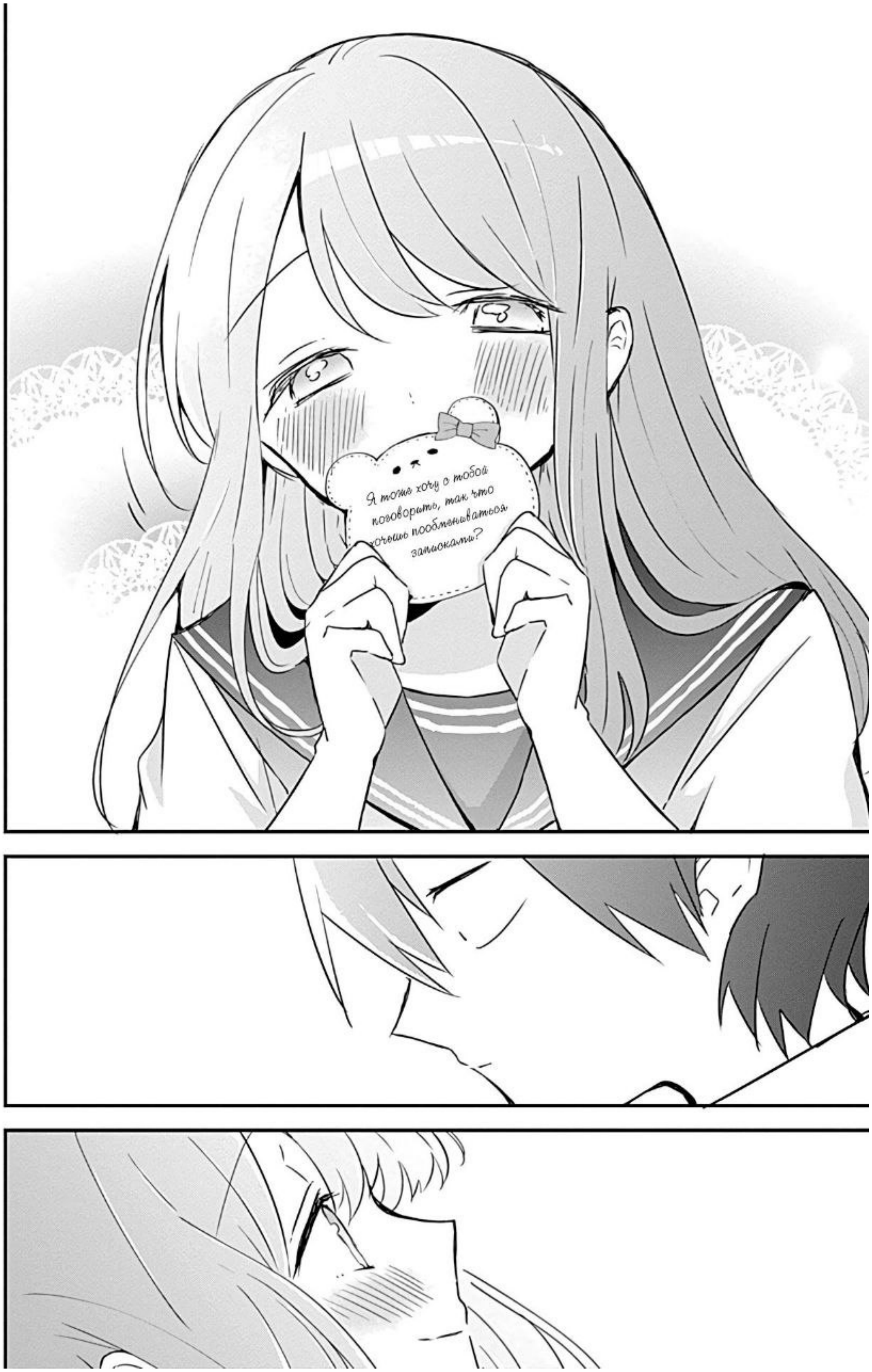
Конспект по Линейной Алгебре.

Чепелин В.А.

Содержание

1 О конспекте:

Данный конспект был подготовлен Чепелиным Вячеславом Алексеевичем. Надеюсь, что он хотя бы кому-то поможет :)



2 Основные Алгебраические структуры.

2.1 Операции, группа, кольцо, поле

2.1.1 Законы композиции.

$f : A \times B \to C$ - функция отображения.

$\forall (a, b) : a \in A, b \in B : \exists! c \in C$ — **закон внешней контрапозиции.**

$f : A \times A \to A$ — **закон внутренней контрапозиции** или алгебраическая операция.

2.1.2 Ассоциативность, коммутативность алгебраических операций.

Возьмем операцию $* : A \times A \to A$:

$a * b = b * a$ — **коммутативность**.

$a * (b * c) = (a * b) * c$ — **ассоциативность**.

2.1.3 Алгебраическая структура, группа, кольцо, поле. Свойства.

Алгебраическая структура — множество с набором Ω — операция и отношений на ней, с некоторой системой аксиом. Обозначают (A, Ω)

Группа (A, $\{+\}$):

1. $a + (b + c) = (a + b) + c$ — ассоциативность.
2. $\exists 0 : \forall a : a + 0 = 0 + a = a$.
3. $\exists$ обратного: $\forall a : \exists (-a) : a + (-a) = 0$.

Если группа обладает еще и коммутативностью, то такая группа называется **абелевой**.

Кольцо (A, $\{+, \cdot\}$):

1. Абелева груплпа по сложению.
2. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ — левая дистрибутивность.
3. $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$ — правая дистрибутивность.
4. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ — ассоциативность умножения

Поле (A, $\{+, \cdot\}$):

1. Абелева груплпа по сложению.
2. Абелева груплпа по умножению.

3. $a(b+c) = ab + ac$ — дистрибутивность.

Свойства кольца:

1. $0 \cdot a = 0$
2. $a + x = a + y \to x = y$
3. $a + x = b$ имеет единственное решение
4. 0 — единственнен.
5. 1 — единственна в кольце с единицей.

2.2 Линейное пространство, алгебра, свойства.

$K-$ поле, V - множество. $+ : V \times V \to V$, $\cdot : K \times V \to V$. Если все, что сказано ниже выполнено $\forall \phi, \lambda \in K, a, b \in V$.

1. аксиомы
2. аббелевой
3. для V
4. по сложению.
5. $\phi(\lambda(a)) = \lambda(\phi(a))$.
6. $\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$.
7. $a(\phi + \lambda) = a\phi + a\lambda$.
8. $\exists 1 : a \cdot 1 = a$.

То тогда такую систему называют **линейным пространством**.

Если добавить еще одну операцию $\times : V \times V \to V$.

1. $(a+b) \times c = a \times c + b \times c$

   $c \times (a+b) = c \times a + c \times b$
2. $\lambda(a \times b) = (\lambda a) \times b = a \times (\lambda b)$

То такую штучку называют **линейной алгеброй**.

1. добавим коммутативность $\times$ — коммутативная алгебра.
2. добавим ассоциативность $\times$ — ассоциативная алгебра.
3. добавим единицу — унарная алгебра.
4. добавим обратное — алгебра с делением

2.3 Нормированные линейные пространства и алгебры.

Нормированное пространство — линейное пространство над $\mathbb{R}$ с нормой.

Норма $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}$, удовлетворящее:

1. $||x|| + ||y|| \leq ||x + y||$.
2. $||x|| \geq 0$, причем $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
3. $||\alpha x|| = |\alpha|||x||$.

Алгебра называется **нормированной**, если существует норма согласованная с умножением:

$||ab|| \leq ||a|| \cdot ||b||$.

2.4 Отношение эквивалентности, фактор-структуры.

Бинарное отношение $\sim$ на множестве X является **отношением эквивалентности**, если оно

- Рефлексивно: $\forall x \in X\ x \sim x$.
- Симметрично: $\forall x, y \in X\ x \sim y \leftrightarrow y \sim x$.
- Транзитивно: $\forall x, y, z \in X\ x \sim y \wedge y \sim z \to x \sim z$.

Если $\sim$ — бинарное отношение на X, то множества $M_a = \{x \in X \mid x \sim a\}$ называются классами эквивалентности , а множество $X/\sim = \{M_a \mid a \in X\}$ — **фактормножеством** (или факторпространством) X по $\sim$.

Свойства классов эквивалентности.

1. $\forall a \in X\ M_a \neq \varnothing$.
2. $\forall a, b \in X$ выполнено либо $M_a = M_b$, либо $M_a \cap M_b = \varnothing$.
3. $\bigcup\limits_{a \in X} M_a = X$.

Если у нас есть множество X, а M — какое-то множество, состоящее из непустых взаимно непересекающихся подмножеств X, в объединении дающих X. Тогда M называется **разбиением** X.

Любое разбиение X является факторпространством X по некоторому отношению эквивалентности. Доказательство этого тривиально, если вы представите отношения как ребра в графе, а классы эквивалентности - компоненты

3 Алгебра комплексных чисел.

3.1 Введение в комплы.

3.1.1 Как задаем компклексные?

Множество комплексных чисел - линейное пространство $\mathbb{R}^2$ с евклидовой нормой.

При этом $x = Re\, z$ - вещественная часть числа, а $y = Im\, z$ - мнимая часть.

При $x = 0$ число становится чисто мнимым.

При $y = 0$ число можно отождествлять с вещественным числом x.

Получаем первый вариант записи комплексных чисел - **Декартову форму**:

$$(x; y) = z \in \mathbb{C}; x, y \in \mathbb{R}$$

.

3.1.2 Модуль комлексного.

Евклидову норму $|z| = ||(x; y)||_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ называют модулем комплексного числа.

3.1.3 Различные формы записи.

1. Декартова - разбирали выше.
2. Алгебраическую форма записи: $z = (x; y) = x + iy$.
3. Тригонометрическая: Введем полярную систему координат с центром, совпадающим с центром д.с.к. и осью вдоль оси $Re\, z$. Тогда для каждого ненулевого комплексного числа получим r и φ. Тогда триг. запись — $r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$
4. Экспоненциальная: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$

3.2 Операции сложения, умножения

Сложение/вычитание – аналогично сложению/вычитанию векторов

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

Умножение – $(x_1 + iy_1) * (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$ Распишем в тригонометрической форме перемножение двух комплексных чисел:

$$r_1r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

3.3 Операция сопряжения и деления. Комплексные = поле.

Сопряжение — для всех комплексных чисел $z = x + iy$ существует сопряжённое ему $\overline{z} = x - iy$. Тривиальные свойства:

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $z = \overline{z} \Leftrightarrow (x + iy) = (x - iy) \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$
- $z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = (x^2 + y^2) = |z|^2$
- $z + \overline{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x = 2 \cdot Re\, z$
- $z - \overline{z} = (x + iy) - (x - iy) = 2iy = 2i \cdot Im\, z$

Обратное — $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$

Деление — $\dfrac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}$.

Ну а понять почему комплексное поле - изи.

3.4 Свойства экспоненты чисто мнимого числа. Формулы Эйлера, Муавра, корня n – ой степени.

3.4.1 Свойства экспоненты чисто мнимого чисто мнимого числа + Формула Эйлера.

Сделаем заявление, в которое поверим и в дальнейшем будем активно использовать:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi; \varphi \in \mathbb{R}$$

Свойства:

1. $e^{i*2\pi k} = 1; k \in \mathbb{Z}$
2. $e^{i(\varphi + 2\pi k)} = e^{i\varphi}; k \in \mathbb{Z}$
3. $e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2}$

4. $e^{-i\varphi} = \frac{1}{e^{i\varphi}} = \overline{e^{i\varphi}}$
5. $|e^{i\varphi}| = 1$
6. $e^{i\varphi \cdot n} = (e^{i\varphi})^n; n \in \mathbb{Z}$
7. **Формулы Эйлера:**

$$\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = \cos\varphi, \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} = \sin\varphi$$

3.4.2 Формула Муавра.

$\forall n \in \mathbb{N}(|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$. Очевидно

3.4.3 Корень n-ой степени.

Корнем n-ной степени комплексного числа $re^{i\varphi}$ называются числа $\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}}$ для $k \in [0 : n-1]$. Это очевидно выводится из $\sqrt[n]{w} = z$. $w = z^n$

3.4.4 Вычисление квадратного корня в алгебраическом виде.

$$a + bi = (u + vi)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = u^2 - v^2 \\ b = 2uv \end{cases}$$

Заметим, что $a^2 + b^2 = (u^2 + v^2)^2$, а поскольку и $a^2 + b^2$, и $u^2 + v^2$ неотрицательны, это равенство значит, что $u^2 + v^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$. А отсюда и из $a = v^2 - v^2$ получаем, что $u^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}$ и $v^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}$. Обе дроби неотрицательны, значит из них можно брать арифметические квадратные корни. Осталось лишь понять, как брать знаки при этих корнях. Да очень просто. Смотрим на $b = 2uv$, что значит, что при положительном b мы берём оба корня с одинаковыми знаками, а при отрицательном — с разными.

3.5 Функции комплексного аргумента: $\exp z$, $\ln z$, z^w, w^z

3.5.1 Экспонента комплексного аргумента.

Комплексная экспонента – функция $\exp(x + iy) = e^x(\cos y + i\sin y) = e^x \cdot e^{iy}$. Ее обозначают e^z.

1. $e^{z+2\pi ki} = e^z$ – $2\pi i$ периодичность
2. $|e^z| = e^x = e^{Re\, z}$
3. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$

4. $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$

Аналогично формулам Эйлера введём sin и cos комплексной переменной:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

3.5.2 Логарифм комплексного аргумента.

Пусть $\ln z = w = x + iy$, тогда

$$z = |z|e^{i(\arg z + 2\pi k)} = re^{i\varphi}$$

$$z = e^w = e^x e^{iy}$$

Получим, что $|z| = e^x \in \mathbb{R}$, то есть $x = \ln |z|$. А $y = \arg z + 2\pi k$.

Видим, что в формуле присутствует $2\pi k$, что говорит нам о многозначности логарифма комплексного числа.

3.5.3 Комплексное в степени комплексного числа.

Пусть $k \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{C}$ – константа

$w = z^b = e^{b \ln_k z}$ – обобщённая степенная функция

$w = b^z = e^{z \ln_k b}$ – обобщённая показательная функция

Заметим, что стандартные свойства натурального логарифма **не выполняются**. Например $b^{z_1+z_2} \neq b^{z_1} b^{z_2}$.

4 Линейные пространства.

4.1 Основные определения.

В этом разделе мы будем рассматривать линейные пространства над $\mathbb{C}$ и иногда $\mathbb{R}$. Обозначать над чем мы будем K.

4.1.1 Линейная оболочка, линейная независимость векторов.

Говорят, что вектор u является **линейной комбинацией** векторов $(v_1; v_2; \ldots; v_n)$, если $\exists \alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_n \in K u = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot v_i$.

Если все $\lambda_k = 0$, то линейная комбинация называется **тривиальной**

Система векторов $v_1, \ldots, v_m \in V$ называется **линейной независимой**, если любая нулевая линейная комбинация тривиальна $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k v_k = 0 \Leftrightarrow \forall k \in \{1, \ldots, m\} : \lambda_k = 0$

В противном случае, система векторов называется **линейно зависимой**, т.е. $\exists$ набор $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ не все нули таких, что $\sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k v_k = 0$.

4.1.2 Теорема о линейно независимых системах векторов

Теорема

1. $v_1, \ldots, v_m$ -линейно зависима $\Leftrightarrow$ по крайней мере один из векторов — это линейная комбинация остальных
2. Если некоторая подсистема системы векторов $v_1, \ldots, v_m$ - линейно зависима, то система векторов $v_1, \ldots, v_m$ — линейно зависима
3. $\left.\begin{array}{l} v_1, \ldots, v_m - \text{линейно независима} \\ v_1, \ldots, v_{m+1} - \text{линейно зависима} \end{array}\right\} \Rightarrow v_{m+1}$ — линейная комбинация $v_1, \ldots, v_m$

Доказательство очевидно

Следствия:

1. Если система линейно независима, то любая подсистема линейно независима
2. Если система содержит 0 вектор, либо пару пропорциональных векторов, то система линейно зависима

4.1.3 Теорема о прополке.

Любую систему векторов $v_1, \ldots, v_m$, в которой хотя бы один из векторов ненулевой, можно заменить на линейно независимую систему векторов $v_{j_1}, \ldots, v_{j_k}$ с сохранением линейной оболочки. $\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_m) = \operatorname{span}(v_{j_1}, \ldots, v_{j_k})$

Доказательство:
Пусть $s_0 = 0, s_1 = \operatorname{span}(v_1), \ldots, s_m = \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_m)$

Тогда $s_0 \subset s_1 \subset \ldots \subset s_m \subset V$

Идём от $j = m$ до $j = 2$

Если $s_{j-1} = s_j$, то v_j удаляем. При этом $\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_j) = \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_{j-1})$ сохраняется

Если $s_{j-1} \subset s_j$, то $v_j \notin s_{j-1}$, т.е. v_j — не является линейной комбинацией $v_1, \ldots, v_{j-1}$

Продолжая так делать, получим, что никакой вектор из полученных не является линейной комбинацией других, то есть итоговое подмножество линейно независимо

В результате получается цепочка строго вложенных подмножеств $s_0 \subset s_{j_1} \subset \ldots \subset s_{j_k} \subset s_m \subset V$

$\Rightarrow s_m = \operatorname{span}(v_{j_1}, \ldots, v_{j_k})$ Q.E.D.

4.2 Порождающие системы, базис, размерность и т.п.

4.2.1 Порождающая система векторов, конечномерные пространства.

Система векторов $v_1, \ldots, v_m \in V$ называется порождающей (полной), если любой вектор линейного пространства V раскладывается по этим векторам, т.е. является линейной комбинацией $v_1, \ldots, v_m$. $V = \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_m)$

Если число $v_1, \ldots, v_m$ конечно, то линейное пространство называется конечномерным.

4.2.2 Базис. Теорема об эквивалентных условиях для базиса.

Теорема

Следующие утверждения равносильны:

1. $v_1, \ldots, v_n \in V$ — линейно независимая и порождающаяся система
2. $v_1, \ldots, v_n \in V$ — линейно независимая система и максимальная по числу элементов

3. $v_1, \dots, v_n \in V$ — порождающая система и минимальная по числу элементов

Доказательство очевидно.

Если система $v_1, \dots, v_n \in V$ удовлетворяет условиям теоремы, то она называется **базисом** пространства V.

4.2.3 Размерность пространства.

Количество векторов $n = \dim V =$ **размерность линейного пространства** $=$ max возможное число линейно независимых векторов $=$ min число в порождающей системе векторов

4.2.4 Теорема о дополнении любой независимой системы до базиса и о порождающей системе векторов.

1. $\forall$ линейно независимую систему векторов в V можно дополнить до базиса пространства V
2. из любой порождающей системы пространства V можно выделить базис пространства V

Доказательство очевидно, спасибо прополке.

4.3 Координаты, изоморфзим и все об этом.

4.3.1 Координаты вектора и их единственность.

$\forall x \in V : x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i l_i$, где $l = (l_1, \dots, l_n)$ — базис в V (порождающей системы)

$x_i \in K$ — координаты вектора x относительно базиса l

$x \in V \longrightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$, где $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ — координатный столбец.

Утверждение

$\forall x \in V$ координаты относительно базиса e определяется единственным образом

Доказательство очевидно от противного.

Несложно заметить, что отображение между V и K^n, которое по вектору выдаёт его координаты — биекция.

4.3.2 Изоморфизм линейных пространств и его свойства.

V_1, V_2 — линейные пространства называются изоморфными ($V_1 \cong V_2$), если между V_1 и V_2 существует биекция и сохраняется линейность, т.е.

$$x \in V_1 \longleftrightarrow x' \in V_2$$
$$y \in V_1 \longleftrightarrow y' \in V_2$$
$$\forall \lambda \in K : x + \lambda y \in V_1 \longleftrightarrow x' + \lambda y' \in V_2$$

Свойства изоморфизма

1. $0 \in V \longrightarrow 0' \in V'$

   Доказательство

   $\forall \lambda \in K : \lambda x \longleftrightarrow \lambda x'$

   Пусть $\lambda = 0$, тогда $0 = 0 \cdot x \longleftrightarrow 0 \cdot x' = 0'$ Q.E.D.

2. $\forall x \in V \longleftrightarrow x' \in V'$

   $-x \in V$ — противоположный элемент к x

   $-x' \in V$ — противоположный элемент к x'

   $\Rightarrow -x \longleftrightarrow -x'$

   Доказательство

   $\forall \lambda \in K : \lambda x \longleftrightarrow \lambda x'$

   Пусть $\lambda = -1$, тогда $-x = -1 \cdot x \longleftrightarrow -1 \cdot x' = -x'$ Q.E.D.

3. $x_1, \ldots, x_m \in V; x_1' \ldots x_m' \in V'$

   $\forall k = 1 \ldots m : x_k \longleftrightarrow x_k'$

   $$\Rightarrow \sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k \in V \longleftrightarrow \sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k' \in V'$$

   Доказательство

   По методу математической индукции Q.E.D.

4. $\underbrace{x_1, \ldots, x_m}_{\text{линейно независимы}} \in V \longleftrightarrow \underbrace{x_1', \ldots, x_m'}_{\text{линейно независимы}} \in V'$

   Доказательство

   $\alpha_k \in K$

   $$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k = 0 \longleftrightarrow \sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k' = 0'$$

т.к. $\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k x_k \longleftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k x'_k$ (3 свойство) и $0 \in V \longleftrightarrow 0' \in V'$ (1 свойство)

$\underbrace{x_1, \ldots, x_m}_{\text{линейно независимы}} \in V \Leftrightarrow \forall k = 1 \ldots m : \alpha_k = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x'_1, \ldots, x'_m}_{\text{линейно независимы}} \in V'$ Q.E.D.

5. $\underbrace{x_1, \ldots, x_m}_{\text{порождающая система}} \in V \longleftrightarrow \underbrace{x'_1, \ldots, x'_m}_{\text{порождающая система}} \in V'$

$x_1, \ldots, x_m \in V$ — порождающая система $\Leftrightarrow \forall x \in V : x = \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k x_k$

$\forall x \in V : x = \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k x_k \longleftrightarrow \forall x' \in V' : x' = \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k x'_k$

т.к. $\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k x_k \longleftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k x'_k$ (3 свойство) и $x \longleftrightarrow x'$

$\forall x' \in V' : x' = \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k x'_k \Leftrightarrow x'_1, \ldots, x'_m$ — порождающая система Q.E.D.

6. $\underbrace{e_1, \ldots, e_n}_{\text{базис } V} \longleftrightarrow \underbrace{e'_1, \ldots, e'_n}_{\text{базис } V'}$

Доказательство

Из свойств 4 и 5 мы знаем, что если система векторов линейно независима и порождающая, то есть это базис Q.E.D.

4.3.3 Координатный изоморфизм.Теорема об изоморфизме конечномерных про- странств, следствие.

Теорема

V_1, V_2 — линейные пространства над полем K

$V_1 \cong V_2 \Leftrightarrow \dim V_1 = \dim V_2$

Доказательство:

$\boxed{\Leftarrow}$ $\dim V_1 = \dim V_2 \Rightarrow e_1, \ldots, e_n$ — базис в V_1 и $e'_1, \ldots, e'_n$ — базис в V_2

Построим изоморфизм из V_1 в V_2

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_i e_i \in V_1 \longleftrightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n \longleftrightarrow x' = \sum_{k=1}^{n} x_i e'_i \in V_2$$

$$x \in V_1 \xleftrightarrow[]{\substack{\text{координатный}\\ \text{изоморфизм}}} x \in K^n \xleftrightarrow[]{\substack{\text{координатный}\\ \text{изоморфизм}}} x' \in V_2$$

Проверим линейность $\forall \lambda \in K$

$$x + \lambda y \longleftrightarrow \sum_{k=1}^{n} x_i e_i + \lambda \sum_{k=1}^{n} y_i e_i = e_i(\sum_{k=1}^{n} x_i + \lambda \sum_{k=1}^{n} y_i) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 + \lambda y_1 \\ \vdots \\ x_n + \lambda y_n \end{pmatrix} \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow \sum_{k=1}^{n} x_i e_i' + \lambda \sum_{k=1}^{n} y_i e_i' = e_i'(\sum_{k=1}^{n} x_i + \lambda \sum_{k=1}^{n} y_i) \longleftrightarrow x' + \lambda y'$$

$$x + \lambda y \longleftrightarrow x' + \lambda y'$$

Биекция сохраняет свойство линейности $\Rightarrow$ изоморфизм

$\boxed{\Rightarrow}$ Если $V_1 \cong V_2$, то из 6 свойства изоморфизма мы знаем, что существует биекция между базисами этих систем $\Rightarrow \dim V_1 = \dim V_2$

Q.E.D.

Следствие. Изоморфность разбивает множество линейных пространств на классы эквивалентности с равной размерностью.

4.4 Теорема о лин. подпространстве, ранг, база.

4.4.1 Теорема о лин. подпространстве.

<u>**Теорема**</u> (критерий линейного подпространства)

L — линейное подпространство $V \Leftrightarrow \forall x, y \in L \subset V \ \forall \lambda \in K : x + \lambda y \in L$

(L замкнуто относительно $+, \cdot$)

1. <u>Доказательство:</u>
   $\boxed{\Rightarrow}$ т.к. $L \subset V$ и выполняются 1-8 аксиомы

   $\boxed{\Leftarrow}$ т.к. $L \subset V$ выполнены все аксиомы кроме 3 и 4

   Пусть $x \in L \subset V$, тогда $x + (-1) \cdot x \in L \Rightarrow o \in L \Rightarrow \exists$ нейтральный элемент в L

   Пусть $x = 0 \in L, y \in L \Rightarrow 0 + (-1) \cdot y = -y \in L \Rightarrow \exists$ противоположный элемент

$\Rightarrow$ для L выполнены 1-8 аксиомы линейного пространства

Q.E.D.

4.4.2 База, ранг системы векторов.

Ранг системы векторов $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \dim(\text{ span}(v_1, \ldots, v_m)) = r = \text{rg}(v_1, \ldots, v_m)$

r — число max линейно независимых векторов в $L = \text{span}(v_1, \ldots, v_m)$

База — сделай прополку, получишь базис span.

4.4.3 Теорема о ранге.

Элементарные преобразования системы векторов:

1. удаление/добавление нулевого вектора
2. изменение порядка векторов
3. замена любого векторов на него де, умноженный на скаляр ($\lambda \in K, \lambda \neq 0 : v_j \to \lambda v_j$)
4. замена любого из векторов на его сумму с любым другим вектором системы ($v_j \to v_j + v_k$)

Теорема

$\text{rg}(v_1, \ldots, v_m)$ не меняется при элементарных преобразованиях

Доказательство очев.

4.5 Пересечение и сумма линейных подпространств. Формула Грассмана.

$L_1, L_2 \in V$ — линейные подпространства пространства V

$L_1 + L_2 = \{x_1 + x_2 \in V : x_1 \in L_1, x_2 \in L_2\}$

$L_1 \cap L_2 = \{x \in V : x \in L_1, x \in L_2\}$

Теорема (формула Грассмана)

$L_1, L_2 \in V$ — линейные подпространства пространства V

$\dim(L_1 + L_2) = \dim(L_1) + \dim(L_2) - \dim(L_1 \cap L_2)$

Доказательство

1. $\dim(L_1 \cap L_2) \neq 0$

   $L_1 \cap L_2 \neq \{0\}$. Возьмем базис. Дополним L_1, L_2 до базиса базисом пересечения. А дальше просто блаблабла

2. $\dim(L_1 \cap L_2) = 0$

   $L_1 \cap L_2 = \{0\}$. Тривиально.

4.6 Прямая сумма линейных подпространств. Теорема об эквивалентных условиях прямой суммы, следствие.

$L_1, \ldots, L_m \subset V$ называются дизъюнктными, если $x_1 + \cdots + x_m = 0$, где $x_i \in L_i, i = 1 \ldots m \Leftrightarrow \forall i = 1 \ldots m : x_i = 0$

$L_1 + \cdots + L_m$ называется прямой суммой, если $L_1, \ldots, L_m$ — дизъюнктны

$L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_m$ — прямая сумма линейного подпространства

Теорема

$$L = L_1 + \cdots + L_m = \sum_{k=1}^{m} L_k, L_k \subset V$$

$$L = \bigoplus_{k=1}^{n} L_k \Leftrightarrow \text{выполнению любого из 3-х утверждений}$$

1. $\forall j = 1 \ldots m : L_j \cap \sum\limits_{k \neq j} L_k = \{0\}$
2. базис $L =$ объединение базисов L_k
3. $\forall x \in L : \exists! x_k \in L_k : x = \sum x_k$ (единственность представления суммы)

   Доказательство:
   Докажем первое условие. Сначала докажем его необходимость для дизъюнктности (то есть что из неё следует условие). Мы знаем, что $v_1 + v_2 + \cdots + v_m = 0$ возможно только если каждый из векторов — 0. Рассмотрим $v \in L_i \cap \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} L_j$.

   Он, как несложно заметить, лежит в L_i, поэтому может быть записан как v_i. То есть $v \in \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} L_j$, что значит, что его можно записать как сумму $\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} v_j$. А это значит, что $-v_i + \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} v_j = 0$. По причине дизъюнктности, все слагаемые тут — 0. А значит $-v_i = 0 \Rightarrow v = 0$. То есть любой $v \in L_i \cap \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} L_j$ является 0, что и требовалось доказать.

Теперь докажем достаточность первого условия. Мы знаем, что $\forall i \in [1 : m]\ L_1 \cap \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} L_j = \{0\}$. Хочется доказать, что $v_1 + v_2 + \cdots + v_m = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [1 : m]\ v_i = 0$. Заметим, что $v_1 + v_2 + \cdots + v_m = 0 \Leftrightarrow \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} x_j = -x_i$. Правая часть лежит в $\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} L_j$, а левая — в L_i. Это значит, что обе части лежат в их пересечении, а там лежит только 0. Значит $v_i = 0$. То же самое можно провести для любого i, получив, что все v_i — нули. Что и требовалось доказать.

Дальше можно доказать, что первое условие равносильно второму, а второе равносильно третьему.

Следствие

$L = L_1 \oplus \ldots \oplus L_m \Leftrightarrow \dim L = \sum\limits_{i=1}^{m} \dim L_i$

Доказательство

по Грассману и мат. индукции Q.E.D.

$$V = \bigoplus_{i=1}^{m} L_i \Rightarrow \forall x \in V : \exists! x_i \in L_i : x = \sum_{i=1}^{m} x_i$$

x_i — проекция элемента x на подпространство L_i параллельно $\sum\limits_{j\neq i} L_j$

4.7 Многообразие и все о них.

<u>**Линейным**</u> (аффинным) многообразием называется множество точек пространства $V : D = \{x \in V : x = x_0 + l, l \in L\}$, где $L \subset V, x_0 \in V$ (сдвинутое линейное подпространство)

Размерность линейного многообразия $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \dim D = \dim L$

Теорема

$P_1 = x_1 + L_1; P_2 = x_2 + L_2$, где $L_1, L_2 \subset V$ — линейные подпространства, $x_1, x_2 \in V$

$$P_1 = P_2 \Leftrightarrow \begin{cases} L_1 = L_2 = L \\ x_1 - x_2 \in L \end{cases}$$

Доказательство очевидно. Справа налево тривиаьно, слева направо рассмотрите $p_1 = x_1 + l_1 = x_2 + l_2$ И посмотрите на $p_1 = x_1$ или $p_2 = x_2$

Следствие

$P = X_0 + L$

$\forall x \in P \Rightarrow P_x = x + L = P$

Доказательство:

(a) $L = L$

(b) $x - x_0 \in L$

Q.E.D

4.8 Фактор пространство лин. пространства

Пусть у нас есть линейное подпространство L. Тогда отношение $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in L$ является отношением эквивалентности, для любых векторов из V.

Факторпространство пространства V по модулю линейного подпространства L $V\Big|_L$ — это фактормножество V по отношению эквивалентности $\sim$ из предыдущего утверждения.

Теорема $V\Big|_L$ состоит из линейных многообразий на L.

Доказательство:
Если $x - y \in L$, то линейные многообразия $x + L$ и $y + L$ по одной из теорем ранее совпадают. То есть эквивалентные элементы порождают одинаковые многообразия.

Теорема

$\dim V\Big|_L = \dim V - \dim L$.

Доказательство:
Пусть $\{e_1; e_2; \dots; e_m\}$ — базис L. Дополним его до базиса V векторами $\{f_1; f_2; \dots; f_{n-m}\}$
Хочется доказать, что $\{f_1 + L; f_2 + L; \cdots; f_{n-m} + L\}$ — базис $V\Big|_L$.
Докажем, что эта система порождающая. Нужно породить $v + L$. v раскладывается по базису $\{e_1; e_2; \dots; e_m; f_1; f_2; \dots; f_{n-m}\}$ как $v = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i e_i + \sum\limits_{i=1}^{n-m} \beta_i f_i$. Первая сумма лежит в L, то есть её можно выкинуть, многообразие останется таким же. А значит $v + L$ можно представить как $\sum\limits_{i=1}^{n-m} \beta_i (f_i + L)$, ведь по определению суммы многообразий это $\left(\sum\limits_{i=1}^{n-m} \beta_i f_i\right) + L$.
Теперь докажем линейную независимость. Рассмотрим нулевую линейную комбинацию $\sum\limits_{i=1}^{n-m} \beta_i (f_i + L)$. Она, как мы уже знаем, равна $\left(\sum\limits_{i=1}^{n-m} \beta_i f_i\right) + L$. Это должно быть равно нейтральному элементу (то есть L). Когда эти линейные многообразия равны? Когда $\sum\limits_{i=1}^{n-m} \beta_i f_i \in L$. То есть $\sum\limits_{i=1}^{n-m} \beta_i f_i - \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i e_i = 0$. Но это же линейная комбинация векторов подсистемы $\{e_1; e_2; \dots; e_m; f_1; f_2; \dots; f_{n-m}\}$, а значит она линейно независима. А значит $\forall i \in [1 : n - m]$ $\beta_i = 0$, что значит, что линейная комбинация $\sum\limits_{i=1}^{n-m} \beta_i (f_i + L)$ тривиальна.

5 Алгебра матриц.

5.1 Основные понятия

5.1.1 Определение.

def: **Матрица** — множество некоторых объектов (элементов), записанных в виде таблицы (не обязательно числа).

$$A = (a_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

m — число строк n — число столбцов "Матрица размерности m на n"

Матрица, где $\forall i, j \; a_{ij} \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ — числовая (вещественная/комплексная).

$A = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_m \end{pmatrix}$ — столбцовый вид записи. A_j — столбец матрицы. $A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m(\mathbb{C}^m)$

$A = \begin{pmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_m \end{pmatrix}$ — строчный вид записи. S_i — строка матрицы. $S_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_n(\mathbb{C}_n)$

$span(A_1, \dots, A_n) \subset \mathbb{R}^m(\mathbb{C}^m)$ — пространство столбцов матрицы

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & * & * \\ * & \ddots & * \\ * & * & a_{mn} \end{pmatrix}$ — главная диагональ.

$A = \begin{pmatrix} * & * & a_{1n} \\ * & \dots & * \\ a_{m1} & * & * \end{pmatrix}$ — побочная диагональ.

$\forall i \neq j \quad a_{ij} = 0 \; \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_n \end{pmatrix} = diag(\alpha_1, \dots \alpha_n)$ — диагональная матрица.

$E = diag(\alpha_1, \dots \alpha_n), \forall i \; \alpha_i = 1$ — единичная матрица.

$\begin{pmatrix} a_{11} & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$ — верхнетреугольная матрица.

$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ * & \ddots & 0 \\ * & * & a_{nn} \end{pmatrix}$ — нижнетреугольная матрица.

5.1.2 Основные операции с матрицами

$a_{ij} \in \mathbb{K}$
$A_{m\times n}, B_{m\times n}$
def: $C = A + B = (c_{ij}) \quad \forall i, j\ c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
$'+'$ — сложение матриц (одной размерности)
0 — нейтральный элемент относительно сложения

$\lambda \in \mathbb{K}$
$C = \lambda A = (\lambda a_{ij})$
$\lambda\times$ — умножение на скаляр.
$-1A$ — противоположная А матрица (не путать с обратной)

Свойства:

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $\exists\ 0$
4. $\exists\ -A$
5. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
6. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
7. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A) = \beta(\alpha A)$
8. $1A = A$

=> Линейное пространство (8 аксиом выполнены) $M_{m\times n}$

$E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & a_{ij} == 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ — канонический базис пространства $M_{m\times n}$ $A =$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij} = (\alpha_{ij})_{m\times n} = 0_{m\times n} \Leftrightarrow a_{ij} = 0\ \forall i,j$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1n} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{2n} \\ a_{m1} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \leftrightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})^{mn} \quad \Rightarrow \quad A \cong \mathbb{K}^{mn} \quad \Rightarrow \quad dim(M_{m\times n}) = mn$$

def: Матрицы A и B согласованы, если число столбцов A совпадает с числом столбцов B.

Если A и B согласованы, то $A_{m\times k}, B_{k\times n}$

$$C = A\times B = AB = (C_{ij})_{m\times n} \quad C_{ij} = \sum_{r=1}^{k} a_{ir}b_{rj}$$ — умножение

def: Матрицы A и B перестановочны, если $AB = BA$ (очевидно, должны быть квадратными)

A, B, C — квадратные матрицы $n\times n$
$\forall\lambda\in\mathbb{K}$

9. $A(B+C) = AB + AC$
   $(A+B)C = AC + BC$

=> кольцо

10. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

=> алгебра ($M_{n\times n}$)

11. $A(BC) = (AB)C$

=> ассоциативная алгебра

13. $\exists E \quad EA = AE = A$

=> унитальная алгебра

(Обратный элемент может не существовать, так что без 12)

Доказательства: упражнение на дом :) Но вообще там несложно, просто глина.

5.2 Операция транспонирования и её свойства.

Операция транспонирования заменяет матрицу $A_{m\times n}$ на $A^T_{n\times m}$, где строки новой матрицы - столбцы исходной (проще говоря, отражение относительно главной диагонали)

$B = A^T = (b_{ij}) = (a_{ji})$

Свойства:

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A + \lambda B)^T = A^T + \lambda B^T$
3. A и B согласованы $(AB)^T = B^T A^T$ (!!! не путать, я так вторую попытку кр по матрицам слил)

def: $A_{m\times n}$ называется симметрической, если $A = A^T$

def: $A_{m\times n}$ называется кососимметрической, если $A = -A^T$

5.3 Обратная матрица и её свойства.

$A_{n\times n}$ Матрица A^{-1} называется **обратной** к A, а A называется обратимой, если $A^{-1}A = AA^{-1} = E$

Пока мы не знаем условий существования (в лекциях позже)

Свойства:

1. A^{-1} — единственная (док-во очевидное через ассоциативность)
2. $(A^{-1})^{-1} = A$ (из определения)
3. $\forall\lambda, \lambda \in \mathbb{K} \quad (\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$
4. $E^{-1} = E$
5. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
6. $\exists B^{-1} \Rightarrow \exists (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

5.4 Ранг матрицы.

def: $rg_{line}(A) = rg(S_1, \dots S_n)$ — строчный ранг матрицы A (берем строки как вектора, находим ранг системы векторов) $1 \le rg_{line}(A) \le n$ $(A \ne 0)$

def: $rg_{col}(A) = rg(A_1, \dots A_m)$ — столбцовый ранг матрицы A (берем строки как вектора, находим ранг системы векторов) $1 \le rg_{col}(A) \le m$ $(A \ne 0)$

$A_j \quad 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq m$

$\widetilde{A}_j = \begin{pmatrix} a_{i_1 j} \\ a_{i_2 j} \\ \vdots \\ a_{i_k j} \end{pmatrix}$ — отрезок длины k столбца A_j

$S_i \quad 1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq n$

$\widetilde{S}_i = \begin{pmatrix} a_{ij_1} & a_{ij_2} & \ldots & a_{ij_k} \end{pmatrix}$ — отрезок длины k строки S_i

Утверждение 1: $A_1, A_2, \ldots A_n$ линейно зависимы => любые отрезки длины k $\widetilde{A}_1 \ldots \widetilde{A}_n$ линейно зависимы.

Доказательство от противного: предполагаем, что независимы, но у нас уже есть нетривиальная линейная комбинация столбцов $A_1, A_2, \ldots A_n$, равная нулю, и если мы удалим часть строк, линейная комбинация всё так же будет давать 0.

Следствие: Отрезки длины k $\widetilde{A}_1 \ldots \widetilde{A}_n$ линейно независимы => $A_1, A_2, \ldots A_n$ линейно независимы.

Утверждение 2: $rg_{line}(A) = k \quad S_{i_1} \ldots S_{i_k}$ — база строк. Тогда, если $\widetilde{A}_1 \ldots \widetilde{A}_n$ отрезки, отвечающие $S_{i_1} \ldots S_{i_k}$, линейно зависимы, то и $A_1, A_2, \ldots A_n$ линейно зависимы.

Доказательство:

н.у.о. $i_1, \ldots, i_k = 1, 2, \ldots, k$. Значит все оставшиеся - линейно комбинация. Значит я любую строчку могу записать, как линейную комбинацию наших строк:

$$s_{k+l} = \sum_{r=1}^{k} \alpha_{rl} s_r.\ a_{k+l_j} = \sum_{r=1}^{k} \alpha_{rl} a_{r_j}:$$

$\widetilde{A}_1 \ldots \widetilde{A}_n$ отрезки, отвечающие $S_{i_1} \ldots S_{i_k}$, линейно зависимы $\Leftrightarrow \exists \beta_j \in K$ не все нули.

$\sum_{j=1}^{n} b_j \widetilde{A}_j = 0$. Докажем, что с этими же β

$\sum_{j=1}^{n} b_j A_j = 0$. Первые k - нули. Докажем, что и оставшиеся нули.

Посмотим на $k+1$ координату: $\sum_{j=1}^{n} \beta_j a_{k+1_j} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \sum_{r=1}^{k} \alpha_{r1} a_{r_j} = \sum_{r=1}^{k} \alpha_{r_1} \sum_{j=1}^{n} \beta_j a_{r_j} = 0$

Далее аналогично

Теорема (о ранге матрицы)

$rg_{line}(A) = rg_{col}(A) = rg(A)$

Доказательство:
$\mathrm{rg}A = k : 1 \leq k \leq n, m$

н.у.о. Пускай первые k строк линейно независимы.

Рассмотрим отрезки столбиков, соответсвующие этим элементам

$r = \mathrm{rg}(\widetilde{A}_1 \dots \widetilde{A}_n) \leq k$. Тогда докажем, что ранг исходных столбиков не превосходит k. Пускай ранг r, тогда есть база, тогда исходные столбики тоже лин. независимы. Любой вектор не входящий в него - линейно зависимый по утверждению 2. Тогда база столбиков соответствует базе подотрезков. Откуда rg столбиков меньше либо равен рангу строк. Аналогично в обратную сторону, выиграли.

5.5 Свойства ранга. Теорема о приведении матрицы к трапецевидной

Свойства ранга:

1. $rg(A^T) = rg(A)$
2. $rg(\lambda A) = rg(A)$
3. $rg(A + B) \leq rg(A) + rg(B)$ (лайт версия т. Грассмана)
4. А и В согласованы, $rg(AB) \leq \min(rg(A), rg(B))$

Матрица трапециевидной формы (н.у.о. n <= m:)

$\begin{pmatrix} a_{11} & * & * & * & * \\ 0 & \ddots & * & * & * \\ 0 & 0 & a_{nn} & * & * \end{pmatrix}$ Очевидно любую матрицу млжно привести к трапецевидной.

6 Системы линейных уравнений.

6.1 Основные определения и понятия, теорема Кронекера-Капелли.

Обычно система записывается так: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12} + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22} + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2} + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

Матричная форма записи — $Ax = b$, где

$$A = (a_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$Ax = b$, где $A = (A_1, \dots, A_n)$ - столбики — матричная запись.

$Ax = b$ — **система однородных линейных уравнений (СЛОУ) (однородная система)**, если $b = 0$.

$Ax = b$ — **система неоднородных линейных уравнений (СЛНУ) (неоднородная система)**, если $b \neq 0$.

Система $Ax = b$ — **совместная (разрешенная)**, если $\exists x$, то есть существует решение.

Система $Ax = b$ — **несовместная (неразрешенная)**, если $\nexists x$, то есть решения не существует.

Замечание: СЛОУ всегда совместна, т.к. $x = 0$ всегда является решением.

Система $Ax = b$ — **определенная**, если есть единственное решение.

Система $Ax = b$ — **неопределенная**, если есть более одного решения.

Система $Ax = 0$ — **тривиальная**, если она определённая, то есть единственное решение $x = 0$.

Общее решение системы $Ax = b$ — $\{\forall x | Ax = b\}$, то есть множество всех его решений.

Частное решением системы $Ax = b$ — какое-то конкретное решение x, рассматриваемое в данном контексте.

Расширенная матрица системы — $(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$

Теорема Кронекера-Капелли: $Ax = b$ совместна $\Leftrightarrow \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A|b)$

$Ax = b \Leftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} x_i A_i = b$ — линейная комбинация столбцов $\Leftrightarrow b \in \operatorname{span}(A_1, \dots, A_n) \Leftrightarrow$

$\operatorname{span}(A_1, \dots, A_n) = \operatorname{span}(A_1, \dots A_n, b)$

$\operatorname{rg}(A) = \dim(\operatorname{span}(A_1, \dots, A_n)) = \dim(\operatorname{span}(A_1, \dots, A_n, b)) = \operatorname{rg}(A|b)\ Q.E.D.$

Следствие. любая СЛОУ имеет решение.

6.2 Структура общего решения СЛОУ и СЛНУ. ФСР. Альтернатива Фредгольма.

6.2.1 Структура общего решения СЛОУ и СЛНУ.

Теорема: $Ax = 0$, $u, v \in K^n$ — решения СЛОУ $\Rightarrow \forall \lambda \in K : \lambda u + v$ — тоже решение СЛОУ.

u, v — решения $\Rightarrow Au = 0, Av = 0$

$A(\lambda u + v) = \lambda Au + Av = \lambda 0 + 0 = 0 \Rightarrow \lambda u + v$ — тоже решение СЛОУ $Q.E.D.$

Следствие: общее решение СЛОУ — линейное подпространство $L \subseteq K^n$

Смотри критерии линейного подпространства.

Теорема (размерность общего решения СЛОУ): $Ax = 0$, $\operatorname{rg}(A) = k$, L — общее решение СЛОУ $\Rightarrow \dim(L) = n - k = n - \operatorname{rg}(A)$, где n — число неизвестных.

- $k = 0$:

  $A = 0\ \forall x \in K^n : Ax = 0 \Rightarrow \dim(L) = \dim(K^n) = n - 0 = n - k$

- $1 \leq k < n$:

  Тогда $\operatorname{rg}(A) = k = \operatorname{rg}_{col}(A) = \operatorname{rg}(A_1, \dots, A_n)$ — база столбцов из k элементов. Не умаляя общности переставим столбцы чтобы базисом были столбцы $A_1, \dots, A_k$, а все остальные столбцы будут их линейными комбинациями.

$A_{k+j} = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i^j A_j$, где $\alpha_i^j \in K$. (j — тоже индекс, просто для удобства записанный сверху)

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i^j A_i - A_{k+j} = 0 \Leftrightarrow u_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_2^1 \\ \vdots \\ \alpha_k^1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1^2 \\ \alpha_2^2 \\ \vdots \\ \alpha_k^2 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, u_{n-k} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{n-k} \\ \alpha_2^{n-k} \\ \vdots \\ \alpha_k^{n-k} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}$$

$u_1, \dots, u_{n-k}$ — решения $Ax = 0$, причём линейно независимые из-за нулевых координат в нижней части векторов.

Покажем, что $u_1, \dots, u_{n-k}$ — порождающая система. Пусть u — решение $Ax = 0$.

$$u = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \\ \beta_{k+1} \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \Rightarrow v = u + \sum_{i=1}^{n-k} \beta_{k+j} u_j =$$

$$= \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \\ \beta_{k+1} \\ \beta_{k+2} \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_{k+1}\alpha_1^1 \\ \beta_{k+1}\alpha_2^1 \\ \vdots \\ \beta_{k+1}\alpha_k^1 \\ -\beta_{k+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_{k+2}\alpha_1^2 \\ \beta_{k+2}\alpha_2^2 \\ \vdots \\ \beta_{k+2}\alpha_k^2 \\ 0 \\ -\beta_{k+2} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} \beta_n\alpha_1^{n-k} \\ \beta_n\alpha_2^{n-k} \\ \vdots \\ \beta_n\alpha_k^{n-k} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -\beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_k \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

v — тоже решение $Ax = 0$, так как является суммой других решений $Ax = 0$, домноженных на некоторые коэффициенты.

$Av = \gamma_1 A_1 + \dots + \gamma_k A_k = 0$ — нулевая линейная комбинация линейно независимых векторов $\Rightarrow \forall \gamma_j = 0 \Rightarrow u + \sum\limits_{i=1}^{n-k} \beta_{k+j} u_j = 0 \Rightarrow u = \sum\limits_{i=1}^{n-k} (-\beta_{k+j}) u_j \Rightarrow$

$\Rightarrow u_1, \dots, u_{n-k}$ — порождающая система $\Rightarrow u_1, \dots, u_{n-k}$ — базис $L \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim L = n - k$

- $k = n$:

  $A_1, \dots, A_n$ — линейно независимы

  $Ax = 0 \Leftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} x_i A_i = 0 \Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, n : x_i = 0 \Leftrightarrow x = 0$ — единственное решение $\Leftrightarrow \dim L = 0$

Следствие: $Ax = 0$, n — число переменных.

- $0 \leq \mathrm{rg}(A) < n \Rightarrow$ система неопределенная, имеет бесконечно много решений, образующие линейное подпространство.
- $\mathrm{rg}(A) = n \Rightarrow$ система определенная, имеет единственный корень равный нулю, то есть система тривиальная.

6.2.2 ФСР.

Фундаментальная система решения — базис линейного подпространства решений СЛОУ.

6.3 Теорема о структуре общего решения системы линейных неоднородных уравнений (СЛНУ), следствия. Альтернатива Фредгольма.

Теорема (о структуре решения СЛНУ): Пусть Ax = b совместна, x_0 — частное решение СЛНУ: x — решение СЛНУ $\Leftrightarrow x = x_0 + u$, где u — некоторое решение $Ax = 0$

- $\Rightarrow$:

  $Ax = b$, $Ax_0 = b \Rightarrow A(x - x_0) = 0 \Rightarrow u = x - x_0$ — решение $Ax = 0$

- $\Leftarrow$:

  $x = x_0 + u$, $Au = 0$, $Ax_0 = b \Rightarrow Ax = A(x_0 + u) = b + 0 = b \Rightarrow x$ — решение $Ax = b$

Следствия:

1. Общее решение $Ax = b$ — линейное многообразие $P = L + x_0$, где x_0 — частное решение СЛНУ, $L = \mathrm{span}(u_1, \dots, u_{n-k})$ — общее решение $Ax = 0$

$\dim(P) = \dim(L)$ — размерность общего решения СЛНУ.

2. • $0 \leq \text{rg}(A) < n \Rightarrow Ax = b$ имеет бесконечно много решений, $\dim(P) = n - \text{rg}(A)$
   • $\text{rg}(A) = n \Rightarrow Ax = b$ имеет единственное решение, $\dim(P) = 0$

Теорема (Альтернатива Фредгольма): Пусть $A_{m\times n} \neq 0$, $x \in K^n$, $y \in K^m$: Либо $\forall b \in K^m : Ax = b$ имеет решение, либо $A^T y = 0$ нетривиальна.

То есть, $\forall b \in K^m$, существует решение $Ax = b \Leftrightarrow A^T y = 0$ тривиальна.

- $\Rightarrow$

  $\forall b \in K^m Ax = b$ совместно $\Leftrightarrow b = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i A_i \Rightarrow b \in span(A_1, \ldots, A_n)$

  Пусть $b = E_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, где $a_j = 1$ - элемент j-ой строки

  $E_j \in \text{span}(A_1, \ldots, A_n)$

  Заметим, что $K^m \subset span(A_1, \ldots A_m) \subset K^m$, потому что любой базисный вектор содержится в нашей оболочке. Откуда:

  $span(A_1, \ldots A_n) = K^m \Rightarrow rgA = m = rgA^T \Rightarrow A^T y = 0$ будем иметь одно решение, по ранее сказанной теореме.

- $\Leftarrow$: Заметим, что все переходы сверху работают в обе стороны.

6.4 Метод Гаусса решения СЛАУ

$Ax = b$.

Элементарным преобразованием системы будем называть:

1. добавление / удаление уравнения с нулевыми коэффициентами и нулевым свободным членом.
2. изменение нумераций уравнений.
3. умножение $\forall$ уравнения на $\forall \lambda \in K, \lambda \neq 0$.
4. замена $\forall$ уравнения на его сумму с другим уравнением.
5. изменение нумерации переменных.

Замечание:

1. все элементарные преобразования приводят к эквивалентной системе.
2. все элементарные преобразования эквиваленты элементарным преобразованиям $A|b$ и перестановкой в ней столбцов (пункт 5).

Теорема (прямой ход метода Гаусса)

$\forall Ax = b$

Элементарными преобразованиями системы исходная система может быть замена на эквивалентную систему, матрица которой будет иметь трапециевидную форму.

- Находим в необработанной части матрицы самую левую верхнюю ненулевую ячейку. Переставляем её в самый левый верхний угол необработанной части матрицы.
- Отнимаем от всех строчек, ниже первой необработанной, первую необработанную, домноженную на нужный коэффициент, чтобы первый столбец необработанной части оказался заполненным нулями, кроме первой ячейки.
- Отмечаем верхнюю необработанную строчку и левый необработанный столбец, как обработанные.

Метод Гаусса решения СЛАУ:

1. Прямой ход

   См. теорему о приведении матрицы к трапециевидной форме. Проводить её мы будем с расширенной матрицей системы. Один лишь нюанс в том, что переставлять столбец B ни с чем нельзя, то есть на нём мы заканчиваем алгоритм.

2. Обратный ход

   (a) Вид матрицы треугольный

   Обнулим последний столбец при помощи последней строки:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & 0 & b_1 - b_n\dfrac{a_{2n}}{a_{nn}} \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 & b_2 - b_n\dfrac{a_{2n}}{a_{nn}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

   Повторим для предпоследней строки и столбца и так далее. В конце концов придём к виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & b'_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b'_n \end{array}\right)$$

Значит $\begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix}$ — решение СЛАУ.

(b) Вид матрицы не треугольный

Возьму из матрицы треугольник, а остальные переменные временно занулим. Так найдем одно решение.

6.5 Нахождение обратной матрицы методом Гаусса.

$|A_{n\times n}|$. Найти $A^{-1}_{n\times n}$, такую, что $A \times A^{-1} = E$

A^{-1} - n неизвестных столбцов. $A^{-1} = (X_1, \ldots, X_n) = X$ $\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$

Заметим, что A^{-1} - решение уравнения $AX = E \Leftrightarrow \begin{cases} AX_1 = E_1 \\ AX_2 = E_2 \\ \vdots \\ AX_n = E_n \end{cases}$

В процессе нахождения неизвестных столбцов мы делаем с левой частью матрицы одни и те же преобразования. Давайте решать n систем одновременно:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{array}\right)$$

Теорема. (о существовании обратной матрицы)

Дано: матрица $A_{n\times n}$

$\exists A^{-1}$ (A обратима) $\Leftrightarrow rgA = n$

Причем A^{-1} может быть найден методом Гаусса.

Доказательство:
Такая A^{-1} если есть решения $AX_i = E_i$, это значит, что $\text{rg}(A|E_i) = \text{rg}A$, откуда каждый E_i в спаме. Откуда, $rgA = n$.

Следствие. Дано $A_{n\times n}, Ax = b$. A обратимо $\Leftrightarrow$ существует единственное решение СЛНУ. Причем, $x = A^{-1}b$

A обратима $\Leftrightarrow rgA = n \Leftrightarrow$ существует единственное решение СЛНУ $\Leftrightarrow A^{-1}$.

$Ax = b \Leftrightarrow A(A^{-1}b) = b \Leftrightarrow b = b$ Q.E.D

Теорема (о ранге произведения матрицы и обратимой матрицы)

$A_{n\times n}$, A - обратима, $B_{m\times n} \Rightarrow \begin{cases} \text{rg}(AB) = \text{rg}B \\ \text{rg}(BA) = \text{rg}B \end{cases}$

Доказательство:
$\text{rg}(AB) \le (\ \text{rg}A, \text{rg}B) \le \text{rg}B$.

$\text{rg}B = \text{rg}EB = \text{rg}(A^{-1}AB) \le rg(AB) \le \text{rg}B$

6.6 Геометрическая интерпретация СЛАУ

TODO

6.7 Матрица перехода от старого базиса к новому. Связь координат вектора в разных базисах.

$V, e_1, e_2, \ldots, e_n$ - старый базис - E.

$e'_1, e'_2, \ldots e'_n$ - новый базис - E'.

$x \in V \leftrightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$ - координаты в базисе E.

$x \in V \leftrightarrow x = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \in K^n$ - координаты в базисе E'.

$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i$.

Давайте представим e'_j через старый базис: $T_j = \begin{pmatrix} t_{1j} \\ \vdots \\ t_{nj} \end{pmatrix}$ - координаты в базисе e.

$T = T_{e \to e'} = (T_1, T_2, \dots, T_n)$

$(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) T_{e \to e'}$

Свойства T:

1. $\mathrm{rg} T = n$ (T обратима)
2. T^{-1} - матрица перехода из e'_1 вe_1.

   Пусть B - матрица перехода от е' к е.

   $(e_1, \dots, e_n) = (e'_1, \dots, e'_n)B = ((e_1, \dots, e_n)T)B = (e_1, \dots, e_n)(BT)$, откуда $BT = 1$, откуда $B = T^{-1}$
3. связь координат вектора в разных базисах:

   $x \leftrightarrow X$ в старом базисе

   $x \leftrightarrow X'$ в новом базисе

   $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum\limits_{j=1}^{n} x'_j e'_j = \sum\limits_{j=1}^{n} x'_j \sum\limits_{i=1}^{n} t_{ij} e_j = \sum\limits_{i=1}^{n} (\sum\limits_{j=1}^{n} t_{ij} e_i)$

   т.е координаты определяются единственный образом

   $\forall i = 1 \dots n : x_i = \sum\limits_{j=1}^{n} t_{ij} x'_j = (TX')_i$

   $X' = T^{-1} X$

7 Определители.

7.1 Полилинейные формы.

7.1.1 Полилинейные формы.

$\dim V = n$ - лин. пространство над полем K

$f : V \times V \times \ldots \times V \to K$ (p штук) - называется **полилинейной** формой (функцией), если она линейна по каждой своей координате

$f(\xi_1, \ldots, \xi_p) =$ число в K.

$\forall \lambda \in K, \forall \psi, \mu \in V : f(\ldots, \psi + \lambda\mu, \ldots) = f(\ldots, \psi, \ldots) + \lambda f(\ldots, \mu, \ldots)$

Правило/Соглашение Эйнштейна: $x^i e_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x e_i$ - меняем обозначение $\xi_1, \ldots, \xi_p \in V$.

$$\xi_j = \xi_j^i e_i \leftrightarrow \begin{pmatrix} \xi_j^1 \\ \vdots \\ \xi_j^n \end{pmatrix} \in K^n$$

$f(\xi_1, \ldots, \xi_p) = f(\xi_1^{i_1} e_{i_1}, \xi_2^{i_2} e_{i_2}, \ldots, \xi i_{p_p} e_{i_p}) = \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} \ldots \xi_p^{i_p} f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p})$

Чтобы задать полилинейную форму надо задать значение в базисе и все.

7.1.2 Антисимметричные полилинейные формы.

Полилинейная форма называется **антисимметричной**, если при подстановке в неё двух одинаковых аргументов, результат будет равен нулю.

Утв. f антисимметрична $\Leftrightarrow \forall (i, j) : f(\ldots, \xi_i, \ldots, \xi_j, \ldots) = -f(\ldots, \xi_j, \ldots, \xi_i, \ldots)$.

Доказательство:
$f(\ldots, \xi_i + \xi_j, \ldots, \xi_i + \xi_j, \ldots) = 0$

Разложим через линейность:

$f(\ldots, \xi_i, \ldots, \xi_j, \ldots) + f(\ldots, \xi_i, \ldots, \xi_j, \ldots) = 0$. Откуда уже следует искомое.

В обратную сторону $f(\ldots, \xi, \ldots, \xi_i, \ldots) = -f(\ldots, \xi, \ldots, \xi_i, \ldots)$, откуда уже следует искомое. Q.E.D

7.1.3 Подстановки

$\varphi : (1, \ldots, n) \to (1, \ldots, n)$ подстановка. Удобнее всего показывать стрелочками. Перестановка - образ.

φ, ψ - 2 подстановки. Произведением перестановок назовем образ композиции отображений.

Произведение ассоциативно, но не коммутативно.

Если φ - подстановка, то φ^{-1} - взаимно однозначная и взаимообратная.

Транспозиция элементов перестановки σ называется подстановка меняющая местами 2 эл-та перестановки: $(i_1, \ldots, i_a, \ldots, i_b, \ldots, i_n)$ перейдет в $(i_1, \ldots, i_b, \ldots, i_a, \ldots, i_n)$

Возьму перестановку. Можно привести к тривиальной. **Алгоритм:** Найдем 1, вставим в начало, найдем 2, вставим на второе место и так далее.

Назову перестановку **четной** или **нечетной**, если я привожу к тривиальной за четное или соответственно нечетное количество транспозиций.

$$\varepsilon(\sigma) = \begin{cases} 0, \sigma - \text{четная} \\ 1, \sigma - \text{нечетная} \end{cases}$$

$(-1)^{\varepsilon(\sigma)}$ - знак перестановки

$f(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \sum\limits_{\sigma \in S_n} \xi_1^{i_1} \ldots \xi_n^{i_n} \alpha_{i_1 \ldots i_n} = a \sum\limits_{\sigma \in S_n} \xi_1^{i_1} \ldots \xi_n^{i_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma)}$.

где $const = a = f(e_1, \ldots, e_n)$.

n - форму, у которой значение на упорядоченном наборе базиса векторов $e_1, \ldots, e_n$. равно 1 назовем D.

D - n форма, т.к $D(e_1, \ldots, e_n) = 1 : \forall \xi_1 \ldots \xi_n : D(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \sum\limits_{\sigma \in S_n} \xi_1^{i_1} \ldots \xi_n^{i_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma)}$

$= \det(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ - **определитель системы векторов**.

Замечания:

1. D, $\forall f$ n-форма $f = \alpha D$, где $\alpha = f(e_1, \ldots, e_n)$.
2. форма D существует единственная.
3. Определение D-формы зависит от базиса, т.кю чтобы её определить должен быть зафиксирован базис.

7.1.4 Определитель матрицы

D - n - форма $D(E_1, \ldots, E_n) = 1$

$\forall A_1, \ldots A_n \in K^n$

$D(A_1, \ldots, A_n) = \sum\limits_{\sigma \in S_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} a_{i_1 1} \ldots a_{i_n n} = detA$

7.2 Определитель числовой матрице. Теорема об определителе транспонированной, формулы для вычисления определителей первого и второго порядка.

7.2.1 Определитель матрицы, вторая формула.

$inv(\sigma) =$ число инверсий в перестановке

Теорема:

1. $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$
2. Любая транспозиция элементов может быть получена за нечётное число транспозиций соседних элементов
3. транспозиция любых двух соседних элементов меняет число инверсий на 1
4. $(-1)^{\varepsilon(\sigma)} = (-1)^{inv(\sigma)}$

Доказательство:

1. Получим σ из тривиальной перестановки транспозициями. Применим эти транспозиции в другую сторону. Получим обратную перестановку. Их одно и тоже число.
2. Хотим поменять местами i_α и i_β. приблизим i_β к i_α k транспозициями соседних элементов. Поменяем i_α и i_β местами. Отодвинем i_α от i_β k транспозициями. Всего $2k+1$ транспозиций.
3. Пусть перестановка имеет вид A, i_α, i_β, B, где A и B — части перестановки. i_α образует m инверсий с A, i_β образует k инверсий с B. Транспозиция i_α и i_β или создаст или уничтожит их инверсию и не изменит m или k.
4. Пусть σ четная = нечетное число соседних транспозиций = четное число соседних транспозиций приводя к тривиал., т.е число инверсий изменилось на четное число. число инверсий в конце 0, а значит изначально 0, а значит $inv\sigma =$ четное число. Пусть σ - нечетная = нечетное число соседних транспозиций = нечетное число транспозиций приводит к тривиальной перстановке. Т.е число транспозиций уменьшилось на неч. число единиц, откуда и следует искомое.

Вторая формула для $\det A$: $\det A = \sum\limits_{\sigma \in S_n} (-1)^{inv(\sigma)} a_{i_1 1}, \dots, a_{i_n n}$, где $\sigma = (i_1, \dots, i_n)$.

7.2.2 Теорема об определителе транспонированной матрицы. Свойства определителя

1. $\det A^T = \det A$

$A^T = \begin{pmatrix} A_1^T \\ \vdots \\ A_n^T \end{pmatrix}$

$\det A^T = \sum\limits_{\sigma \in S_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} a_{1i_1}, \dots, a_{n,i_n}, \sigma = (i_1, \dots, i_n) = (\varphi(1), \dots, \varphi(n)) = \varphi(1, \dots, n) \Leftrightarrow$
$(\det A^T = \sum\limits_{\sigma \in S_N} (-1)^{\varepsilon(\sigma) a_{j+1}}$

Следствие: $detA = \sum\limits_{\sigma \in S_n} (-1)^{inv(\sigma) a_{1i_1} \dots a_{ni_n}}$, для $\sigma = (i_1 \dots i_n)$

Замечание: все свойства, сформулированные для столбцов, верны и для строк.

2. $\det(\dots, \lambda A_i, \dots) = \lambda \det(\dots, A_i, \dots)$, $\lambda \in K$

   $\det(\dots, A_i + A_j, \dots, A_k, \dots) = \det(\dots, A_i, \dots, A_k, \dots) + \det(\dots, A_j, \dots, A_k, \dots)$

   Доказательство:

   $\det A = D(A_1, \dots, A_n)$ - полилинейная n - форма, откуда все и следует

3. $\det(\dots 0 \dots) = 0$ - частный случай $\lambda = 0$.

4. $\det(\dots, A_i, \dots, A_j, \dots) = -\det(\dots, A_j, \dots, A_i, \dots)$

   $\det(\dots, A_i, \dots, A_i, \dots) = 0$

   Доказательство: det — антисимметричная

5. $\det(\dots A_i \dots A_j \dots) = \det(\dots A_i + \lambda A_j \dots A_j \dots)$

   Доказательство:

   $\det(\dots A_i + \lambda A_j \dots A_j \dots) = \det(\dots A_i + \dots A_j \dots) + \det(\dots \lambda A_j \dots A_j \dots) = \det(\dots A_i + \dots A_j \dots) + \lambda \cdot 0$ Q.E.D

6. Определитель ступенчатой (блочно-диагональной) матрицы:

   $$\det \begin{pmatrix} A^1 & 0 & \dots & 0 \\ * & A^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \dots & A^m \end{pmatrix} = \prod_{k=1}^{m} \det A^k$$

   $A^k = (a^k_{i_j})$

   Доказательство:

   - База $m = 2$: $det \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ * & A_2 \end{pmatrix}$

     Решим простой случай $A_1 = 1, A_2 = 1$:

$\det\begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ * & E_2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} = \det E = 1$

Усложним. Пусть у нас теперь только одна из двух матриц единичная(E_{k_2} - единичная матрица размера $k \times k$):

$\det\begin{pmatrix} B & 0 \\ * & E_{k_2} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & E_{k_2} \end{pmatrix} = f(B_1, \dots, B_{k_1}) = f(E_1, \dots, E_{k_1}) \det B = \det B$

f — k_1-форма, значит полилинейная и антисимметричная. (f - функция, которая для заданной B находит определитель матрицы)

$f = \alpha D$, $\alpha = f(e_1, \dots, e_{k_1})$

$f(E_1, \dots, E_{k_1}) = \det\begin{pmatrix} E_{k_1} & 0 \\ * & E_{k_2} \end{pmatrix} = 1$

Усложним ещё раз:

$\det\begin{pmatrix} B & 0 \\ * & C \end{pmatrix} = g(C_1, \dots, C_{k_2}) = g(E_1, \dots, E_{k_2}) \cdot \det C = \det B \det C$, что следует из того, что g - полилинейная форма и из прошлого

- Индукционный переход Пусть верно для $m-1$, тогда докажем, что верно для m:

$$\det\begin{pmatrix} A^1 & 0 & \dots & 0 \\ * & A^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \dots & A^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ * & A^m \end{pmatrix} = \det A^m \cdot \det A = \prod_{k=1}^{m} \det A^k,$$

где $A = \begin{pmatrix} A^1 & 0 & \dots & 0 \\ * & A^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \dots & A^{m-1} \end{pmatrix}$

Следствия:

(a) $\det\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ * & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$

(b) $\mathrm{rg} A = n \Rightarrow \det A \neq 0$

Просто преобразуем A методом Гаусса и получим трапециевидную. $\mathrm{rg} A = n \Rightarrow$ после преобразований она будет треугольной, значит на диагонали нет нулей, значит их произведение не 0.

Замечание: в силу свойства 1, всё сказанное верно и для верхнетреугольных матриц.

7. $\det A = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} =$, для какого-то столбца j.

   $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$, где M_{ij} - минор.

   $A = \begin{pmatrix} I \dots & a_{1j} & II \\ a_{1n} \dots & a_{ij} & \dots a_{in} \\ III & a_{mj} & IV \end{pmatrix}$, тогда $M_{ij} = \det \left(\begin{array}{c|c} I & II \\ \hline III & IV \end{array} \right)$

   Докажем сначала для 1 столбца:

   $\det A = \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} A_{i1}$

   $$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & * & \dots & * \\ a_{12} & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & * & \dots & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & * & \dots & * \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & * & \dots & * \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & * & \dots & * \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} 0 & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

   $a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + a_{31}M_{31} - \dots + (-1)^{n-1}a_{n1}M_{n1} = \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} M_{i1}a_{i1}$

   Докажем для произвольного j-ого столбца

   $\det A = \det(\dots A_j \dots) = (-1)^{j-1} \det(A_j A_1 \dots A_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{j-1}(-1)^{i+1} a_{ij}M_{ij}$

8. $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik}$ (j — фиксированный номер столбца, k — фиксированный номер другого столбца.) $= 0 = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj}$ (i — фиксированный номер строки, k — фиксированный номер другой строки)

   Доказательство:

   $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik} = \det(A_1 \dots A_i \dots A_j \dots A_n)$

   $\det A = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = \det(A_1 \dots A_k \dots A_j \dots A_n)$

9. $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

   $AB = (AB_1, \dots, AB_n)$, $B = (B_1, \dots, B_n)$

   $\det(A \cdot B) = f(B_1, \dots, B_n)$ (полилинейная, антисимметричная n - форма, $f = \alpha D) = f(E_1, \dots, E_n) \cdot \det B = \det(A \cdot E) \cdot \det B = \det a \cdot \det B$

7.3 Формула для обратной матрицы. Теорема Крамера.

Матрица $A_{n\times n}$ — **невырожденная**, если $\det A \neq 0$

Теорема: (об обратной матрице)

Дано $A_{n\times n}$. A обратима $\Leftrightarrow$ A невырождена.

Причем, $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$, A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij}

Матрица в формуле называется союзной, взаимной, или присоединяемой.

Доказательство:

- $\Rightarrow$

  A обратима $\Rightarrow \exists A^{-1}$. $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

  $\Rightarrow \det(A^{-1}A) = \det E = \det A^{-1} \cdot \det A$ m откуда уже следует искомое.

- $\Leftarrow$

  A - невырожденная. $\det A \neq 0$. Покажем, что матрица $B = \dfrac{1}{\det A}(A_{ij})^T$

  $$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} =$$

  $$= \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j} & \dots & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}A_{nj} \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j}A_{1j} & \dots & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j}A_{nj} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj}A_{nj} & \dots & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj}A_{nj} \end{pmatrix} =$$

  (Все не диагональные ячейки по 8 свойству — нули, а все диагональные по 7 свойству — $\det A$) $= E \Rightarrow B = A^{-1}$

Следствия:

1. A обратима $\Leftrightarrow \mathrm{rg} A = n \Leftrightarrow detA \neq 0$

2. $detA^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

3. Теорема Краммера

$Ax = b$. СЛНУ, $A_{n\times n}$

$\exists!$ решение $\Leftrightarrow$ A невырожденная.

Причём, $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$, где $\Delta = \det A$, $\Delta_i = \det(A_1, \ldots, b, \ldots, A_n)$ (b занимает i-й столбец)

Доказательство:

$\exists!$ решение $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rg}A = n \Leftrightarrow \det A \neq 0$, то есть A - невырожденная

$$x = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & \ldots & A_{n2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} A_{i1}b_1 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} A_{i2}b_2 \\ \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} A_{i1}b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \det(b, A_2 \ldots A_n) \\ \det(A_1, b \ldots A_n) \\ \vdots \\ \det(A_1, A_2 \ldots b) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\Delta_1}{\Delta} \\ \dfrac{\Delta_2}{\Delta} \\ \vdots \\ \dfrac{\Delta_n}{\Delta} \end{pmatrix} = x$$

7.4 Теорема Лапласа

$A = (a_{ij})_{n\times n}$

$1 \leq k \leq n$: $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$, $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$

$i_s \in (1, \ldots, n)$, $j_t \in (1, \ldots, n)$

Составим из элементов матрицы A новую матрицу, состоящую из элементов, находящихся на пересечении k выбранных строк и k выбранных столбцов

Минор k-того порядка $M^{j_1, \ldots, j_k}_{i_1, \ldots, i_k} = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \ldots & a_{i_n j_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_1 j_n} & \ldots & a_{i_n j_n} \end{vmatrix}$

$\overline{M}^{j_1,\dots,j_k}_{i_1,\dots,i_k} = M^{t_1,\dots,t_m}_{s_1,\dots,s_m}$

Теорема Лапласа.

$A_{n\times n}$, k - фиксированное от 1 до n.

$\det A = \sum\limits_{j_1<\dots<j_k} \overline{M}^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_k} A^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_k}$

Доказательство:

Пускай k выбрано от 1 до n и фиксирован набор строк. Тогда:

$$\sum_{j_1<\dots<j_k} (-1)^{i_1+i_2+\dots+i_k+j_1+j_2+\dots j_k} \overline{M}^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_k} M^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_k} = \det A$$

- База индукции

  Свойство 7: $\sum\limits_j (-1)^{i+j} \overline{M}^i_j M^i_j = \det A$

- Индукционное предположение

  Пусть формула верна для $k-1$:

  Фиксированные $i_1,\dots,i_{k-1}$: $\det A = \sum\limits_{j_1<j_2<\dots<j_{k-1}} (-1)^{i_1+\dots+i_{k-1}+j_1+\dots+j_{k-1}} \overline{M}^{i_1,\dots,i_{k-1}}_{j_1,\dots,j_{k-1}} M^{i_1,\dots,i_{k-1}}_{j_1,\dots,j_{k-1}}$

- Индукционный переход:

  Докажем для k.

  Пусть фиксированы $i_1 < i_2 < \dots < i_{k-1} < i_k$. Всё кроме i_k верно по инд. предположению.

  $\overline{M}^{i_1,\dots,i_{k-1}}_{j_1,\dots,j_{k-1}} = M^{\dots,i_k,\dots}_{\dots} = \sum\limits_{j\in(1,\dots,n)\setminus(j_1,\dots,j_{k-1})} a_{i_k j}(-1)^{\#i_k+\#i_j} \overline{M}^{i_1,\dots,i_{k-1},i_k}_{j_1,\dots,j_{k-1}}$

  $\#i_k = i_k - (k-1)$

  $\det A =$

  $$= \sum_{j_1<\dots<j_k} (-1)^{i_1+\dots+i_k-1+j_1+\dots+j_k-1} \sum_{j\in(1,\dots,n)\setminus(j_1,\dots,j_k m)} (-1)^{i_k-(k-1)+\#j} a_{i_k j} \overline{M}^{i_1+\dots i_k}_{j_1,j_2,\dots,j_{k-1}} M^{i_1\dots i_{k-1}}_{j_1,\dots,j_{k-1}}$$

  $$= \sum_{\tilde{j}_1<\dots<\tilde{j}_k} (-1)^{i_1+\dots+i_k-(k-1)} \sum_{s=1}^{k} a_{i_k\tilde{j}_s} \overline{M}^{i_1\dots i_{k-1},i_k}_{\tilde{j}_1,\dots,\tilde{j}_s,\dots,\tilde{j}_k} M^{i_1\dots i_{k-1}}_{\tilde{j}_1,\dots,\tilde{j}_k} (-1)^{\tilde{j}_s-(s-1)} =$$

  $$= \sum_{\tilde{j}_1<\dots<\tilde{j}_k} (-1)^{i_1+\dots+i_k+\tilde{j}_1+\dots+\tilde{j}_k} \overline{M}^{i_1,\dots,i_k}_{\tilde{j}_1,\dots,\tilde{j}_k} \sum_{s=1}^{k} (-1)^{-(k-1)-(s-1)} a_{i_k\tilde{j}_s} M^{i_1,\dots,i_{k-1}}_{\tilde{j}_1,\dots,\tilde{j}_k} =$$

$$= \sum_{\tilde{j}_1 < \ldots < \tilde{j}_k} (-1)^{i_1+\ldots+i_k+\tilde{j}_1+\ldots+\tilde{j}_k} \overline{M}^{i_1,\ldots,i_k}_{\tilde{j}_1,\ldots,\tilde{j}_k} M^{i_1,\ldots,i_k}_{\tilde{j}_1,\ldots,\tilde{j}_k} = \det A \text{ — верно и для } k$$

Замечание.

$$\det \left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline * & A_2 \end{array}\right) = \det A_1 \det A_2 = M^{i_1,\ldots,i_k}_{j_1,\ldots,j_k} \overline{M}^{i_1,\ldots,i_k}_{j_1,\ldots,j_k}$$

7.5 Второе определение ранга матрицы.

$A_{m\times n}$

$M^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_k}$,

$\mathrm{rg}A$ называется наибольший порядок минора отличного от нуля, то есть $\mathrm{rg}A = k$, если существует минор не равный нулю, а любой минор большего порядка равен 0. Такой минор является **базисным**, а строки и столбцы, входящие в этот минор — **базисными**.

Базисный минор не определён единственным образом.

Замечание. Если все миноры $k+1$ порядка 0, то все его миноры порядка больше $k+1$ тоже 0.(очевидно из разложения по строчке или столбцу)

Теорема (об эквивалентности двух определений ранга)

Хотим доказать, что наши определения равносильны:

$\mathrm{rg}A_{\text{def 1}} = \mathrm{rg}A_{\text{def 2}}$

$\mathrm{rg}A_{\text{def 1}} = k$, $1 \le k \le \min(m, n)$

k линейно нез., k линейно нез.

Добавляя любые другие столбики к ним мы будем получать линейно зависимые комбинации.

Если отрезки зависимы и исходные стобцы зависимы.

Поэтому минор $M^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_k} = \det B$ - получается $\mathrm{rg}B = k$, откуда получаем что определитель не 0.

Составим любой минор порядка $k+s$.

$M^{\tilde{i}_1,\ldots,\tilde{i}_{k+s}}_{\tilde{j}_1,\ldots,\tilde{j}_{k+s}} = \det(\tilde{A}_{\tilde{j}_1} \ldots \tilde{A}_{\tilde{j}_{k+s}})$ — отрезки столбцов A.

$\mathrm{rg}A = k \Rightarrow \tilde{A}_{\tilde{j}_1} \ldots \tilde{A}_{\tilde{j}_{k+s}}$ — линейно зависимы $\Rightarrow$

$\Rightarrow \det(\tilde{A}_{\tilde{j}_1} \dots \tilde{A}_{\tilde{j}_{k+s}}) = M^{\tilde{i}_1,\dots,\tilde{i}_{k+s}}_{\tilde{j}_1,\dots,\tilde{j}_{k+s}} = 0 \Rightarrow \mathrm{rg}A_{\text{def } 2} = k$

Метод окаймляющих миноров.

$A \neq \not{0}$

Алгоритм:

Берем смотрим на минор k-ого порядка:

1. Если все его (окаймляющие прошлого этапа) миноры 0, то $\mathrm{rg}A = k$.
2. Если существует минор не равный 0, тогда k++ и повторить алгоритм

Окаймляющие миноры - миноры, в разложениях по строкам и столбцов которых присутствует данный минор

Пусть $M^{i_1,\dots,i_k}_{j_1,\dots,j_k} \neq 0$, а все его окаймляющие его равны 0 $\mathrm{rg}A = k$

$$\forall i \forall j \notin (j_1, \dots, j_k) : \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \dots & a_{i_1 j_k} & a_{i_1 j} \\ a_{i_2 j_1} & \dots & a_{i_2 j_k} & a_{i_2 j} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i_k j_1} & \dots & a_{i_k j_k} & a_{i_k j} \\ a_{i j_1} & \dots & a_{i j_k} & a_{ij} \end{vmatrix} = 0$$

Если i совпадает с каким-либо индексом из $i_1, \dots, i_k$, то это определитель с равными строками, значит нулевой. Если i не совпадает ни с одним индексом из $i_1, \dots, i_k$, то тогда это окаймляющий минор $(k+1)$-го порядка, который нулевой по условию.

Распишем определитель по последней строке.

$$0 = \sum_{s=1}^{k} a_{ij_s} A_{ij_s} + a_{ij}(-1)^{k+1+k+1} M^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_k}$$

$$\forall i : a_{ij} = 0 \sum_{s=1}^{k} a_{ij_s} A_{i,j_s} = \sum_{s=1}^{k} a_{ij_S} \lambda_s \Leftrightarrow A_j = \sum_{s=1}^{k} A_{j_s} \lambda s$$

мы показали, что для $\forall j \in \{j_1, \dots, j_k\}$ — линейная комбинация соответствующих столбцов.

7.6 Определитель n-ого порядка.

Приведение к треугольному виду.

$$\Delta_n \begin{pmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \dots & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x-a_1 & a_2-x & 0 & \dots & 0 \\ x-a_1 & 0 & a_3-x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x-a_1 & 0 & 0 & \dots & a_n-x \end{pmatrix} =$$

$$= \prod_{k=1}^{n}(a_k - x) \begin{vmatrix} \frac{a_1}{a_1-x} & \frac{x}{a_2-x} & \frac{x}{a_3-x} & \dots & \frac{x}{a_n-x} \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \prod_{k=1}^{n}(a_k - x) \begin{vmatrix} \sum & \frac{x}{a_2-x} & \frac{x}{a_3-x} & \dots & \frac{x}{a_n-x} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$ Откуда уже можно легко посчитать определитель.

Метод выделения линейных множителей

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = p(x_i)$$ Заметим, что когда $x_i = x_j$ определитель равен 0. Тогда получаем, что определитель должен делиться на каждый из корней(раскладывается в произведение корней)

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = p(x_i) = (x_1 - x_2)\cdot(x_1 - x_3)\cdot \ldots \cdot (x_1 - x_n)\cdot(x_2 - x_3)\cdot \ldots \cdot (x_{n-1} - x_n)C$$

$$\Delta_n = (x_n - x_1)(x_n - x_2)\dots(x_n - x_{n-1})c' = \Delta_{n-1}x_n^{n-1} + \dots$$

$$c' = \Delta_{n-1}$$

$$\Delta_n = (x_n - x_1)(x_n - x_2)\dots(x_n - x_{n-1})(x_{n-1} - x_n)\dots(x_{n-1} - x_{n-2})\Delta_{n-2} =$$

$= \prod\limits_{i>j}(x_i - x_j)$

Метод реккурентных соотношений

Возвратная последовательность. Пример. $x_2 = 2, x_1 = 4$. Реккурентная послеждовательность задается выражением $x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}$. И ее решая можно получить корень

Пример решения. $x_1 = 3, x_2 = 9, x_n = 3x_{n-1} - \dfrac{9}{4}x_{n-2}, n > 2$.

Подставим вместо $x_n = \lambda^n$ (не спрашивайте почему, там огромный кусок теорий и объяснений)

$\lambda^n = 3\lambda^{n-1} + \dfrac{9}{4}\lambda^{n-2}$. Переведем в квадратное, решим, найдем корни. Получим $\lambda_{1,2} = \dfrac{3}{2}$

Тк лямбды совпали, то второй корень умножаем на n:

$x_n = c_1\left(\dfrac{3}{2}\right)^n + c_2 n\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$

$x_1 = c_1(\dfrac{3}{2}) + c_2\dfrac{3}{2}$; $x_2 = c_1(\dfrac{3}{2})^2 + c_2 2(\dfrac{3}{2})^2$

Находим c_1, c_2 и получаем общую реккуренту и побеждаем.

$\Delta_n = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 2 & 5 & 3 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 2(-1)^{n+(n-1)} \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 2 & 5 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 5(-1)^{n+n}\Delta n - 1 = -6\Delta_{n-2} + 5\Delta_{n-1}$

$\lambda^n + 6\lambda^{n-2} - 5\lambda^{n-1} = 0$

$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3$

$\Delta_n = 2^n c_1 + 3^n c_2$

$$\begin{cases} \Delta_1 = 5 = 2c_1 + 3c_2 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 19 = 4c_1 + 9c_{@} \end{cases}$$

Откуда $\Delta_n = -2^{n+1} + 3^{n+1}$.

Метод представления в виде суммы

$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \dots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \dots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}$ Разложим определитель, как сумму определителей.

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \dots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \dots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \dots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \dots & a_2+ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \dots & a_n+ \end{vmatrix}$$

Повторяя так большее количество так и зануляя определители победим.

Метод изменения элементов det

$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11}+x & \dots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & \dots & a_{2n}+x \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+x & \dots & a_{nn}+x \end{vmatrix}$ Начну раскладывать, как в прошлом пункте и получу, что

$\Delta' = \Delta + x \sum\limits_{j,j=1}^{n} A_{ij}$