

Решение:

а) $A^{\circledast} = \Gamma^{-1}A^T\Gamma = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

б) Найдем $\mathcal{K}er A = span \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\operatorname{Im} A = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Я устал это делать, в типовике то же самое и я разобрался

5 Информация о курсе

Поток — y2024.
Группы M3138-M3139.
Преподаватель — Кучерук Екатерина Аркадьевна.

Это мои конспектики с практик. Может кому полезно будет :)