

Параметризация. Линейная Алгебра

Чепелин В.А.

Содержание

- 1 Введение.
- 2 Задачи про параметризацию. zi , $-z$, $-zi$, умножение на константу.
- 3 Параметризация $1/x$. Без явных уравнений параметризации.

1 Введение.

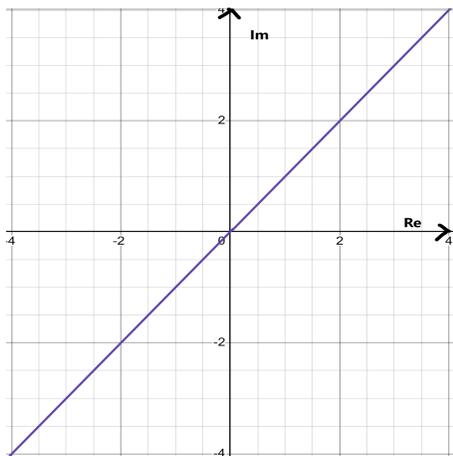
Здесь содержатся мое объяснение задачи 2б с Кр по лин. алу. Тут вы сможете понять что как решать. Списывать плохо!!! Всем счастья!



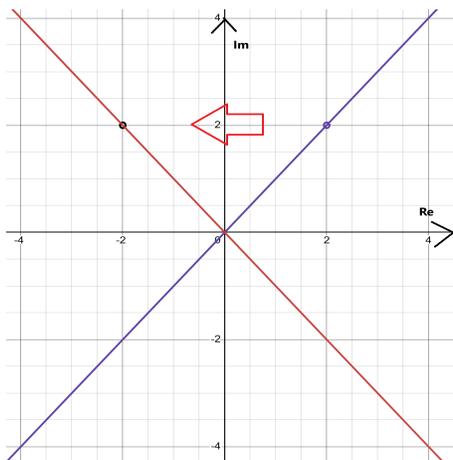
2 Задачи про параметризацию. zi , $-z$, $-zi$, умножение на константу.

Суть задачи параметризации в том, что вы должны перевести одну часть плоскости в другую. Начнем с каких-то базовых преобразований,

Например нам дано z , такое, что у него $x = y$:



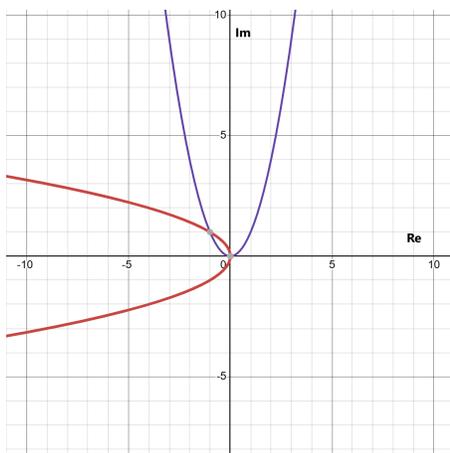
Хотим понять, куда перейдет на графике zi (что он будет задавать?). Давайте сначала посмотрим что происходит при умножении на i . Вот было комплексное число $x + yi$, стало $-y + xi$. В наших реалиях, так как $x = y$, то было $x + xi$ стало $-x + xi$. То есть x сменился на противоположный:



Но думать об умножении на i можно и с другой стороны: $e^{i\pi/2} = i$, а что у нас происходит при умножении комплексных чисел? Радиусы умножаются, а углы складываются. То есть если у нас была прямая, то график домноженный на i - повернутая на 90 градусов влево прямая.

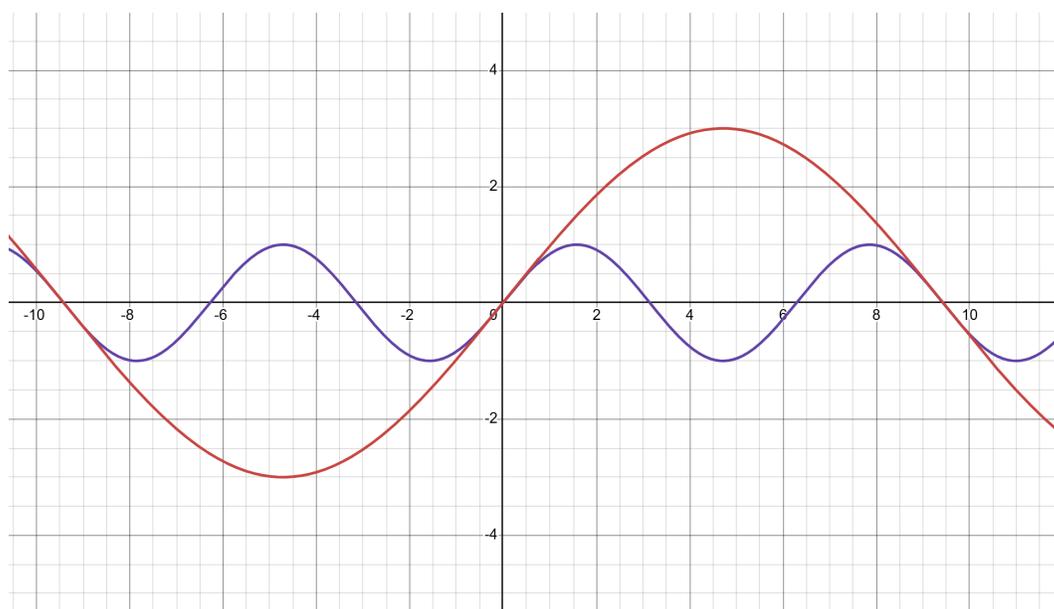
Думать о том, что умножение на i - поворот на 90 градусов делает операцию домножения на i очень . Это хорошо видно на примере сверху и например на

таким (обычная парабола, поворачивается на 90 градусов влево):



Аналогично можно параметризовать и другие вещи: например умножение на -1 будет поворачивать на 180 против часовой стрелки или умножение $-i$ будет поворачивать на 270 против часовой стрелки.

А что же делать с умножением на положительную константу? А это еще проще! Что у нас происходит при умножении комплексного числа на положительное рациональное число? Так как у него нет угла (он равен 0), то происходит только умножение радиусов! То есть буквально умножение на положительную константу - растяжение вашей плоскости:



Например тут у меня был z , координаты которого задаются уравнением синуса (синий кусок на графике), а умножение на 3 растянуло этот график в красный. (Буквально были старые координаты, а теперь они умножились на 3). Такие повороты в работе кучерук принимает без уравнений потому что они тривиальны

3 Параметризация $1/x$. Без явных уравнений параметризации.

Это примерно то, что попадает на контрольных, но у этого всегда 1 алгоритм. Давайте рассмотрим его на примерах:

Пример 1.

Дано z . Его x координата принимает только значение 2 (вертикальная прямая).

Хочу понять какой будет график $y = \frac{1}{z}$.

Давайте напишем уравнение нашей прямой через z . Так как $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$, то наше

уравнение принимает вид: $z + \bar{z} = 2$. Пусть $w = \frac{1}{z}$. Давайте заменим $z = \frac{1}{w}$ и

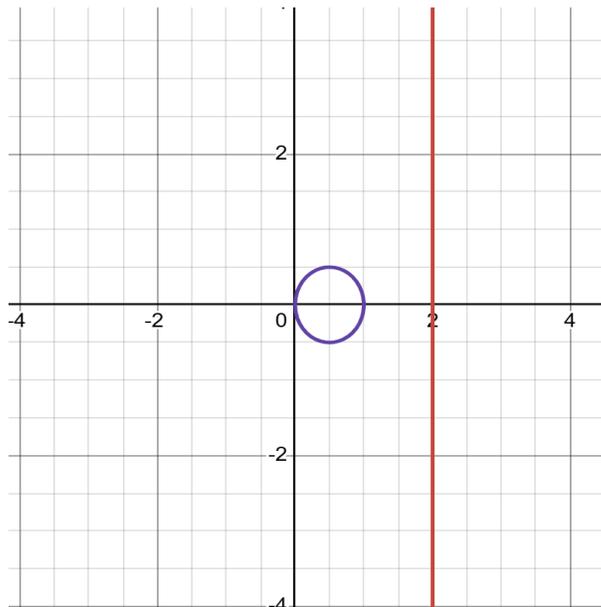
$\bar{z} = \frac{1}{\bar{w}}$. Получим:

$$\frac{1}{w} + \frac{1}{\bar{w}} = 2; \bar{w} + w = 2w\bar{w}.$$

Пусть $w = x_1 + y_1i$. Заменим, получим

$$2x_1 = 2(x_1^2 + y_1^2); x_1 = x_1^2 + y_1^2; (x_1 - \frac{1}{2})^2 + y_1^2 = \frac{1}{4}$$

Получаем, что все точки w лежат у нас на окружности с центром $(\frac{1}{2}, 0)$. То есть наша оранжевая прямая переходит в:



Вот в такую окружность :)

Пример 2.

Пример похожий на Кр. Пусть у нас есть окружность с центром в точке $(2,0)$ радиуса 1. Хотим понять куда перейдет $\frac{1}{z}$.

$z = x + yi$, тогда наше уравнение это: $(x - 2)^2 + y^2 = 1$. Раскроем скобки:

$x^2 - 4x + 3 + y^2 = 0$. Давайте опять представим наши x, y через z . $x^2 + y^2 = z \cdot \bar{z}$,

$x = \frac{z + \bar{z}}{2}$, перепишем:

$$z \cdot \bar{z} - 2z - 2\bar{z} + 3 = 0$$

Пусть $w = \frac{1}{z}$. Заменяем, получим: $\frac{1}{w} \cdot \frac{1}{\bar{w}} - 2\frac{1}{w} - 2\frac{1}{\bar{w}} + 3$. Домножу на $w\bar{w}$. Получу:

$$1 - 2\bar{w} - 2w + 3w \cdot \bar{w} = 0. \text{ Пусть } w = x_1 + y_1 i$$

$1 - 4x_1 + x_1^2 + y_1^2 = 0$. Очевидно это уравнение окружности и наша окружность перейдет в другую окружность.

Аналогично параметризуем другие штуки: пишем их уравнения и делаем замены. На контрольной может быть комбинация всего вышесказанного, а еще может быть спрятанно (прямо как на кр). Чтобы параметризовать часть, просто смотрите по точкам куда ваша часть переходит (берете границы и какую-то точку между)