Линейные пространства и все об этом. Линейная Алгебра

Чепелин В.А.

Содержание

1 Введение.

Здесь содержатся мое объяснение задач по лин пространствам из кр по лин. алу. Тут вы сможете понять что как решать. Списывать плохо!!! Всем счастья!

2 Матрица перехода и все об этом.

2.1 Определение.

Начнем с определения. **Что же такое эта ваша матрица перехода?**

Давайте зафиксируем старый базис $E = (e_1, e_2, \ldots e_n)$. Для каждого вектора этого базиса мы знаем его координаты в этом базисе. Например $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Теперь я хочу ввести новый базис $E' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$.

И теперь у меня возникает желание переводить огромное количество векторов из старого базиса в новый.

Давайте разложим каждый вектор нового базиса через старый и пусть $e'_1 = T_1, e'_2 = T_2, \ldots . e_n = T_n$, где T_i - представление i-ого вектора в этом базисе, тогда:

$T = (T_1, T_2, \ldots, T_n) = T_{e \to e'}$ - **матрица перехода** из e в e', причем:

$E \cdot T_{e \to e'} = E'$, что можно заметить из соответсвующего произведения столбиков и строчек. Теперь поймем как нам с помощью этой матрицы быстро переводить из одного базиса в другой:

$T_{e \to e'} \cdot x' = x$ - матрица перехода умноженная на представление в новом базисе = вектор в старом базисе.

2.2 Примерчики.

Давайте рассмотрим это на очень простеньких примерах.

1) Например мы хотим из канонического базиса в R^3 перейти в базис вот таких векторов: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ~~невероятный базис совсем не похожий на канонический честно~~.

Тогда напишем представление этих векторов через канонический. Шок это он и будет, тогда напишем матрицу перехода:

$T_{e\to e'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ И теперь давайте представим вектор $\begin{pmatrix} 1000 \\ 993 \\ 986 \end{pmatrix}$ в новом базисе.

По определению:

$$T_{e\to e'}x' = \begin{pmatrix} 1000 \\ 993 \\ 986 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x' = \begin{pmatrix} 1000 \\ 993 \\ 986 \end{pmatrix}$$

По-хорошему здесь решать систему (об этом позже), но мои супер глаза и так видят ответ: $x' = \begin{pmatrix} 986 \\ 993 \\ 1000 \end{pmatrix}$

~~Задача на самом деле имеет глубокий подтекст. Канеки Кен теперь не вычитает из 1000 7, а прибавляет, поэтому он здоров, а не психически болен. Лин. ал лечит~~

2) Например мы хотим из вот такого базиса: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ в R^3 перейти в канонический базис.

Напишем представление каждого канонического базиса через этот. Давайте решать уравнения:

Надо найти:

T_1, T_2, T_3 - вектора в старом базисе, соответсвующую новому вектору(хотим новый базис через старый представить)

$$T_1 = \begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{12} \\ t_{13} \end{pmatrix} \dots T_3 = \begin{pmatrix} t_{31} \\ t_{32} \\ t_{33} \end{pmatrix}$$

Получается, что $E \cdot T_1 = e_1$; $E \cdot T_2 = e_2$; $E \cdot T_3 = e_3$, я должен решить 3 уравнения:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Но решать их 3 по очереди кринге, легче вот так:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Поэтому все что нам надо - привести левую матрицу в единичную и мы получим матрицу перехода из старого в новый(в правой части). Решаем такое уравнение как бы для сразу для трех переменных (надо привести левую часть в вид единичной матрицы)

Получаем вот такую матрицу перехода:

$$T_{e \to e'} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

А уже с ее помощью можно находить разные вектора.

3 Объединение и пересечение

3.1 Теория и примерчики

Объединение - $L_1 + L_2$ - буквально все вектора задаваемые суммой этих двух. Пример - 2 прямых на плоскости(проходящих через ноль и не параллельных) зададут любую точку на этой плоскости. Для них $L_1 + L_2$ - вот эта плоскость

Пересечение - $L_1 \cap L_2$ - все вектора, которые буквально лежат в пересечении - Пример - пересечение двух плоскостей по прямой. В таком случае прямая будет для них пересечении

Также для самопроверки мы должны знать:

$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2)$ - **формула Грассмана**

4 Прямая сумма и немного о ней.

4.1 Прямая сумма.

Сумма подпространств называется **прямой суммой**, если они дизъюнктивны. ~~Какие-то умные слова пошли.~~ Теперь на языке адекватном:

Вот у вас есть L_1, L_2 и если у вас ранг суммы равен сумме рангов L_1, L_2. Например:

$$L_1 = spam(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}); \; L_2 = spam(\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix})$$

$rgL_1 = 2; rgL_2 = 2; rgL_1 + rgL_2 = 4$, откуда $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$ — прямая сумма (обозначение)

4.2 Проекции.

Посмотрим на базис прямой суммы. Будем дальше рассматривать все на примерчике сверху (см. прошлый пункт).

$$L_1 \oplus L_2 = spam(L_1, L_2) = spam(\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix})$$

Хотим найти проекцию вектора $x = \begin{pmatrix}3\\4\\1\\7\end{pmatrix}$

Давайте сначала построим матрицу перехода в новый базис - базис прямой суммы

$$T_{e \to e'} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 1\\1 & 0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Теперь давайте найдем вектор x', который соответсвует x в новом базисе(базисе прямой суммы).

$$x' = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Теперь проекция на L_1 это вектор $x_1' = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, а на L_2 это вектор $x_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Теперь представим их в искомом базе $x_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

В таком случае x_1 - проекция на L_1 вектора x, а x_2 - проекция на L_2 вектора.

5 Задачи с контрольной

5.1 Задача на сумму и пересечение.

Тут будет пример решения одной из задач:

Найти пересечение и сумму:

$$L_1 = spam(\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$$

$$L_2 = spam(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

Найдем базис L_1:

$$rg\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + 1 = 3$$

Откуда базис L_1 это A_1, A_2, A_3.

Найдем базис L_2:

$$rg\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 = 3$$

Откуда базис L_2 это B_1, B_2, B_3. (обозвал ашками и бешками искомые вектора, если кто не понял).

1) Найдем $L_1 + L_2$ и его базис:

$$rg\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$rg\begin{pmatrix}3&4&3&3&2&1\\0&1&1&4&2&0\\0&0&1&1&1&0\\0&0&1&4&5&1\end{pmatrix}=1+rg\begin{pmatrix}1&1&4&2&0\\0&1&1&1&0\\0&1&4&5&1\end{pmatrix}=2+rg\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&4&5&1\end{pmatrix}=4$$

Ну и не трудно заметить, что A_1, A_2, A_3, B_1 - базис L_1+L_2.

2) Найдем $L_1 \cap L_2$ и его базис:

Посмотрим на какой-то вектор пересечения:

$x=\alpha_1A_1+\alpha_2A_2+\alpha_3A_3=\beta_1B_1+\beta_2B_2+\beta_3B_3$.

Откуда любой вектор пересечения задается

$\alpha_1A_1+\alpha_2A_2+\alpha_3A_3-\beta_1B_1-\beta_2B_2-\beta_3B_3=0$

Решим систему:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c}2&1&3&-3&-2&-1&0\\-2&-1&-2&-1&0&1&0\\0&-1&1&-1&-1&0&0\\-1&-1&1&-4&-5&-1&0\end{array}\right)$$

Ее общее решение: $\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\end{pmatrix}=t_2\begin{pmatrix}-\frac{11}{2}\\\frac{5}{2}\\4\\\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix}+t_3\begin{pmatrix}-\frac{5}{2}\\\frac{3}{2}\\2\\\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$

Тогда $\beta_1=\frac{1}{2}t_2+\frac{1}{2}t_3$, $\beta_2=t_2$,$\beta_3=t_3$. Тогда любой x в пересечении задается:

$x=\frac{1}{2}t_2B_1+\frac{1}{2}t_3B_1+t_2B_2+t_3B_3=t_2(\frac{1}{2}B_1+B_2)+t_3(\frac{1}{2}B_1+B_3)$.

Откуда получаю базис пересечения:

$P_1=\frac{1}{2}B_1+B_2$, $P_2=(\frac{1}{2}B_1+B_3)$

5.2 Задача на прямую сумму.

Условие:

L_1 задано системой $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 7x_2 + x_3 - 6x_4 = 0 \end{cases}$

L_2 задано системой $\begin{cases} -2x_1 = x_2 + x_3 \\ -2x_1 = x_4 \end{cases}$

Доказать, что $\mathbb{R}^4 = L_1 \oplus L_2$, а также найти проекцию $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$.

1) Найдем базис и ранг L_1:

Для этого нам надо решить систему: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 1 & -6 & 0 \end{array}\right)$

$$X = t_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Откуда $L_1 = spam(\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix})$.

2) Найдем базис и ранг L_2:

Решим соответсвующую систему:

$$\begin{cases} -2x_1 = x_2 + x_3 \\ -2x_1 = x_4 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$X = t_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Откуда $L_2 = spam(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix})$

3) Посмотрим на сумму:

Найдем ранг: $rg \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & -1 \\ 7 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & -1 \\ 7 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & -1 \\ 8 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$
$rg \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 4$

О как же так?!?!?! L_1 и L_2 ДИЗЪЮНКТИВНЫ, поэтому $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$

4) Найдем проекции:

Для этого напишем матрицу перехода из канонического в базис $L_1 \oplus L_2$.

$$T_{e \to e'} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & -1 \\ 7 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$T_{e \to e'} x' = x$. Перепишем

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & -1 \\ 7 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Поэтому нам нужно решить $\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 7 & -1 & -1 & 2 & 10 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & 0 & 2 & 8 \end{array}\right)$

$$X' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{7}{6} \\ -\frac{11}{3} \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x_1' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{7}{6} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \; x_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{11}{3} \\ 2 \end{pmatrix};$$

Ну а дальше надо вернуть все в исходный базис и мы найдем нужные проекции.

5.3 Задача на матрицу перехода

Задача. Дано $f_1(x) = x^2 + 2x + 3$, $f_2(x) = 2x^2 + x - 1$, $f_3(x) = -x^2 + 2$ и $g_1(x) = 2x^2 + 2x + 1, g_2(x) = x^2 - 2x + 1, g_3 = -x^2 + x + 1$. Доказать, что F и G образуют базис в пространстве многолчленов не выше второй степени и построить матрицу перехода из G в F.

1) Представим наши многочлены в базисе x^2, x, 1:

$$f_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}.$$

$$g_1 = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}, g_3 = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

2) Докажем, что F - базис:

$$rg\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\2 & 1 & 0\\3 & -1 & 2\end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\2 & 1 & 1\\5 & 1 & 3\end{pmatrix} = 3$$

Откуда f_1, f_2, f_3- базис в пространстве многочленов степени не выше второй.

3) Докажем, что G - базис:

$$rg\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\2 & -2 & 1\\1 & 1 & -1\end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix}0 & 3 & -2\\4 & 0 & -1\\1 & 1 & -1\end{pmatrix} = 3$$

Откуда g_1, g_2, g_3- базис в пространстве многочленов степени не выше второй.

4) Построим матрицу перехода из g в f. Для этого я должен представить каждый вектор f в базисе g, то есть решить соответсвующие системы уравнений:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 1 & -1 & 1\\2 & -2 & 1 & 2\\1 & 1 & -1 & 3\end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c}2 & 1 & -1 & 2\\2 & -2 & 1 & 1\\1 & 1 & -1 & -1\end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c}2 & 1 & -1 & -1\\2 & -2 & 1 & 0\\1 & 1 & -1 & 2\end{array}\right)$$

Решим и получим, что:

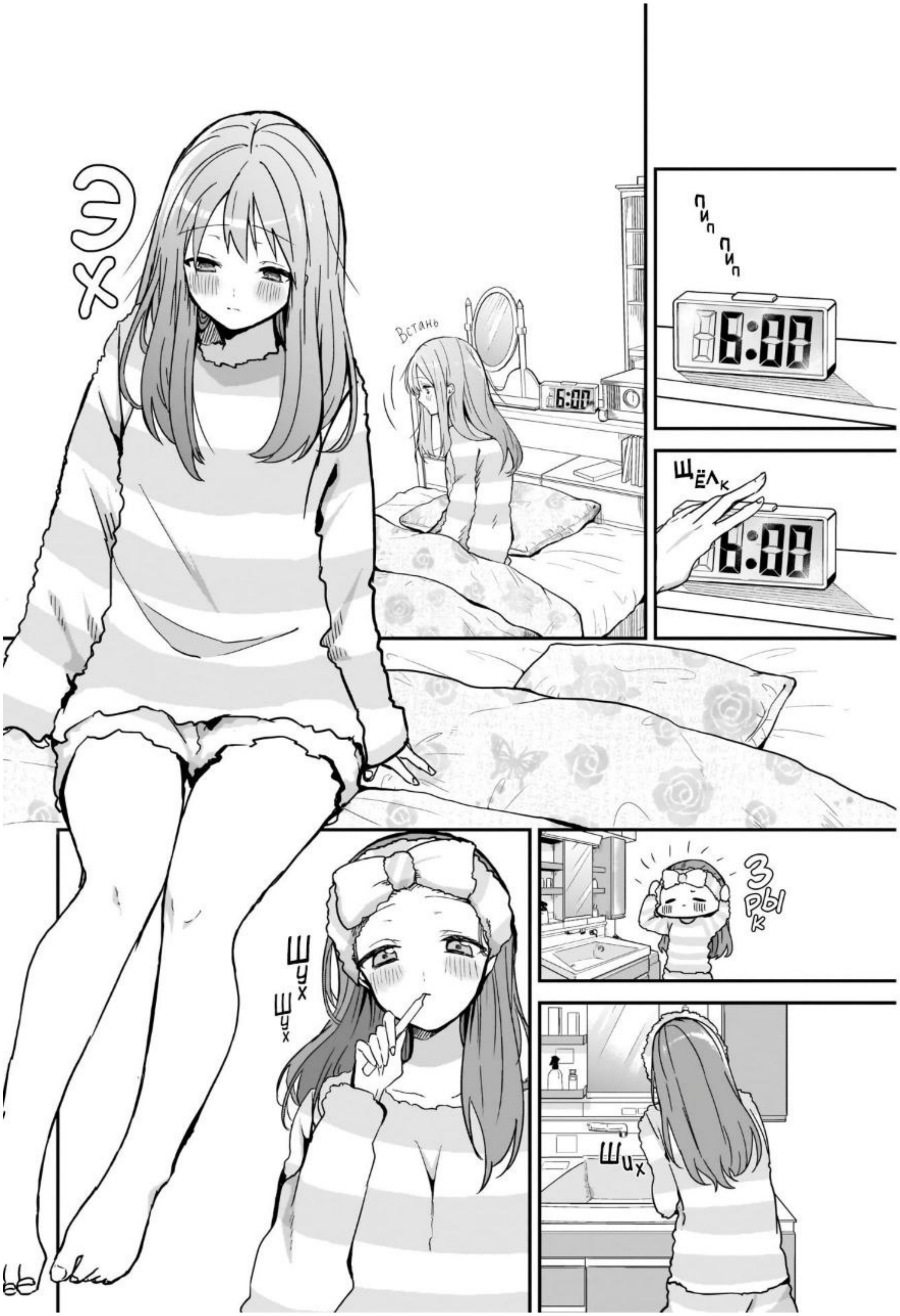
$$f_1' = \begin{pmatrix}-2\\-11\\-16\end{pmatrix}, f_2' = \begin{pmatrix}3\\9\\13\end{pmatrix}, f_3' = \begin{pmatrix}-3\\-11\\-16\end{pmatrix} \text{ - базис F через базис G}$$

Откуда $T = T_{G\to F} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -11 & 9 & -11 \\ -3 & -11 & -16 \end{pmatrix}$

Откуда связь координат:

$T_{G\to F} x_F = x_G$

А пока посмотрите на аниме девочку:


пип пип
6:00
щёлк
6:00
Встань
эх
зрык
шух шух
ших