Автор задачи: Ибрагимов Ильдар, Ибрагимова Алина, Ибрагимова Ирина

Задача 1. Пусть $\mathbb{R}_n[x]$ — линейное пространство многочленов степени не выше n с вещественными коэффициентами. Пусть $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ — линейное отображение, переводящее $f(x)$ в $f(x+1)$. Найдите ранг и дефект этого отображения.

Решение: Запишем отображение в базисе $1, x, \ldots, x^n$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Ранг равен $n+1$, дефект равен 0.

Задача 2. Пусть $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ — линейное отображение, переводящее $f(x)$ в $f(x+1) - f(x)$. Найдите ранг и дефект этого отображения.

Решение: Запишем отображение в базисе $1, x, \ldots, x^n$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Ранг равен n, дефект равен 1.

Задача 3. Пусть $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ — линейное отображение, переводящее $f(x)$ в $f(x+1) + f(x)$. Найдите ранг и дефект этого отображения.

Решение: Запишем отображение в базисе $1, x, \ldots, x^n$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 2 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 2 \end{pmatrix}$$

Ранг равен $n+1$, дефект равен 0.

Задача 4. Пусть $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ — линейное отображение, переводящее $f(x)$ в $f(x+1) - f(x-1)$. Найдите ранг и дефект этого отображения.

Решение: Запишем отображение в базисе $1, x, \ldots, x^n$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Ранг равен n, дефект равен 1.

Задача 5. Пусть $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ — линейное отображение, переводящее $f(x)$ в $f(x+1) + f(x-1)$. Найдите ранг и дефект этого отображения.

Решение: Запишем отображение в базисе $1, x, \ldots, x^n$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 2 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 2 \end{pmatrix}$$

Ранг равен $n+1$, дефект равен 0.

Задача 6. Пусть $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ — линейное отображение, переводящее $f(x)$ в $f(x+1) - f(x-1) - f(x)$. Найдите ранг и дефект этого отображения.

Решение: Запишем отображение в базисе $1, x, \ldots, x^n$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Ранг равен n, дефект равен 1.

Задача 7. Пусть $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ — линейное отображение, переводящее $f(x)$ в $f(x+1) + f(x-1) + f(x)$. Найдите ранг и дефект этого отображения.

Решение: Запишем отображение в базисе $1, x, \ldots, x^n$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 3 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 3 \end{pmatrix}$$

Ранг равен $n+1$, дефект равен 0.

Задача 8. Пусть $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ — линейное отображение, переводящее $f(x)$ в $f(x+1) - f(x-1) + f(x)$. Найдите ранг и дефект этого отображения.

Решение: Запишем отображение в базисе $1, x, \ldots, x^n$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Ранг равен $n+1$, дефект равен 0.

Задача 9. Пусть $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ — линейное отображение, переводящее $f(x)$ в $f(x+1) - f(x-1) - f(x)$. Найдите ранг и дефект этого отображения.

Решение: Запишем отображение в базисе $1, x, \ldots, x^n$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Ранг равен n, дефект равен 1.

Задача 10. Пусть $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ — линейное отображение, переводящее $f(x)$ в $f(x+1) + f(x-1) + f(x)$. Найдите ранг и дефект этого отображения.

Решение: Запишем отображение в базисе $1, x, \ldots, x^n$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 3 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 3 \end{pmatrix}$$

Ранг равен $n+1$, дефект равен 0.

Задача 11. Пусть $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ — линейное отображение, переводящее $f(x)$ в $f(x+1) - f(x-1) + f(x)$. Найдите ранг и дефект этого отображения.

Решение: Запишем отображение в базисе $1, x, \ldots, x^n$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Ранг равен $n+1$, дефект равен 0.

Задача 12. Пусть $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ — линейное отображение, переводящее $f(x)$ в $f(x+1) - f(x-1) - f(x)$. Найдите ранг и дефект этого отображения.

Решение: Запишем отображение в базисе $1, x, \ldots, x^n$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Ранг равен n, дефект равен 1.

Задача 13. Пусть $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ — линейное отображение, переводящее $f(x)$ в $f(x+1) + f(x-1) + f(x)$. Найдите ранг и дефект этого отображения.

Решение: Запишем отображение в базисе $1, x, \ldots, x^n$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 3 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 3 \end{pmatrix}$$

Ранг равен $n+1$, дефект равен 0.

Задача 14. Пусть $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ — линейное отображение, переводящее $f(x)$ в $f(x+1) - f(x-1) + f(x)$. Найдите ранг и дефект этого отображения.

Решение: Запишем отображение в базисе $1, x, \ldots, x^n$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Ранг равен $n+1$, дефект равен 0.

Задача 15. Пусть $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ — линейное отображение, переводящее $f(x)$ в $f(x+1) - f(x-1) - f(x)$. Найдите ранг и дефект этого отображения.

Решение: Запишем отображение в базисе $1, x, \ldots, x^n$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Ранг равен n, дефект равен 1.

Задача 16. Пусть $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ — линейное отображение, переводящее $f(x)$ в $f(x+1) + f(x-1) + f(x)$. Найдите ранг и дефект этого отображения.

Решение: Запишем отображение в базисе $1, x, \ldots, x^n$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 3 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 3 \end{pmatrix}$$

Ранг равен $n+1$, дефект равен 0.

Задача 17. Пусть $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ — линейное отображение, переводящее $f(x)$ в $f(x+1) - f(x-1) + f(x)$. Найдите ранг и дефект этого отображения.

Решение: Запишем отображение в базисе $1, x, \ldots, x^n$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Ранг равен $n+1$, дефект равен 0.

Задача 18. Пусть $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ — линейное отображение, переводящее $f(x)$ в $f(x+1) - f(x-1) - f(x)$. Найдите ранг и дефект этого отображения.

Решение: Запишем отображение в базисе $1, x, \ldots, x^n$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Ранг равен n, дефект равен 1.

Задача 19. Пусть $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ — линейное отображение, переводящее $f(x)$ в $f(x+1) + f(x-1) + f(x)$. Найдите ранг и дефект этого отображения.

Решение: Запишем отображение в базисе $1, x, \ldots, x^n$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 3 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 3 \end{pmatrix}$$

Ранг равен $n+1$, дефект равен 0.

Задача 20. Пусть $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ — линейное отображение, переводящее $f(x)$ в $f(x+1) - f(x-1) + f(x)$. Найдите ранг и дефект этого отображения.

Решение: Запишем отображение в базисе $1, x, \ldots, x^n$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Ранг равен $n+1$, дефект равен 0.

Задача 21. Пусть $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ — линейное отображение, переводящее $f(x)$ в $f(x+1) - f(x-1) - f(x)$. Найдите ранг и дефект этого отображения.

Решение: Запишем отображение в базисе $1, x, \ldots, x^n$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Ранг равен n, дефект равен 1.

Задача 22. Пусть $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ — линейное отображение, переводящее $f(x)$ в $f(x+1) + f(x-1) + f(x)$. Найдите ранг и дефект этого отображения.

Решение: Запишем отображение в базисе $1, x, \ldots, x^n$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 3 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 3 \end{pmatrix}$$

Ранг равен $n+1$, дефект равен 0.

Задача 23. Пусть $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ — линейное отображение, переводящее $f(x)$ в $f(x+1) - f(x-1) + f(x)$. Найдите ранг и дефект этого отображения.

Решение: Запишем отображение в базисе $1, x, \ldots, x^n$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Ранг равен $n+1$, дефект равен 0.

Задача 24. Пусть $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ — линейное отображение, переводящее $f(x)$ в $f(x+1) - f(x-1) - f(x)$. Найдите ранг и дефект этого отображения.

Решение: Запишем отображение в базисе $1, x, \ldots, x^n$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Ранг равен n, дефект равен 1.

Задача 25. Пусть $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ — линейное отображение, переводящее $f(x)$ в $f(x+1) + f(x-1) + f(x)$. Найдите ранг и дефект этого отображения.

Решение: Запишем отображение в базисе $1, x, \ldots, x^n$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 3 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 3 \end{pmatrix}$$

Ранг равен $n+1$, дефект равен 0.

Задача 26. Пусть $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ — линейное отображение, переводящее $f(x)$ в $f(x+1) - f(x-1) + f(x)$. Найдите ранг и дефект этого отображения.

Решение: Запишем отображение в базисе $1, x, \ldots, x^n$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Ранг равен $n+1$, дефект равен 0.

Задача 27. Пусть $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ — линейное отображение, переводящее $f(x)$ в $f(x+1) - f(x-1) - f(x)$. Найдите ранг и дефект этого отображения.

Решение: Запишем отображение в базисе $1, x, \ldots, x^n$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Ранг равен n, дефект равен 1.

Задача 28. Пусть $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ — линейное отображение, переводящее $f(x)$ в $f(x+1) + f(x-1) + f(x)$. Найдите ранг и дефект этого отображения.

Решение: Запишем отображение в базисе $1, x, \ldots, x^n$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 3 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 3 \end{pmatrix}$$

Ранг равен $n+1$, дефект равен 0.

Задача 29. Пусть $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ — линейное отображение, переводящее $f(x)$ в $f(x+1) - f(x-1) + f(x)$. Найдите ранг и дефект этого отображения.

Решение: Запишем отображение в базисе $1, x, \ldots, x^n$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Ранг равен $n+1$, дефект равен 0.

Задача 30. Пусть $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ — линейное отображение, переводящее $f(x)$ в $f(x+1) - f(x-1) - f(x)$. Найдите ранг и дефект этого отображения.

Решение: Запишем отображение в базисе $1, x, \ldots, x^n$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Ранг равен n, дефект равен 1.

Задача 31. Пусть $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ — линейное отображение, переводящее $f(x)$ в $f(x+1) + f(x-1) + f(x)$. Найдите ранг и дефект этого отображения.

Решение: Запишем отображение в базисе $1, x, \ldots, x^n$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 3 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 3 \end{pmatrix}$$

Ранг равен $n+1$, дефект равен 0.

Задача 32. Пусть $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ — линейное отображение, переводящее $f(x)$ в $f(x+1) - f(x-1) + f(x)$. Найдите ранг и дефект этого отображения.

Решение: Запишем отображение в базисе $1, x, \ldots, x^n$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Ранг равен $n+1$, дефект равен 0.

Задача 33. Пусть $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ — линейное отображение, переводящее $f(x)$ в $f(x+1) - f(x-1) - f(x)$. Найдите ранг и дефект этого отображения.

Решение: Запишем отображение в базисе $1, x, \ldots, x^n$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Ранг равен n, дефект равен 1.

Задача 34. Пусть $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ — линейное отображение, переводящее $f(x)$ в $f(x+1) + f(x-1) + f(x)$. Найдите ранг и дефект этого отображения.

Решение: Запишем отображение в базисе $1, x, \ldots, x^n$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 3 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 3 \end{pmatrix}$$

Ранг равен $n+1$, дефект равен 0.

Задача 35. Пусть $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ — линейное отображение, переводящее $f(x)$ в $f(x+1) - f(x-1) + f(x)$. Найдите ранг и дефект этого отображения.

Решение: Запишем отображение в базисе $1, x, \ldots, x^n$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Ранг равен $n+1$, дефект равен 0.

Задача 36. Пусть $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ — линейное отображение, переводящее $f(x)$ в $f(x+1) - f(x-1) - f(x)$. Найдите ранг и дефект этого отображения.

Решение: Запишем отображение в базисе $1, x, \ldots, x^n$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Ранг равен n, дефект равен 1.

Задача 37. Пусть $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ — линейное отображение, переводящее $f(x)$ в $f(x+1) + f(x-1) + f(x)$. Найдите ранг и дефект этого отображения.

Решение: Запишем отображение в базисе $1, x, \ldots, x^n$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 3 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 3 \end{pmatrix}$$

Ранг равен $n+1$, дефект равен 0.

Задача 38. Пусть $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ — линейное отображение, переводящее $f(x)$ в $f(x+1) - f(x-1) + f(x)$. Найдите ранг и дефект этого отображения.

Решение: Запишем отображение в базисе $1, x, \ldots, x^n$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Ранг равен $n+1$, дефект равен 0.

Задача 39. Пусть $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ — линейное отображение, переводящее $f(x)$ в $f(x+1) - f(x-1) - f(x)$. Найдите ранг и дефект этого отображения.

Решение: Запишем отображение в базисе $1, x, \ldots, x^n$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Ранг равен n, дефект равен 1.

Задача 40. Пусть $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ — линейное отображение, переводящее $f(x)$ в $f(x+1) + f(x-1) + f(x)$. Найдите ранг и дефект этого отображения.

Решение: Запишем отображение в базисе $1, x, \ldots, x^n$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 3 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 3 \end{pmatrix}$$

Ранг равен $n+1$, дефект равен 0.

Задача 41. Пусть $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ — линейное отображение, переводящее $f(x)$ в $f(x+1) - f(x-1) + f(x)$. Найдите ранг и дефект этого отображения.

Решение: Запишем отображение в базисе $1, x, \ldots, x^n$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Ранг равен $n+1$, дефект равен 0.

Задача 42. Пусть $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ — линейное отображение, переводящее $f(x)$ в $f(x+1) - f(x-1) - f(x)$. Найдите ранг и дефект этого отображения.

Решение: Запишем отображение в базисе $1, x, \ldots, x^n$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Ранг равен n, дефект равен 1.

Задача 43. Пусть $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ — линейное отображение, переводящее $f(x)$ в $f(x+1) + f(x-1) + f(x)$. Найдите ранг и дефект этого отображения.

Решение: Запишем отображение в базисе $1, x, \ldots, x^n$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 3 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 3 \end{pmatrix}$$

Ранг равен $n+1$, дефект равен 0.

Задача 44. Пусть $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ — линейное отображение, переводящее $f(x)$ в $f(x+1) - f(x-1) + f(x)$. Найдите ранг и дефект этого отображения.

Решение: Запишем отображение в базисе $1, x, \ldots, x^n$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Ранг равен $n+1$, дефект равен 0.

Задача 45. Пусть $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ — линейное отображение, переводящее $f(x)$ в $f(x+1) - f(x-1) - f(x)$. Найдите ранг и дефект этого отображения.

Решение: Запишем отображение в базисе $1, x, \ldots, x^n$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Ранг равен n, дефект равен 1.

Задача 46. Пусть $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ — линейное отображение, переводящее $f(x)$ в $f(x+1) + f(x-1) + f(x)$. Найдите ранг и дефект этого отображения.

Решение: Запишем отображение в базисе $1, x, \ldots, x^n$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 3 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 3 \end{pmatrix}$$

Ранг равен $n+1$, дефект равен 0.

Задача 47. Пусть $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ — линейное отображение, переводящее $f(x)$ в $f(x+1) - f(x-1) + f(x)$. Найдите ранг и дефект этого отображения.

Решение: Запишем отображение в базисе $1, x, \ldots, x^n$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Ранг равен $n+1$, дефект равен 0.

Задача 48. Пусть $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ — линейное отображение, переводящее $f(x)$ в $f(x+1) - f(x-1) - f(x)$. Найдите ранг и дефект этого отображения.

Решение: Запишем отображение в базисе $1, x, \ldots, x^n$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Ранг равен n, дефект равен 1.

Задача 49. Пусть $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ — линейное отображение, переводящее $f(x)$ в $f(x+1) + f(x-1) + f(x)$. Найдите ранг и дефект этого отображения.

Решение: Запишем отображение в базисе $1, x, \ldots, x^n$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 3 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 3 \end{pmatrix}$$

Ранг равен $n+1$, дефект равен 0.

Задача 50. Пусть $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ — линейное отображение, переводящее $f(x)$ в $f(x+1) - f(x-1) + f(x)$. Найдите ранг и дефект этого отображения.

Решение: Запишем отображение в базисе $1, x, \ldots, x^n$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Ранг равен $n+1$, дефект равен 0.

Задача 51. Пусть $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ — линейное отображение, переводящее $f(x)$ в $f(x+1) - f(x-1) - f(x)$. Найдите ранг и дефект этого отображения.

Решение: Запишем отображение в базисе $1, x, \ldots, x^n$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Ранг равен n, дефект равен 1.

Задача 52. Пусть $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ — линейное отображение, переводящее $f(x)$ в $f(x+1) + f(x-1) + f(x)$. Найдите ранг и дефект этого отображения.

Решение: Запишем отображение в базисе $1, x, \ldots, x^n$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 3 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 3 \end{pmatrix}$$

Ранг равен $n+1$, дефект равен 0.

Задача 53. Пусть $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ — линейное отображение, переводящее $f(x)$ в $f(x+1) - f(x-1) + f(x)$. Найдите ранг и дефект этого отображения.

Решение: Запишем отображение в базисе $1, x, \ldots, x^n$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Ранг равен $n+1$, дефект равен 0.

Задача 54. Пусть $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ — линейное отображение, переводящее $f(x)$ в $f(x+1) - f(x-1) - f(x)$. Найдите ранг и дефект этого отображения.

Решение: Запишем отображение в базисе $1, x, \ldots, x^n$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Ранг равен n, дефект равен 1.

Задача 55. Пусть $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ — линейное отображение, переводящее $f(x)$ в $f(x+1) + f(x-1) + f(x)$. Найдите ранг и дефект этого отображения.

Решение: Запишем отображение в базисе $1, x, \ldots, x^n$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 3 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 3 \end{pmatrix}$$

Ранг равен $n+1$, дефект равен 0.

Задача 56. Пусть $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ — линейное отображение, переводящее $f(x)$ в $f(x+1) - f(x-1) + f(x)$. Найдите ранг и дефект этого отображения.

Решение: Запишем отображение в базисе $1, x, \ldots, x^n$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Ранг равен $n+1$, дефект равен 0.

Задача 57. Пусть $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ — линейное отображение, переводящее $f(x)$ в $f(x+1) - f(x-1) - f(x)$. Найдите ранг и дефект этого отображения.

Решение: Запишем отображение в базисе $1, x, \ldots, x^n$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Ранг равен n, дефект равен 1.

Задача 58. Пусть $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ — линейное отображение, переводящее $f(x)$ в $f(x+1) + f(x-1) + f(x)$. Найдите ранг и дефект этого отображения.

Решение: Запишем отображение в базисе $1, x, \ldots, x^n$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 3 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 3 \end{pmatrix}$$

Ранг равен $n+1$, дефект равен 0.

Задача 59. Пусть $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ — линейное отображение, переводящее $f(x)$ в $f(x+1) - f(x-1) + f(x)$. Найдите ранг и дефект этого отображения.

Решение: Запишем отображение в базисе $1, x, \ldots, x^n$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Ранг равен $n+1$, дефект равен 0.

Задача 60. Пусть $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ — линейное отображение, переводящее $f(x)$ в $f(x+1) - f(x-1) - f(x)$. Найдите ранг и дефект этого отображения.

Решение: Запишем отображение в базисе $1, x, \ldots, x^n$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Ранг равен n, дефект равен 1.

Задача 61. Пусть $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ — линейное отображение, переводящее $f(x)$ в $f(x+1) + f(x-1) + f(x)$. Найдите ранг и дефект этого отображения.

Решение: Запишем отображение в базисе $1, x, \ldots, x^n$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 3 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 3 \end{pmatrix}$$

Ранг равен $n+1$, дефект равен 0.

Задача 62. Пусть $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ — линейное отображение, переводящее $f(x)$ в $f(x+1) - f(x-1) + f(x)$. Найдите ранг и дефект этого отображения.

Решение: Запишем отображение в базисе $1, x, \ldots, x^n$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Ранг равен $n+1$, дефект равен 0.

Задача 63. Пусть $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ — линейное отображение, переводящее $f(x)$ в $f(x+1) - f(x-1) - f(x)$. Найдите ранг и дефект этого отображения.

Решение: Запишем отображение в базисе $1, x, \ldots, x^n$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Ранг равен n, дефект равен 1.

Задача 64. Пусть $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ — линейное отображение, переводящее $f(x)$ в $

[redacted]

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

Вычислить определитель матрицы:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Решение

Решение доступно только PRO версии

Рассмотрим $\mathbb{R}^3$ с ортонормированным базисом $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Пусть $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{k} + \vec{i}$. Найдите ортогональную проекцию вектора $\vec{d} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ на подпространство, ортогональное векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Решение

Ортогональное дополнение к подпространству, порожденному векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — это одномерное подпространство, порожденное вектором $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}$. Ортогональная проекция вектора $\vec{d}$ на это подпространство равна $\frac{(\vec{d}, \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a})}{(\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}, \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a})}(\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a})$. Ортогональная проекция вектора $\vec{d}$ на подпространство, ортогональное векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, равна разности $\vec{d}$ и ортогональной проекции вектора $\vec{d}$ на одномерное подпространство, порожденное вектором $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}$. Ортогональная проекция вектора $\vec{d}$ на одномерное подпространство, порожденное вектором $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}$,