Дифференциальные уравнения. Лекции

Версия: 23 декабря 2025 г.

Учебное пособие для студентов Университета ИТМО специальностей с повышенной подготовкой по математике.

Лекторы: Бабушкин М. В., Борель Л. В.

Оглавление

Обозначения

- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ — множества натуральных, неотрицательных целых, целых, вещественных, комплексных чисел соответственно.
- $\mathbb{R}^n_r$ — n-мерное вещественное арифметическое пространство, общий элемент которого обозначается через $r = [r_1, r_2, \ldots, r_n]^T$.
- $|r| = \max\{|r_1|, |r_2|, \ldots, |r_n|\}$ — норма вектора $r = [r_1, r_2, \ldots, r_n]^T \in \mathbb{R}^n$.
- $E = \langle a, b\rangle$ означает, что $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, $E \in \{(a,b), [a,b) \setminus \{-\infty\}, (a,b] \setminus \{+\infty\}, [a,b] \setminus \{\pm\infty\}\}$.
- $[a:b] = [a,b] \cap \mathbb{Z}$.
- $a \cdot b$ — скалярное произведение векторов $a, b \in \mathbb{R}^n$.
- $C(X)$ — пространство непрерывных функций $f\colon X \to \mathbb{R}$.
- $C^k(X)$ — пространство k раз непрерывно дифференцируемых функций $f\colon X \to \mathbb{R}$.
- $C(X \to Y)$ — пространство непрерывных отображений $f\colon X \to Y$.
- $C^k(X \to Y)$ — пространство k раз непрерывно дифференцируемых отображений $f\colon X \to Y$.
- $C\langle a, b\rangle$ — то же, что и $C(\langle a, b\rangle)$ (аналогично понимаются и другие подобные обозначения).
- $\operatorname{dom} f$ — область определения функции f.
- f' — матрица Якоби отображения f.
- $\operatorname{Lip} D$ — множество функций, удовлетворяющих условию Липшица на множестве D
- $\operatorname{Lip}_r D$ — множество функций, удовлетворяющих условию Липшица по переменной r (равномерно относительно других переменных) на множестве D.
- $\operatorname{Lip}_{loc} G$, $\operatorname{Lip}_{r,loc} G$ — множества функций, удовлетворяющих условию Липшица локально по всем переменным, либо по переменной r (равномерно относительно других переменных) на множестве G.
- $C(G \to Y) \cap \operatorname{Lip} = C(G \to Y) \cap \operatorname{Lip} G$ (где вместо Lip могут быть и символы Lip_r, $\operatorname{Lip}_{r,loc}$)
- $\operatorname{Mat}_{n\times m}(X)$ — множество матриц размера $n \times m$ (имеющих n строк и m столбцов) с элементами из множества X.
- $\operatorname{Mat}_n(X)$ — то же, что и $\operatorname{Mat}_{n\times n}(X)$.
- $\operatorname{sgn} x = x/|x|$, если $x \neq 0$, $\operatorname{sgn} 0 = 0$.
- $\operatorname{spec} A$ — спектр матрицы A.
- $\operatorname{tr} A$ — след матрицы A.
- $\overline{a, b}$ — отрезок с концами $a, b \in \mathbb{R}^n$.

Лекция 1

§1.1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

Предположим, что мы изучаем некоторое явление окружающего мира. Пусть в этом явлении нас интересует величина y. Это может быть температура тела, атмосферное давление, количество особей в биологической популяции или напряжение на участке электрической цепи. Существенно, что величина y зависит от некоторых параметров, например, от момента времени или положения в пространстве. Другими словами, это не просто число, а функция.

Определить интересующую функцию непосредственно удаётся не всегда. Но часто возможно установить связь между функцией, её производными и независимой переменной. Уравнение, выражающее такую связь, называется дифференциальным.

Рассмотрим простую модель, описывающую изменение численности биологической популяции. Обозначим через $y(t)$ количество её особей в момент времени t. Пусть эксперименты показывают, что прирост числа особей пропорционален их количеству. Более точно: при малом изменении времени Δt выполняется приближённое равенство

$$y(t + \Delta t) - y(t) \approx a y(t). \tag{1.1}$$

Пусть экспериментальные данные указывают также, что коэффициент a пропорционален временному шагу: $a \approx k\Delta t$. Разделив обе части равенства (1.1) на Δt, получаем

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} \approx ky.$$

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, находим

$$y' = ky. \tag{1.2}$$

Таким образом, мы получили дифференциальное уравнение. Функция, описывающая численность популяции, которая ищется на основе исходных предположений о приросте числа особей, должна удовлетворять этому уравнению.

Что означают слова «функция удовлетворяет уравнению»? Если взять, например, функцию $\varphi(t) = kt$ и подставить её в уравнение (1.2) вместо y, то придём к равенству $k = k^2 t$, верному при $t = 1/k$, и только при таком значении t. Однако, в рассматриваемом примере, нас интересует закон, справедливый при *любых* значениях t. Другими словами, искомая функция должна при подстановке обращать уравнение в *тождество*.

Легко убедиться, что подстановка $y = e^{kt}$ обращает уравнение (1.2) в тождество (верное при $t \in \mathbb{R}$). Функцию e^{kt} разумно назвать решением. Такая функция не единственная: всевозможные решения даются формулой

$$y = Ce^{kt},$$

где C — произвольная постоянная (рис. 1.1). Для выяснения значения постоянной нужно воспользоваться дополнительной информации.

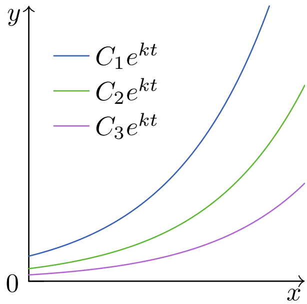

Рис. 1.1. Графики некоторых решений уравнения $y' = ky$

Пример 1.1.1. Дрожжи массой 25 г поместили в раствор сахара. Через полчаса их масса увеличилась до 42 г. В какой момент времени масса дрожжей будет в два раза больше изначальной?

Решение. Для решения задачи воспользуемся только что построенной моделью. А именно, считаем, что масса дрожжей $m(t)$ удовлетворяет уравнению

$$m' = km.$$

Значит, $m = Ce^{kt}$. Поскольку $m(0) = 25$, то $C = m(0) = 25$, следовательно,

$$m(t) = 25e^{kt}.$$

Найдём ещё коэффициент k. Из условия $m(30) = 42$ получаем

$$k = \frac{\ln(42/25)}{30} \approx 0{,}0173.$$

Таким образом, масса дрожжей в момент времени t равна

$$m(t) = 25e^{0{,}0173t}.$$

Требуется найти такое значение t_2, что $m(t_2) = 2 \cdot 25 = 50$. Имеем $50 = 25\exp(0{,}0173t_2)$, отсюда

$$t_2 = \frac{\ln 2}{0{,}0173} \approx 40,$$

то есть примерно через 40 минут следует ожидать удвоение массы дрожжей.

Конечно, полученная зависимость имеет ограниченную область применимости. Имеем $m(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$, однако, в реальности дрожжи не могут неограниченно размножаться. Дифференциальное уравнение решено верно. Причина неполного соответствия найденной зависимости и настоящей в том, что само исходное уравнение описывает действительность лишь приближённо. Многие факторы не были учтены при его выводе. Поэтому пользоваться найденной функцией можно лишь до тех пор, пока влияние этих факторов незначительно. △

Многие законы физики формулируются в виде дифференциальных уравнений. Например, второй закон Ньютона

$$F = ma,$$

связывающий ускорение тела a, его массу m и приложенные силы F, есть ни что иное, как дифференциальное уравнение, поскольку ускорение — это вторая производная от перемещения.

Пример 1.1.2. Рассмотрим пружину с коэффициентом упругости k, один конец которой закреплён, а к другому подвешен груз массой m (рис. 1.2). Пружину оттягивают на небольшое расстояние и отпускают. Каков закон движения груза?

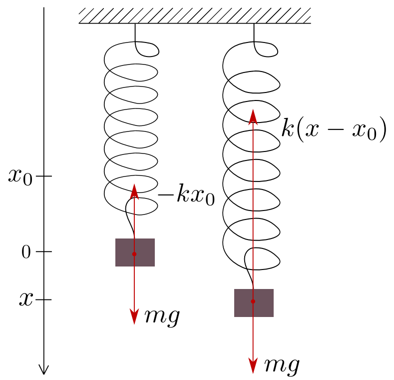

Рис. 1.2. Колебания пружины

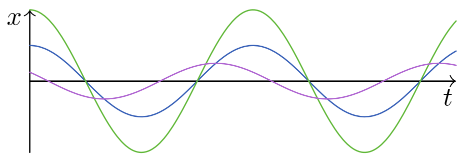

Рис. 1.3. Графики некоторых решений уравнения $mx'' = -kx$.

Решение. Направим ось Ox вертикально вниз, а за начало отсчёта примем положение равновесия груза. В любой момент времени на груз действует сила тяжести mg, а также сила упругости пружины $-k\Delta x$, по закону Гука пропорциональная величине растяжения $\Delta x = x - x_0$, где x_0 — координата свободного конца пружины в нерастянутом положении.

Применяя второй закон Ньютона, находим уравнение движения груза

$$mx'' = -k(x - x_0) + mg.$$

Если груз покоится в положении равновесия, то

$$0 = -k(0 - x_0) + mg,$$

поэтому $kx_0 = -mg$. Исключая mg из уравнения движения, находим

$$mx'' = -kx.$$

Нетрудно убедиться непосредственной подстановкой, что функции вида

$$x(t) = C_1 \cos\left(t\sqrt{k/m} + C_2\right).$$

подходят в качестве решений. △

В отличие от предыдущего примера, здесь имеется две произвольных постоянных. Причина в том, что полученное уравнение движения содержит вторую производную. Постоянные C_1 и C_2 определятся однозначно, если известны начальные условия, то есть положение груза и скорость в момент, когда его отпустили.

Дифференциальные уравнения возникают при моделировании эволюции какого-либо процесса. Данный курс посвящён изучению уравнений, в которых неизвестная функция зависит только от одной вещественной переменной, то есть *обыкновенных дифференциальных уравнений*. Кроме обыкновенных существуют и другие виды (в частных производных, стохастические). Под дифференциальными уравнениями в нашем курсе будем понимать обыкновенные, если не оговорено противное.

§1.2. Уравнение в нормальной форме

Определение. Пусть $f\colon G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. ***Нормальное уравнение*** (уравнение в нормальной форме или уравнение, разрешённое относительно производной):

$$y' = f(x, y). \tag{1.3}$$

Определение. ***Область определения*** *нормального уравнения* — область определения его правой части. Обозначение: $\operatorname{dom}(1.3) = G$.

Пример 1.2.1. Примеры уравнений и соответствующих областей определения:

(а) $y' = x\sqrt{y}$, $G = \mathbb{R} \times [0, +\infty)$;

(б) $y' = y$, $G = \mathbb{R}^2$;

(в) $y' = -\frac{1}{x^2}$, $G = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\right\}$.

Заметим, что область определения уравнения (1.3) — подмножество плоскости, даже если правая часть фактически не зависит от одной из переменных или является константой. △

Запись $E = \langle a, b\rangle$ в нашем курсе будет означать, что $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, $E \in \{(a,b), [a,b)\setminus\{-\infty\}, (a,b]\setminus\{+\infty\}, [a,b]\setminus\{\pm\infty\}\}$. То есть E — невырожденный промежуток вещественной оси. Символ $\equiv$ (тождество) означает равенство с применением квантора всеобщности: высказывание «$F(x) \equiv G(x)$ на D» равносильно «$\forall x \in D\ F(x) = G(x)$».

Определение. Функция $\varphi\colon E \to \mathbb{R}$ — ***решение*** уравнения (1.3), если $E = \langle a, b\rangle$ и

$$\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x)) \ \text{ на } E.$$

Другими словами, решением уравнения (1.3) называют всякую функцию, определённую на невырожденном промежутке, подстановка которой вместо y обращает уравнение в тождество.

Пример 1.2.2. Рассмотрим уравнение $y' = y$ и функции

- $\varphi_1(x) = e^x$ — решение на $\mathbb{R}$, так как $\mathbb{R}$ — невырожденный промежуток и $(e^x)' = e^x$ при любом $x \in \mathbb{R}$;
- $\varphi_2(x) = x$ — не решение ни на каком промежутке, поскольку равенство $x' = x$ выполнено только в одной точке $x = 1$;
- $\varphi_3(x) = e^x$ при $x < 0$ и $\varphi_3(x) = 2e^x$ при $x > 0$ — не решение, поскольку $\operatorname{dom}\varphi_3 = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ — не промежуток;
- $\varphi_4(x) = e^x$ при $x < 0$ и $\varphi_4(x) = 2e^x$ при $x \geqslant 0$ — решение на $\mathbb{R}$? $\triangle$

Замечание 1.2.3. На протяжении всего курса будем придерживаться правила: если некоторый предикат $P(x)$ не определён при $x = x_0$, то считаем высказывание $P(x_0)$ ложным. Это позволит сократить формулировки некоторых определений и утверждений. Например, без этого правила в определение решения пришлось бы добавить требование дифференцируемости функции φ (именно так и поступают во многих учебниках). Иначе, в силу отстутствия значения $\varphi_4'(0)$, высказывание $\varphi_4'(0) = \varphi_4(0)$ не определено (не является ни истинным, ни ложным). Поэтому невозможно понять, является ли функция φ_4 решением на $\mathbb{R}$. Если же учесть приведённое правило, то высказывание $\varphi_4'(0) = \varphi_4(0)$ ложно, следовательно, функция φ_4 — не решение на $\mathbb{R}$.

Замечание 1.2.4. Учитывая замечание 1.2.3, любое решение уравнения (1.3) — дифференцируемая функция. Действительно, из истинности утверждения $\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x))$ на E следует, что выражение $\varphi'(x)$ определено для всех $x \in E$. Поскольку $\operatorname{ran} f \subset \mathbb{R}$, то $\varphi'(x) \in \mathbb{R}$.

Замечание 1.2.5. Если f — непрерывная функция, то любое решение уравнения (1.3) непрерывно дифференцируемо. Действительно, в силу замечания 1.2.4 решение φ дифференцируемо, а значит, непрерывно. Тогда $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ непрерывна как композиция непрерывных.

Замечание. В уравнении (1.3) символы x, y и y' — три различные *независимые* переменные. Пока не произведена подстановка функции, буква y никак не связана с буквой x, а символ y' не обозначает производную. Подстановка функции φ в уравнение означает, что нужно заменить символ y на функцию $\varphi(x)$, а символ y' — на производную $\varphi'(x)$.

Сейчас мы использовали букву φ для обозначения функции. Однако, часто для обозначения решения мы будем использовать тот же символ, который участвует в уравнении. То есть буквой y будет обозначаться как независимая переменная (или координата), так и функция, зависящая от x. Конкретный смысл символа y обычно ясен из контекста.

Определение. ***Интегральная кривая*** уравнения (1.3) — график его решения.

Если φ —решение уравнения (1.3) на E, то $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ для всех $x \in E$. Следовательно, $(x, \varphi(x)) \in G$ для всех $x \in E$. Это означает, что любая интегральная кривая уравнения (1.3) лежит в области его определения.

Определение. ***Общее решение*** уравнения (1.3) — множество всех его решений.

Если желают подчеркнуть, что речь идёт о каком-то одном конкретном решении, то говорят о *частном решении* уравнения. Во многих случаях решение не выражается в явном виде, а задаётся неявно из некоторого соотношения, которое иногда называют *частным интегралом.*

Определение. ***Общим интегралом*** уравнения (1.3) будем называть соотношение вида

$$\Phi(x, y, C) = 0,$$

которое неявно задаёт некоторые решения уравнения (1.3) при некоторых значениях вещественного параметра C.

Замечание. Общий интеграл не всегда описывает *общее решение* уравнения[1]. Множество всех решений может быть шире, чем множество решений, определяемых общим интегралом.

Пример 1.2.6. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y' = x.$$

Ясно, что его решением будет любая первообразная правой части[2]:

$$y = \int x\,dx + C = \frac{x^2}{2} + C.$$

Таким образом, мы имеем целое семейство решений (рис. 1.4).

---

[1] Существуют и другие определения понятий «общее решение» и «общий интеграл». В нашем курсе мы будем придерживаться определений, данных в этом параграфе.

[2] Под символом $\int f(x)\,dx$ или $\int f$ мы всегда будем понимать какую-нибудь одну первообразную, не важно какую, а постоянную интегрирования приписывать отдельно в качестве слагаемого.

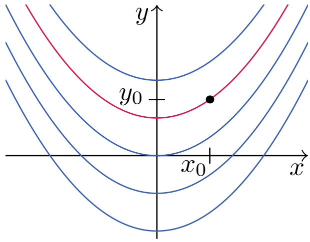

Рис. 1.4. Семейство решений уравнения $y' = x$ и частное решение, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$

Формально, *общее решение* — это множество

$$\left\{y\colon E \to \mathbb{R} \mid E = \langle a, b\rangle,\ y(x) = x^2/2 + C,\ C \in \mathbb{R}\right\}.$$

Но обычно мы будем записывать общее решение короче:

$$y = \frac{x^2}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Функции

$$y_1(x) = \frac{x^2}{2},\ \ y_2(x) = \frac{x^2}{2} + 2,\ \ y_3(x) = \frac{x^2}{2} - 5$$

представляют различные *частные решения*. Соотношение $x^2 - 2y + C = 0$ даёт пример *общего интеграла*. △

§1.3. Уравнение в дифференциалах

Определение. Пусть $P, Q\colon G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. ***Уравнение в дифференциалах*** (уравнение в симметричной форме, уравнение Пфаффа на плоскости):

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0. \tag{1.4}$$

Определение. ***Область определения*** *уравнения в дифференциалах* (1.4) — область определения коэффициентов P и Q. Обозначение: $\operatorname{dom}(1.4) = G$.

Если на плоскости выбрана система координат, то через $\mathbb{R}_x, \mathbb{R}_y$ обозначаем множества точек соответствующих координатных осей, $\mathbb{R}^2_{x,y}$ — вся плоскость.

Определение. Пусть $E = \langle a, b\rangle$, $E \subset \mathbb{R}_x$. Функция $\varphi\colon E \to \mathbb{R}_y$ — ***решение уравнения*** (1.4), если

$$P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\varphi'(x) \equiv 0 \text{ на } E.$$

Замечание. То есть решением называется функция φ, заданная на невырожденном промежутке оси Ox, подстановка которой в уравнение вместо y обращает его в тождество. При подстановке $y = \varphi(x)$ символ dy нужно понимать как дифференциал функции φ, а символ dx — как дифференциал переменной x.

Замечание. Переменные x и y входят в уравнение (1.4) равноправно, поэтому его решением называется не только функция вида $y = \varphi(x)$, но и функция вида $x = \psi(y)$. Соответствующее определение аналогично приведённому.

Замечание 1.3.1. Если $y = \varphi(x)$ — решение уравнения (1.4), то необходимо φ — дифференцируемая, а значит и непрерывная функция. Допустим, её график не проходит через точки, в которых $Q(x, y) = 0$. Тогда

$$\varphi'(x) = -\frac{P(x, \varphi(x))}{Q(x, \varphi(x))}.$$

Если функции P и Q непрерывны, то φ — непрерывно дифференцируемая функция. Если же для некоторого x_0 будет $Q(x_0, y_0) = 0$, где $y_0 = \varphi(x_0)$, то из определения решения следует, что $P(x_0, y_0) = 0$.

Определение. Точка $(x_0, y_0) \in G$ называется ***особой точкой*** уравнения (1.4), если $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$.

Пример 1.3.2. Рассмотрим уравнение

$$x\,dx + y\,dy = 0. \tag{1.5}$$

Область его определения — вся плоскость $\mathbb{R}^2_{x,y}$.

Убедимся, что функция $y(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ при любом $R > 0$ является решением на интервале $(-R, R)$. Действительно, её дифференциал

$$dy = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\,dx$$

определён при $x \in (-R, R)$. При подстановке в исходное уравнение получаем

$$x\,dx + \sqrt{R^2 - x^2}\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\,dx = 0, \quad \forall x \in (-R, R).$$

Аналогично устанавливается, что функция $y(x) = -\sqrt{R^2 - x^2}$, а также функции $x(y) = \pm\sqrt{R^2 - y^2}$ — решения на интервале $(-R, R)$. △

Графики решений вида $y = \varphi(x)$ и $x = \psi(y)$ могут быть частями одной гладкой кривой. В рассмотренном примере графики всех упомянутых функций при одинаковом значении R — это части окружности радиуса R с центром в начале координат. Такую кривую естественно считать интегральной кривой, а её параметризацию — решением.

Определение. Пусть $T = \langle \alpha, \beta \rangle$. Вектор-функция $(u, v) \in C^1(T \to \mathbb{R}^2)$ — ***параметрическое решение*** уравнения (1.4), если

- $(u'(t), v'(t)) \neq (0, 0)$ для всех $t \in T$;
- $P(u(t), v(t))u'(t) + Q(u(t), v(t))v'(t) \equiv 0$ на T.

Например, при $R > 0$ вектор-функция $r(t) = (R\cos t, R\sin t)$ — параметрическое решение уравнения (1.5) на $[0, 2\pi)$.

Определение. ***Интегральной кривой*** уравнения (1.4) называют годограф[1]

[1] *Годограф* вектор-функции — это множество её значений.

её параметрического решения.

Утверждение 1.3.3 (Связь между обычными и параметрическими решениями). *Пусть $P, Q \in C(G)$, множество G не содержит особых точек уравнения (1.4). Тогда*

(i) Если $y = \varphi(x)$ — решение уравнения (1.4) на E, то $r(t) = (t, \varphi(t))$ — параметрическое решение уравнения (1.4) на E.

(ii) Если $r = (u, v)$ — параметрическое решение уравнения (1.4) на T, то для любого $t_0 \in T$ найдётся окрестность $U(t_0)$, такая что функции $u(t)$ и $v(t)$ при $t \in U(t_0) \cap T$ параметрически задают решение (вида $y = \varphi(x)$ либо $x = \psi(y)$) уравнения (1.4).

Замечание. Пункт (i) говорит о том, что график обычного решения уравнения (1.4) совпадает с годографом некоторого параметрического решения, а значит, является интегральной кривой. Пункт (ii) говорит о том, что интегральные кривые уравнения (1.4) склеены из графиков обычных решений. Причём склеены гладко: любая точка интегральной кривой вместе со своими соседними образует график дифференцируемой функции.

Доказательство утверждения 1.3.3. (i) В силу замечания 1.3.1 и отсутствия особых точек, будет $\varphi \in C^1(E)$. Тогда функция r — параметрическое решение по определению.

(ii) Возьмём $t_0 \in T$. По определению параметрического решения будет $(u'(t_0), v'(t_0)) \neq (0, 0)$. Пусть, для определённости, $u'(t_0) > 0$. В силу непрерывности функции u' будет $u'(t) > 0$ при $t \in U(t_0) \cap T$, где $U(t_0)$ — некоторый интервал. Значит, функция u строго монотонна на множестве $U(t_0) \cap T$. Следовательно, существует функция $\varphi = v \circ u^{-1}$ на множестве $X = u(U(t_0) \cap T)$. Производная этой функции

$$\varphi'(x) = \frac{v'(u^{-1}(x))}{u'(u^{-1}(x))} = \frac{v'(t)}{u'(t)},$$

где $x = u(t)$. Отсюда и из тождества

$$P(u(t), v(t))u'(t) + Q(u(t), v(t))v'(t) \equiv 0$$

вытекает, что $y = \varphi(x)$ — решение на промежутке X. $\square$

Замечание. Условие $(u'(t), v'(t)) \neq (0, 0)$ существенно для отсутствия точек излома или возврата на интегральной кривой. Рассмотрим уравнение

$$dy = 3y^{2/3}\,dx.$$

Вектор-функция $r(t) = (u(t), v(t))$, где $u(t) = t^2$ для $t \in \mathbb{R}$, $v(t) = 0$ при $t < 0$ и $v(t) = t^6$ при $t \geqslant 0$, была бы параметрическим решением, если убрать первое условие из определения. При $t = 0$ имеем точку возврата, поэтому пункт (ii) утверждения 1.3.3 был бы неверным.

Определение. Два дифференциальных уравнения ***эквивалентны*** (или ***равносильны***) на множестве G, если они имеют одинаковое семейство интегральных кривых на множестве G.

Теорема 1.3.4. *Пусть* $f \in C(G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})$. *Тогда уравнение*

$$y' = f(x, y) \tag{1.6}$$

эквивалентно на множестве G *уравнению*

$$dy = f(x, y)\,dx. \tag{1.7}$$

Доказательство. Пусть γ — интегральная кривая уравнения (1.6). Тогда, по определению, γ — график некоторого решения $\varphi\colon E \to \mathbb{R}$ уравнения (1.6). Следовательно,

$$\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x)) \text{ на } E.$$

Это тождество означает, что φ — решение уравнения (1.7). По утверждению 1.3.3, пункт (i), кривая γ — интегральная кривая уравнения (1.7).

Обратно, пусть γ — интегральная кривая уравнения (1.7). Тогда, по определению, кривая γ допускает параметризацию $x = u(t)$, $y = v(t)$, $t \in T$. При этом

$$v'(t) \equiv f(u(t), v(t))u'(t) \text{ на } T. \tag{1.8}$$

Заметим, что $u'(t) \neq 0$ для любого $t \in T$. Действительно, если $u'(t_0) = 0$ для некоторого t_0, то из тождества (1.8) имеем $v'(t_0) = 0$. Но по определению параметрического решения производные u' и v' не обращаются в ноль одновременно.

Из непрерывности функции u' следует её знакопостоянность. Поэтому функция u строго монотонна, а значит, имеет обратную $t = u^{-1}(x)$. График функции $y = v(u^{-1}(x))$ совпадает с кривой γ. Используя теорему о дифференцировании обратной функции, имеем

$$(v \circ u^{-1})'(x) = \frac{v'(u^{-1}(x))}{u'(u^{-1}(x))}.$$

Отсюда и из соотношения (1.8) при $t = u^{-1}(x)$ находим

$$(v \circ u^{-1})'(x) = \frac{v'(t)}{u'(t)} = f(u(t), v(t)) = f(x, v \circ u^{-1}(x)).$$

Следовательно, $v \circ u^{-1}$ — решение уравнения (1.6), а γ — соответствующая интегральная кривая уравнения (1.6). □

Следствие 1.3.5. *Пусть* $P, Q \in C(G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})$. *Тогда уравнение (1.4) равносильно уравнениям*

$$y'_x = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \quad \text{на множестве } G \setminus \{(x,y) \mid Q(x,y) = 0\},$$

$$x'_y = -\frac{Q(x,y)}{P(x,y)} \quad \text{на множестве } G \setminus \{(x,y) \mid P(x,y) = 0\}.$$

Лекция 2

§2.1. Геометрический смысл дифференциальных уравнений

Установим геометрический смысл нормального уравнения

$$y' = f(x, y) \tag{2.1}$$

и его решения φ. Имеем

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$$

на некотором промежутке E. Пусть $x_0 \in E$, $y_0 = \varphi(x_0)$. Тогда

$$\varphi'(x_0) = f(x_0, y_0).$$

Таким образом, значение функции f в точке (x_0, y_0) определяет наклон касательной к интегральной кривой в этой точке (рис. 2.1).

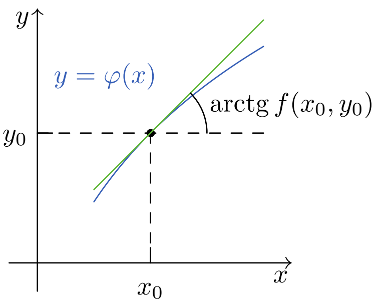

Рис. 2.1. Значение $f(x_0, y_0)$ определяет касательную к интегральной кривой, проходящей через точку (x_0, y_0)

Если каждой точке (x, y) области определения функции f сопоставить вектор, направленный под углом $\operatorname{arctg} f(x, y)$ к оси абсцисс, то получится так называемое ***поле направлений*** уравнения (2.1). Таким образом, задать уравнение (2.1) — всё равно, что задать поле направлений.

Задачу нахождения решений уравнения (2.1) можно сформулировать на геометрическом языке: найти все гладкие кривые, в каждой своей точке касающиеся заданного поля направлений (рис. 2.2).

Векторное поле, построенное в некоторых точках, даёт примерное представление о поведении интегральных кривых. Такое поле может быть использовано для предварительного качественного исследования дифференциального уравнения, построения эскизов интегральных кривых и контроля найденных решений.

Рассмотрим один способ построить приближение к интегральной кривой. Взяв некоторую точку (x_0, y_0) в качестве начальной, будем двигаться по направлению поля в точке (x_0, y_0) до точки с абсциссой $x_1 = x_0 + h$, ординату

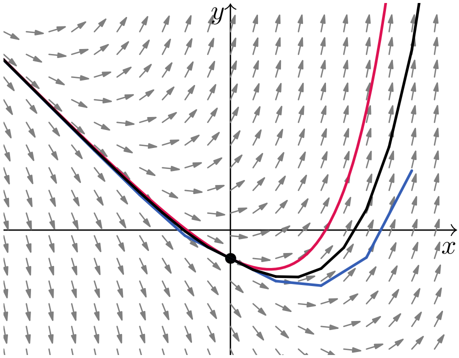

Рис. 2.2. Поле направлений уравнения $y' = y + x$; интегральная кривая, проходящая через точку $x_0 = 0$, $y_0 = -1/2$ (красным цветом); ломаные Эйлера с шагом $h = 0{,}8$ (синим цветом) и $h = 0{,}4$ (чёрным цветом), проходящие через эту же точку

которой обозначим через y_1. От точки (x_1, y_1) продолжим движение вдоль поля до точки (x_2, y_2), где $x_2 = x_1 + h$, но теперь по направлению поля в (x_1, y_1). Продолжая этот процесс дальше, получаем ***ломаную Эйлера***. Аналогично она строится и влево от точки (x_0, y_0).

Ломаная Эйлера даёт приближение интегральной кривой уравнения, проходящей через точку (x_0, y_0). Приближение тем точнее, чем меньше шаг h (рис. 2.2). Исходя из условия

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} = f(x_k, y_k),$$

получаем формулы для координат вершин ломаной:

$$x_{k+1} = x_k + h, \quad y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k)h.$$

Ломаную Эйлера лучше всего строить с помощью компьютера. Существует другой, родственный способ, который удобно использовать при построении эскизов кривых вручную — ***метод изоклин***.

Определение. ***Изоклиной*** I_k уравнения (2.1) называют множество уровня функции f:

$$I_k = \{(x, y) \in \operatorname{dom} f \mid f(x, y) = k\}.$$

Изоклина пересекается различными интегральными кривыми под одним и тем же углом. Построив достаточно частую сеть изоклин, можно приближённо изобразить интегральную кривую. Для этого нужно вести линию от одной изоклины к другой, пересекая их под соответствующими углами.

На рис. 2.3 изображено несколько изоклин и одна интегральная кривая уравнения $y' = x + y$. Синим цветом обозначена ***нулевая изоклина*** I_0, отделяющая области убывания и возрастания решений.

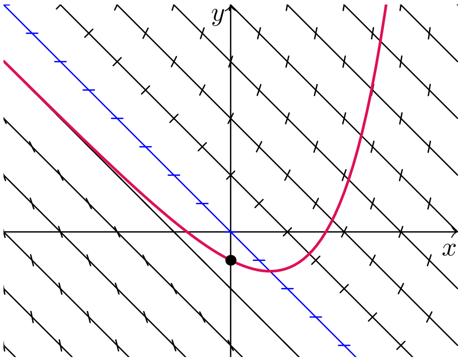

Рис. 2.3. Изоклины и интегральная кривая уравнения $y' = x + y$

Поясним геометрический смысл уравнения

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0. \tag{2.2}$$

Пусть $r(t) = (x(t), y(t))$ — его параметрическое решение на E. Тогда при любом $t \in E$

$$P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t) = 0. \tag{2.3}$$

Рассмотрим векторное поле $F = (P, Q)$. Тогда равенство (2.3) равносильно

$$F(r(t)) \cdot r'(t) = 0.$$

Вектор $r'(t)$ касается интегральной кривой в точке $(x(t), y(t))$. Значит, любая интегральная кривая уравнения (2.2) в каждой своей точке (x, y) перпендикулярна вектору $F(x, y)$ (рис. 2.4).

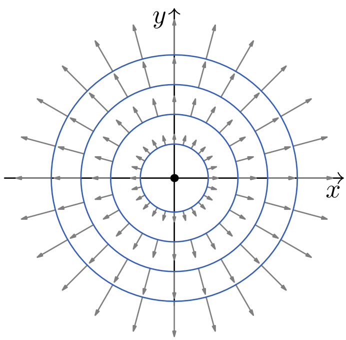

Рис. 2.4. Интегральные кривые и особая точка уравнения $x\,dx + y\,dy = 0$.

Таким образом, задать уравнение (2.2) — всё равно, что определить векторное поле на плоскости. Решить это уравнение — значит, найти кривые, перпендикулярные заданному полю.

§2.2. Уравнение в полных дифференциалах

Определение. Уравнение

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 \tag{2.4}$$

называют ***уравнением в полных дифференциалах*** в области G, если для него существует ***потенциал***, то есть такая дифференцируемая функция u, что для всех $x, y \in G$

$$du = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

Теорема 2.2.1 (общее решение УПД). *Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ — область, функция $u\colon G \to \mathbb{R}$ дифференцируема, $u'_x = P$, $u'_y = Q$. Тогда функция $y = \varphi(x)$ — решение уравнения (2.4) на промежутке E, если и только если она дифференцируема на E и при некотором $C \in \mathbb{R}$ неявно задана уравнением*

$$u(x,y) = C.$$

Доказательство. *Достаточность.* Дифференцируя равенство $u(x,\varphi(x)) = C$ по переменной $x \in E$, находим

$$u'_x(x,\varphi(x)) + u'_y(x,\varphi(x))\varphi'_x \equiv 0.$$

Так как $u'_x = P$, $u'_y = Q$, то по определению функция φ является решением уравнения (2.4) на E.

Необходимость. На промежутке E верно тождество

$$P(x,\varphi(x)) + Q(x,\varphi(x))\varphi'(x) \equiv 0.$$

Левая часть этого равенства совпадает с полной производной функции u по переменной x. Поэтому

$$\frac{d}{dx}u(x,\varphi(x)) \equiv 0.$$

Следовательно, $u(x,\varphi(x)) \equiv C$. □

Замечание. Теорема 2.2.1 говорит о том, что интегральные кривые уравнения в полных дифференциалах — это линии уровня его потенциала.

Определение. Уравнение

$$P(x)\,dx + Q(y)\,dy = 0 \tag{2.5}$$

называют ***уравнением с разделёнными переменными***.

Следствие 2.2.2 (общее решение УРП). *Пусть $P \in C(a,b), Q \in C(c,d)$. Тогда функция $y = \varphi(x)$ — решение уравнения на промежутке E, если и только если она дифференцируема на E и при некотором $C \in \mathbb{R}$ неявно задана уравнением*

$$\int P(x)\,dx + \int Q(y)\,dy = C.$$

Доказательство. Положим

$$u(x, y) = \int P(x)\,dx + \int Q(y)\,dy.$$

Производные $u'_x = P$, $u'_y = Q$ непрерывны, поэтому u — дифференцируемая функция в области $(a, b) \times (c, d)$. По теореме 2.2.1 получаем требуемое. $\square$

Утверждение 2.2.3 (необходимое условие УПД). *Пусть (2.4) — уравнение в полных дифференциалах с потенциалом $u \in C^2(G)$. Тогда*

$$P'_y = Q'_x. \tag{2.6}$$

Доказательство. Поскольку $u \in C^2(G)$, то смешанные производные функции u совпадают. Следовательно,

$$P'_y = (u'_x)'_y = (u'_y)'_x = Q'_x. \qquad \square$$

Теорема 2.2.4 (признак УПД[1]). *Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ — односвязная область, $P, Q \in C^1(G)$, $P'_y = Q'_x$, $(x_0, y_0) \in G$. Тогда уравнение (2.4) — уравнение в полных дифференциалах в области G с потенциалом*

$$u(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \int_{\gamma(\widetilde{x}, \widetilde{y})} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy, \tag{2.7}$$

где $\gamma(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ — произвольный кусочно-гладкий путь в области G, соединяющий точки (x_0, y_0) (начало пути) и $(\widetilde{x}, \widetilde{y})$.

Продемонстрируем на примере другой способ нахождения потенциала.

Пример 2.2.5. Решим уравнение $e^{-y}\,dx - (2y + xe^{-y})\,dy = 0$.

Решение. Область определения уравнения — вся плоскость.

Необходимое условие уравнения в полных дифференциалах

$$(e^{-y})'_y = (-2y - xe^{-y})'_x = -e^{-y}$$

выполняется на всей области определения. Если это действительно уравнение в полных дифференциалах, то необходимо его потенциал удовлетворяет системе

$$\begin{cases} u'_x = e^{-y}, \\ u'_y = -(2y + xe^{-y}). \end{cases}$$

При фиксированном y из первого уравнения системы находим

$$u(x, y) = e^{-y}x + C(y),$$

[1] см., например, [1, §51, п.5]

где функция C зависит только от y. Подставляя найденное выражение во второе уравнение системы, получаем

$$C'(y) = -2y,$$

откуда $C(y) = -y^2$.

Найденная функция $u(x,y) = e^{-y}x - y^2$ непрерывно дифференцируема в области задания уравнения. Непосредственным вычислением убеждаемся, что её частные производные совпадают с коэффициентами уравнения. Следовательно, исходное уравнение — уравнение в полных дифференциалах, найденная функция u — его потенциал, а общий интеграл по теореме 2.2.1 имеет вид

$$u(x,y) = C,$$

то есть

$$xe^{-y} - y^2 = C. \qquad \triangle$$

Замечание. Применяя способ нахождения потенциала, указанный в примере 2.2.5, необходимо внимательно следить за областями определения участвующих функций. Например, рассмотрим в полуплоскости $x > 0$ уравнение

$$\frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = 0.$$

Если упустить из виду, что первообразная

$$\int \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx$$

находится по-разному при $y = 0$ и при $y \neq 0$, то можно прийти к функции $u(x,y) = -\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$. Эта функция не может служить потенциалом на всей указанной полуплоскости, поскольку она не определена в точках оси x, а потенциал должен быть определён и непрерывно дифференцируем во всей области.

В действительности потенциалом будет функция

$$u(x,y) = \begin{cases} -\operatorname{arctg}\frac{x}{y}, & \text{если } y > 0, \\ -\pi/2, & \text{если } y = 0, \\ -\pi - \operatorname{arctg}\frac{x}{y}, & \text{если } y < 0, \end{cases}$$

получаемая, например, с помощью криволинейного интеграла (2.7).

Лекция 3

§3.1. Интегрирующий множитель

Рассмотрим уравнение

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0. \tag{3.1}$$

Предположим, что условие $P'_y = Q'_x$ нарушается. Это значит, что уравнение (3.1) не является уравнением в полных дифференциалах.

Определение. Функция $\mu\colon G \to \mathbb{R}$ называется ***интегрирующим множителем*** уравнения $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ в области G, если $\mu(x,y) \neq 0$ для любой точки $(x,y) \in G$ и уравнение

$$\mu(x,y)P(x,y)\,dx + \mu(x,y)Q(x,y)\,dy = 0 \tag{3.2}$$

является уравнением в полных дифференциалах в области G.

Замечание 3.1.1. Уравнения (3.1) и (3.2) равносильны в области G.

Пример 3.1.2. Пусть $p_2(x) \neq 0$ при $x \in (a,b)$, $q_1(y) \neq 0$ при $y \in (c,d)$. Тогда функция

$$\mu(x,y) = \frac{1}{p_2(x)q_1(y)}$$

является интегрирующим множителем для уравнения

$$p_1(x)q_1(y)\,dx + p_2(x)q_2(y)\,dy = 0 \tag{3.3}$$

в области $(a,b)\times(c,d)$. Действительно, умножая обе части уравнения (3.3) на $\mu(x,y)$, получаем уравнение с разделёнными переменными

$$\frac{p_1(x)}{p_2(x)}\,dx + \frac{q_2(y)}{q_1(y)}\,dy = 0. \qquad \triangle$$

Определение. Уравнение (3.3) называют ***уравнением с разделяющимися переменными***.

Пусть $P, Q \in C^1(G)$. Определим условия для интегрирующего множителя из класса $C^1(G)$. Необходимо

$$(\mu P)'_y = (\mu Q)'_x,$$

то есть

$$\mu'_y P - \mu'_x Q = (Q'_x - P'_y)\mu. \tag{3.4}$$

Решить это уравнение в частных производных в общем случае не проще, чем исходное.

В некоторых специальных случаях для уравнения (3.4) всё же удаётся найти явное решение. В качестве примера найдём интегрирующий множитель линейного уравнения.

Определение. Дифференциальное уравнение

$$y' = p(x)y + q(x) \tag{3.5}$$

называется ***линейным уравнением*** первого порядка.

Определение. Уравнение (3.5) — ***линейное однородное***, если $q = 0$, иначе — ***линейное неоднородное***.

Уравнение (3.5) равносильно уравнению в дифференциалах

$$(py + q)\, dx - dy = 0. \tag{3.6}$$

Условие $P'_y = Q'_x$ здесь не выполнено. Уравнение (3.4) принимает вид

$$\mu'_y(py + q) + \mu'_x = -p\mu.$$

Попробуем найти интегрирующий множитель, зависящий только от переменной x. В этом случае получаем обыкновенное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$\mu' = -p\mu.$$

Одно из его решений

$$\mu = e^{-\int p}.$$

Умножая уравнение (3.6) на функцию μ, приходим к уравнению в полных дифференциалах. Его можно решить, отыскав соответствующий потенциал. В доказательстве теоремы 3.3.1 мы поступим несколько иначе: умножим на интегрирующий множитель не уравнение в дифференциалах (3.6), а исходное линейное уравнение (3.5).

§3.2. Уравнение с разделяющимися переменными

Изучим подробнее уравнение (3.3).

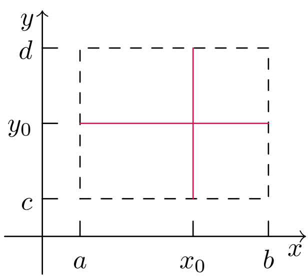

Рис. 3.1. Области поиска интегральных кривых, если $q_1(y_0) = 0$, $p_2(x_0) = 0$

Умножение на интегрирующий множитель $\frac{1}{q_1(y)p_2(x)}$ возможно лишь в области, где знаменатель не обращается в ноль. Случаи $q_1(y) = 0$ и $p_2(x) = 0$ требуют особого рассмотрения.

Пусть $p_1, p_2 \in C(a, b)$, $q_1, q_2 \in C(c, d)$. Если $q_1(y_0) = 0$, то $y \equiv y_0$, $x \in (a, b)$ — решение исходного уравнения. Для поиска других интегральных кривых область $(a, b) \times (c, d)$ задания уравнения требуется разбить на две подобласти, общей границей которых является прямая $y = y_0$.

Аналогично, если $p_2(x_0) = 0$, то $x \equiv x_0$, $y \in (c, d)$ — решение исходного уравнения. Для поиска других интегральных кривых область задания разбивается на две подобласти с общей границей $x = x_0$.

Разбив всю область поиска интегральных кривых на необходимое количество частей (рис. 3.1), нужно рассмотреть исходное уравнение на каждой части отдельно. На каждой такой подобласти его можно разделить на $q_1(y)p_2(x)$, не опасаясь получить ноль в знаменателе.

Изучив поведение найденных интегральных кривых вблизи границ подобластей, делается вывод о наличии составных решений уравнения на исходной области его задания.

Пример 3.2.1. Решить уравнение $x\,dy - 2y\,dx = 0$.

Решение. Область задания уравнения — вся плоскость. Переменные разделятся, если поделить уравнение на xy. Заметим, что прямые $y = 0$ и $x = 0$ являются интегральными кривыми. Они разбивают область задания на четыре подобласти, соответствующие четвертям плоскости.

Обозначим k-ю четверть через D_k (точки на координатных осях не включаются). На области D_1 исходное уравнение равносильно уравнению

$$\frac{dy}{y} = \frac{2\,dx}{x}.$$

Его общее решение определяется равенством

$$\ln|y| = 2\ln|x| + C$$

или

$$|y| = Ax^2, \quad A > 0.$$

В первой четверти $y > 0$, $x > 0$. Поэтому все решения в области D_1 имеют вид

$$y = Ax^2, \quad A > 0, \quad x \in (0, +\infty).$$

Рассуждения в остальных четвертях аналогичны. Получаем следующие интегральные кривые:

$$\begin{aligned} D_2: &\quad y = Ax^2, \quad A > 0, \quad x \in (-\infty, 0)\\ D_3: &\quad y = Ax^2, \quad A < 0, \quad x \in (-\infty, 0)\\ D_4: &\quad y = Ax^2, \quad A < 0, \quad x \in (0, +\infty). \end{aligned}$$

Заметим, что для любого из полученных решений имеем

$$\lim_{x\to 0} y(x) = 0, \quad \lim_{x\to 0} y'(x) = 0. \tag{3.7}$$

Вернёмся на область задания исходного уравнения. Из соотношений (3.7) следует, что интегральные кривые из различных областей D_k в начале координат можно гладко сшить друг с другом, а также с прямой $y = 0$. Тем самым, кроме найденных решений, имеется множество составных вида

$$y = \begin{cases} Ax^2, & \text{если } x < 0, \\ Bx^2, & \text{если } x \geqslant 0, \end{cases}$$

где коэффициенты A, B произвольны (рис. 3.2). Общее решение включает эти кусочно-заданные функции, а также функцию $x(y) = 0$ при $y \in \mathbb{R}$. △

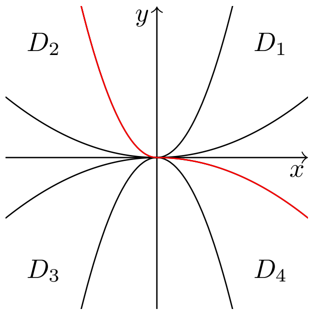

Рис. 3.2. Составное решение уравнения $x\,dy - 2y\,dx = 0$

Пример 3.2.2. Решить уравнение $x\,dy - y\,dx = 0$.

Решение. Рассуждая как в предыдущем примере, в каждой из четвертей получаем решения вида

$$y = Ax.$$

Поскольку для любого из найденных решений имеем

$$\lim_{x\to 0} y(x) = 0, \quad \lim_{x\to 0} y'(x) = A,$$

то в начале координат можно объединить лишь те интегральные кривые, которые являются частями одной и той же прямой. Таким образом, общее решение включает функции

$$y = Cx, \quad C \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R},$$

и функцию $x(y) = 0$, $y \in \mathbb{R}$. Составных (кусочно-заданных) решений нет. △

§3.3. Линейное уравнение первого порядка

Теорема 3.3.1 (общее решение ЛУ 1-го порядка). *Пусть* $E = \langle a, b\rangle$, $p, q \in C(E)$, $\mu = e^{-\int p}$. *Тогда общее решение уравнения (3.5) имеет вид*

$$y = \frac{C + \int q\mu}{\mu}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{dom} y = E. \tag{3.8}$$

Доказательство. Умножая (3.5) на $e^{-\int p}$, получаем

$$y'e^{-\int p} - pye^{-\int p} = qe^{-\int p}.$$

Левая часть — производная произведения $e^{-\int p}$ и y. Тогда

$$\left(ye^{-\int p}\right)' = \int qe^{-\int p}.$$

Следовательно,

$$ye^{-\int p} = C + \int qe^{-\int p}.$$

При умножении данного равенства на $e^{\int p}$ приходим к формуле (3.8). □

Следствие 3.3.2 (общее решение ЛОУ 1-го порядка). *Пусть* $E = \langle a, b\rangle$, $p \in C(E)$. *Тогда общее решение уравнения*

$$y' = p(x)y \tag{3.9}$$

имеет вид

$$y = Ce^{\int p}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad x \in E.$$

Доказательство. Достаточно положить $q = 0$ в формуле (3.8). □

Для решения линейного уравнения первого порядка вместо применения формулы (3.8) можно повторить рассуждения доказательства теоремы 3.3.1, что бывает проще, чем вспомнить формулу (3.8).

Пример 3.3.3. Решить уравнение $y' = y + x$.

Решение. Интегрирующий множитель

$$\mu = e^{-\int dx} = e^{-x}.$$

Умножая исходное уравнение на μ, получаем

$$y'e^{-x} - ye^{-x} = xe^{-x},$$

значит,

$$(ye^{-x})' = xe^{-x}.$$

Отсюда

$$y = e^x \left(\int xe^{-x}\,dx + A\right) = Ae^x - x - 1,$$

где $A \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$. △

Существуют и другие способы решать линейное уравнение. Рассмотрим ***метод Лагранжа***, который ещё называют ***методом вариации произвольной постоянной***. Его смысл в том, чтобы путём легко запоминаемой последовательности действий восстановить формулу (3.8) (не доказать, а именно чисто механически восстановить эту формулу).

Алгоритм метода Лагранжа следующий.

1. Решается вспомогательное линейное однородное уравнение $y' = p(x)y$.
2. В решении $\varphi(x, C)$ вспомогательного уравнения постоянная C меняется на функцию $C(x)$ («вариация постоянной»), далее производится подстановка $y = \varphi(x, C(x))$ в исходное уравнение.
3. Из полученного соотношения находится функция $C(x)$.
4. Замена постоянной C в общем решении вспомогательного уравнения на найденную функцию $C(x)$ приводит к формуле общего решения исходного уравнения.

Пример 3.3.4. Решить уравнение $y' = y + x$.

Решение. Воспользуемся методом Лагранжа.

Соответствующее однородное уравнение

$$y' = y$$

имеет решение $y = Ce^x$. Считая здесь величину C не числом, а функцией, подставим данное выражение в исходное уравнение. Имеем

$$(Ce^x)' = Ce^x + x.$$

Отсюда

$$C' = xe^{-x}.$$

Интегрируя, получаем $C = -(x+1)e^{-x} + A$. Тогда общее решение исходного уравнения

$$y = (-(x+1)e^{-x} + A)e^x = Ae^x - x - 1,$$

где $A \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$. △

Лекция 4

§4.1. Замена переменных в дифференциальном уравнении

Замена переменных в дифференциальном уравнении означает переход от переменных x, y к новым переменным u, v, связанных со старыми некоторыми формулами

$$x = p(u,v), \quad y = q(u,v).$$

Цель такой замены в том, чтобы упростить уравнение или свести его к известному типу. Геометрически замена переменных означает, что мы переходим от системы координат x, y к другой системе координат u, v, в которой, возможно, поле направлений проще. Дифференциалы прежних переменных преобразуются по формулам

$$dx = p'_u\,du + p'_v dv, \quad dy = q'_u\,du + q'_v\,dv. \tag{4.1}$$

Пример 4.1.1. В уравнении

$$(x+y)\,dx + (y-x)\,dy = 0$$

сделаем переход к полярным координатам φ, r, связанных с прежними переменными равенствами

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

По формулам (4.1) находим

$$dx = -r\sin\varphi\,d\varphi + \cos\varphi\,dr, \quad dy = r\cos\varphi\,d\varphi + \sin\varphi\,dr.$$

Теперь заменим величины x, y, dx и dy в исходном уравнении. Имеем

$$(r\cos\varphi + r\sin\varphi)(-r\sin\varphi\,d\varphi + \cos\varphi\,dr) +$$
$$(r\sin\varphi - r\cos\varphi)(r\cos\varphi\,d\varphi + \sin\varphi\,dr) = 0.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые, приходим к уравнению

$$dr = r\,d\varphi \iff r' = r.$$

Это линейное однородное уравнение, общее решение которого $r = Ce^{\varphi}$. То есть интегральные кривые — это логарифмические спирали. △

В приведённом примере переход к полярным координатам позволил привести уравнение к известному типу и, тем самым, решить его. В общем случае, однако, невозможно указать замену, которая упростила бы уравнение. Но есть типы уравнений, для которых подходящая замена заранее известна.

Теорема 4.1.2 (замена переменных в ДУ). *Пусть G — область в $\mathbb{R}^2_{x,y}$, $\Phi\colon G \to \mathbb{R}^2_{u,v}$ — диффеоморфизм, $F\colon G \to \mathbb{R}^2$, $H = (F \circ \Phi^{-1})(\Phi^{-1})'$. Тогда отображение Φ устанавливает взаимно однозначное соответствие между интегральными кривыми уравнений*

$$F(r)\,dr = 0, \quad r \in G \tag{4.2}$$

$$H(s)\,ds = 0, \quad s \in \Phi(G). \tag{4.3}$$

§4.2. Однородное уравнение

Определение. Функция $F(x,y)$ называется ***однородной функцией*** степени α, если при всех допустимых t, x и y верно равенство

$$F(tx,ty) = t^\alpha F(x,y).$$

Примеры однородных функций: $x+y$ (первой степени), $x^2+3xy+y^2$ (второй степени), $(y/x)\cos(x/y)$ (нулевой степени), $\frac{\sqrt{x+y}}{x^2+y^2}$ (степени $-3/2$).

Определение. Пусть P и Q — однородные функции одинаковой степени. Тогда уравнение вида

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 \tag{4.4}$$

называется ***однородным уравнением***.

Замена

$$x = u, \quad y = uv$$

сводит уравнение к уравнению с разделяющимися переменными. Поскольку переменные u и x совпадают, то переменную u обычно не вводят, а полагают

$$y = xv.$$

При этом

$$dy = v\,dx + x\,dv.$$

Проверим, что при такой подстановке действительно получится уравнение с разделяющимися переменными. Уравнение (4.4) примет вид

$$P(x,xv)\,dx + Q(x,xv)(v\,dx + x\,dv) = 0.$$

Пусть α — степень однородности функций P и Q. Тогда

$$x^\alpha P(1,v)\,dx + x^\alpha Q(1,v)(v\,dx + x\,dv) = 0.$$

Разделив на x^α (при этом может быть потеряно решение $x(y) = 0$) и приведя подобные слагаемые, приходим к уравнению с разделяющимися переменными

$$(P(1,v) + Q(1,v)v)\,dx + Q(1,v)x\,dv = 0.$$

Пример 4.2.1. Найдём решения уравнения
$$y^2\,dx + (x^2 - xy)\,dy = 0, \quad x > 0.$$
Полагаем $y = xv$. Тогда $dy = x\,dv + v\,dx$. Уравнение примет вид
$$x^2 v\,dx + x^3(1 - v)\,dv = 0.$$
Разделив обе части на x^3, находим
$$(1 - v)\,dv = -\frac{v}{x}\,dx.$$

Прежде, чем делить на v, отметим, что $v(x) = 0$ является решением данного уравнения. При $v \neq 0$ имеем
$$\frac{1 - v}{v}\,dv = -\frac{dx}{x}.$$
Интегрируя, получаем
$$\ln|v| - v = -\ln|x| + C_1.$$

Отсюда после потенцирования и раскрытия модулей находим
$$ve^{-v} = \frac{C}{x}.$$
При $C = 0$ в эту формулу входит и отмеченное ранее решение $v = 0$.

Возвращаясь к прежней переменной $y = xv$, получаем формулу
$$ye^{-y/x} = C, \quad C \in \mathbb{R},$$
определяющую решения исходного уравнения. △

4.2.1. Уравнения, сводящиеся к однородному

Уравнение в нормальной форме
$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$
сводится к однородному при переходе к дифференциалам. Уравнение более общего вида
$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$
сводится к однородному, если перенести начало системы координат в точку пересечения прямых $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, то есть сделать замену
$$x = x_0 + u, \quad y = y_0 + v,$$
где x_0, y_0 — решение системы
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases}$$
Эта система, однако, не имеет решения, если указанные прямые параллельны. В этом случае замена $v = a_1x + b_1y$ приведёт к уравнению с разделяющимися переменными.

4.2.2. Геометрическое свойство однородного уравнения

Допустим, что $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ — параметрическое решение уравнения (4.4) на E. При растяжении плоскости в λ раз соответствующая интегральная кривая перейдёт в кривую с параметризацией $x = \lambda\varphi(t)$, $y = \lambda\psi(t)$. Подставляя эти функции в уравнение (4.4), получаем

$$P(\lambda\varphi, \lambda\psi)\lambda\varphi' + Q(\lambda\varphi, \lambda\psi)\lambda\psi' = 0.$$

Пользуясь однородностью функций P и Q, приходим к равенству

$$P(\varphi, \psi)\varphi' + Q(\varphi, \psi)\psi' = 0,$$

которое выполняется тождественно на E. Это означает, что гомотетия относительно начала координат любую интегральную кривую однородного уравнения переводит в другую его интегральную кривую.

§4.3. Уравнение Бернулли

Определение. ***Уравнением Бернулли*** называют уравнение вида

$$y' = p(x)y + q(x)y^\alpha,$$

где $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

При $y > 0$ разделим обе части уравнения на y^α. Получаем

$$y^{-\alpha}y' = p(x)y^{1-\alpha} + q(x). \tag{4.5}$$

Введём новую искомую функцию

$$z = y^{1-\alpha}.$$

Тогда $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$, откуда

$$y^{-\alpha}y' = \frac{z'}{1-\alpha}.$$

Подставляя полученное выражение в уравнение (4.5) и умножая обе части на $(1-\alpha)$, находим

$$z' = (1-\alpha)p(x)z + (1-\alpha)q(x).$$

Таким образом, замена $z = y^{1-\alpha}$ сводит уравнение Бернулли к линейному.

Пример 4.3.1. При $x > 0$, $y > 0$ найти общее решение уравнения

$$y' = \frac{6y}{x} + x\sqrt[3]{y}.$$

Решение. Имеем уравнение Бернулли с параметром $\alpha = 1/3$. Разделим обе части уравнения на $y^{1/3}$:

$$\frac{y'}{y^{1/3}} = \frac{6y^{2/3}}{x} + x. \tag{4.6}$$

Введём новую функцию $z = y^{1-1/3} = y^{2/3}$. Тогда

$$z' = \frac{2}{3}\frac{y'}{y^{1/3}}.$$

Подставляя в (4.6), находим

$$z' = \frac{4z}{x} + \frac{2x}{3}. \tag{4.7}$$

Умножая это уравнение на интегрирующий множитель

$$e^{-\int \frac{4}{x}\,dx} = \frac{1}{x^4}$$

и перенося первое слагаемое из правой части в левую, имеем

$$\frac{z'}{x^4} - \frac{4z}{x^5} = \frac{2}{3x^3}.$$

Тогда

$$\left(\frac{z}{x^4}\right)' = \frac{2}{3x^3}.$$

Интегрируя, находим

$$z = x^4\left(-\frac{1}{3x^2} + C\right) = -\frac{x^2}{3} + Cx^4.$$

Возвращаясь к прежней функции y, получаем

$$y = z^{3/2} = \left(-\frac{x^2}{3} + Cx^4\right)^{3/2}.$$

$\triangle$

4.3.1. Уравнение Риккати

Определение. ***Уравнением Риккати*** называют уравнение вида

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x).$$

Другими словами, это уравнение, в котором правая часть является квадратичной функцией по отношению к y. Если известно (угадано) какое-либо решение φ, то уравнение Риккати сводится к уравнению Бернулли подстановкой $y = z + \varphi$.

Пример 4.3.2. Рассмотрим уравнение Риккати $y' = y^2 - e^{2x} + e^x$. Заметим, что $\varphi(x) = e^x$ — его решение. Сделаем подстановку

$$y = z + e^x,$$

где z — новая искомая функция от x. Тогда $y' = z' + e^x$ и уравнение принимает вид

$$z' + e^x = (z + e^x)^2 - e^{2x} + e^x \iff z' = z^2 + 2e^x z.$$

Полученное уравнение Бернулли можно решить с помощью замены, обсуждавшейся выше. △

Уравнение Риккати лишь в исключительных случаях разрешимо в квадратурах (то есть решение представимо с помощью конечной комбинации элементарных и алгебраических функций и интегралов от них).

Теорема 4.3.3 (Лиувилль). *Уравнение*

$$y' = y^2 + x^\alpha$$

интегрируется в квадратурах, если и только если $\alpha/(2\alpha + 4) \in \mathbb{Z}$ *или* $\alpha = -2$.

Лекция 5

§5.1. Уравнения высшего порядка

Определение. ***Дифференциальным уравнением*** n***-го порядка*** называют уравнение вида

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{5.1}$$

Определение. Функция $\varphi \colon E \to \mathbb{R}$ — ***решение уравнения*** (5.1), если $E = \langle a, b \rangle$ и

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0 \quad \text{на } E.$$

Определение. ***Каноническим уравнением*** будем называть уравнение

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{5.2}$$

разрешённое относительно старшей производной.

Пример 5.1.1. Найдём общее решение уравнения $y'' = \sin x$.

Имеем

$$y' = \int \sin x \, dx = -\cos x + C_1.$$

Интегрируя ещё раз, находим

$$y = \int (-\cos x + C_1) \, dx + C_2 = -\sin x + C_1 x + C_2.$$

Значит, общее решение имеет вид

$$y = -\sin x + C_1 x + C_2, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \qquad \triangle$$

Определение. ***Задачей Коши*** для канонического уравнения (5.2) называют задачу нахождения его решения, удовлетворяющего ***начальным условиям***

$$y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y_0', \; \ldots, \; y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \tag{5.3}$$

Набор чисел $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$ при этом называют ***начальными данными***.

Задача Коши имеет простую геометрическую и механическую трактовку, если порядок уравнения равен двум. Допустим, требуется решить задачу

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0'.$$

С геометрической точки зрения требуется найти кривую, проходящую через точку с координатами (x_0, y_0), касательная к которой в этой точке имеет угловой коэффициент, равный y_0'.

Чтобы сделать механический смысл более ясным, сформулируем ту же задачу в других обозначениях:

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}), \quad x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = v_0.$$

Здесь искомая функция $x(t)$ — координата материальной точки в момент времени t. В механике производную обозначают точкой над функцией, то есть $\dot{x}$ и $\ddot{x}$ суть первая и вторая производная функции x по времени t. Требуется найти закон движения, при котором движущаяся точка в начальный момент времени t_0 находится в положении x_0 и имеет при этом скорость v_0 (рис. 5.1).

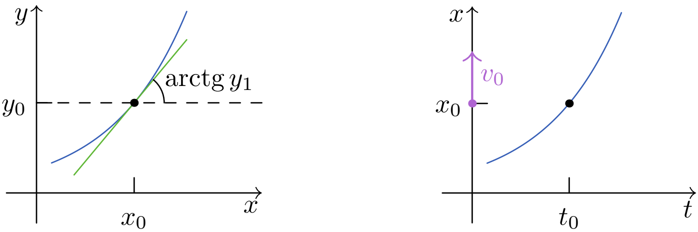

Рис. 5.1. Геометрический и механический смысл задачи Коши для уравнения второго порядка

Существуют различные подходы к поиску решения уравнения высокого порядка. Среди них: понижение порядка уравнения (обычно чем ниже порядок уравнения, тем проще его решить), сведение к системе уравнений, применение алгоритмов, разработанных для специальных видов уравнений (например, линейных).

§5.2. Методы понижения порядка

Рассмотрим некоторые случаи, допускающие понижение порядка уравнения.

5.2.1. Уравнение без искомой функции

Простейший случай — уравнение $y^{(n)} = f(x)$. Поскольку $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$, то

$$y^{(n-1)} = \int f(x)\,dx + C_1.$$

Таким образом порядок уравнения уменьшается на единицу.

В общем случае введение новой искомой функции $z = y^{(k)}$ на k единиц понижает порядок уравнения

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Пример 5.2.1. Решить уравнение $y'' = y'$.

Пусть $z = y'$. Тогда $z' = z$, откуда $z = C_1 e^x$. Так как $y' = z$, имеем

$$y = \int C_1 e^x\, dx = C_1 e^x + C_2. \qquad \triangle$$

5.2.2. Уравнение без независимой переменной

Рассмотрим уравнение

$$F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{5.4}$$

Для начала остановимся на случае уравнения второго порядка

$$F(y, y', y'') = 0. \tag{5.5}$$

Покажем, что подстановка $y'(x) = z(y(x))$ понижает порядок уравнения.

Утверждение 5.2.2. *Пусть*

$$y'(x) = z(y(x)), \quad \forall x \in \operatorname{dom} y, \tag{5.6}$$

$$F(t, z(t), z'(t)z(t)) = 0, \quad \forall t \in \operatorname{dom} z. \tag{5.7}$$

Тогда

$$F(y(x), y'(x), y''(x)) = 0, \quad \forall x \in \operatorname{dom} y. \tag{5.8}$$

Доказательство. Возьмём $x \in \operatorname{dom} y$. В силу (5.6) будет $y(x) \in \operatorname{dom} z$. Поэтому, положив $t = y(x)$ в (5.7), имеем

$$F(y(x), z(y(x)), z'(y(x))z(y(x))) = 0. \tag{5.9}$$

Дифференцируя равенство в соотношении (5.6), находим

$$y''(x) = z'(y(x))y'(x).$$

Отсюда и в силу (5.6) равенство (5.9) принимает вид

$$F(y(x), y'(x), y''(x)) = 0.$$

Это и требовалось доказать. $\square$

Утверждение 5.2.2 даёт следующий метод решения уравнения (5.5). Сначала решаем вспомогательное уравнение

$$F(t, z, z'z) = 0.$$

Оно получается из исходного уравнения, если положить $y'(x) = z(y(x))$, а затем считать независимой переменной выражение $y(x)$, обозначив его за t. На практике, однако, новую переменную t не вводят, а временно меняют смысл переменной y, считая её независимой. Далее используем найденную функцию z, чтобы решить уравнение

$$y' = z(y).$$

Полученные решения будут решениями исходного уравнения (5.5).

В общем случае так будут найдены не все возможные решения уравнения (5.5). Утверждение 5.2.2 можно обратить при дополнительном условии, потребовав обратимость решения уравнения (5.5). В этом случае условия (5.6) и (5.7) выполнятся при $z = y' \circ y^{-1}$.

Можно показать, что и для произвольного порядка n подстановка $y' = z(y)$ понижает порядок уравнения (5.4) на единицу. Приведём ещё формулу для третьей производной искомой функции:

$$y^{(3)} = (z'(y)z(y))' = z''(y)y'z(y) + z'(y)z'(y)y' = z''(y)z^2(y) + z'(y)^2 z(y).$$

Пример 5.2.3. Решить уравнение $y'' = y'^2$.

Сделаем замену $z(y) = y'$. Тогда $y'' = z'z$. Имеем

$$z'z = z^2.$$

Одно из решений: $z = 0$.

При $z \neq 0$, разделив уравнение на z, получим $z' = z$, то есть $z = Ce^y$. При этом $C \in \mathbb{R}$, если учесть и случай $z = 0$.

Теперь решим уравнение $z(y) = y'$, то есть $Ce^y = y'$. Перейдя к уравнению в дифференциалах, находим

$$e^{-y} dy = C\, dx.$$

Значит, $e^{-y} = Cx + A$. △

5.2.3. Уравнение, однородное относительно искомой функции и её производных

Пусть при любом допустимом значении t

$$F(x, ty, ty', \ldots, ty^{(n)}) = t^m F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}).$$

Тогда порядок уравнения

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

понижается при помощи замены $z = y'/y$.

Пример 5.2.4. Рассмотрим уравнение

$$xyy'' - xy'^2 - yy' = 0.$$

Обозначим левую часть через $F(x, y, y', y'')$. Тогда

$$F(x, ty, ty', ty'') = t^2 F(x, y, y', y'').$$

Значит, исходное уравнение — однородное по отношению к y, y', y''.

Сделаем подстановку

$$z = \frac{y'}{y}.$$

Отсюда $y' = zy$ и $y'' = z'y + z^2 y$. При сокращении на y^2 уравнение примет вид

$$xz' - z = 0.$$

Решение этого уравнения с разделяющимися переменными: $z = Cx$.

Вернёмся к функции y:

$$\frac{y'}{y} = Cx.$$

Следовательно, $y = Ae^{Bx^2}$, $A, B \in \mathbb{R}$. △

5.2.4. Уравнение в точных производных

Допустим, что левая часть уравнения

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

представляет собой производную от некоторой функции Φ. То есть

$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = \frac{d}{dx}\Phi(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)).$$

Отсюда

$$\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = C.$$

Это уравнение, порядок которого на единицу меньше прежнего.

Пример 5.2.5. Рассмотрим задачу Коши

$$y'' = xy' + y + 1, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Заметим, что данное уравнение можно переписать так:

$$(y')' = (xy)' + x'.$$

Используя линейность производной, получаем

$$(y' - xy - x)' = 0.$$

Отсюда

$$y' - xy - x = C.$$

Принимая во внимание начальные условия, находим значение постоянной

$$C = y'(0) - 0 \cdot y(0) - 0 = 0.$$

Остаётся решить уравнение с разделяющимися переменными

$$y' = x(y + 1).$$

Разделив обе части на $y+1$ и проинтегрировав, приходим к семейству функций

$$y = Ce^{x^2/2} - 1.$$

Подставим начальные данные, чтобы найти C:

$$y(0) = Ce^0 - 1,$$

отсюда $C = 2$.

Таким образом, решением поставленной задачи Коши является функция

$$y = 2e^{x^2/2} - 1, \quad x \in \mathbb{R}. \qquad \triangle$$

§5.3. Нормальная система

Договоримся нумеровать векторы из $\mathbb{R}^n$ верхними индексами, а их компоненты — нижними.

Определение. ***Нормальной системой*** дифференциальных уравнений порядка n называется система вида

$$\begin{cases} r_1' = f_1(t, r_1, \ldots, r_n), \\ \ldots \\ r_n' = f_n(t, r_1, \ldots, r_n). \end{cases}$$

Если положить

$$r = \begin{bmatrix} r_1 \\ \ldots \\ r_n \end{bmatrix}, \quad f(t, r) = \begin{bmatrix} f_1(t, r) \\ \ldots \\ f_n(t, r) \end{bmatrix},$$

то система компактно запишется в виде одного n-мерного уравнения

$$r' = f(t, r). \tag{5.10}$$

Определение. Вектор-функция $\varphi\colon E \to \mathbb{R}^n$ — ***решение системы*** (5.10), если $E = \langle a, b\rangle$ и $\varphi'(t) \equiv f(t, \varphi(t))$ на E.

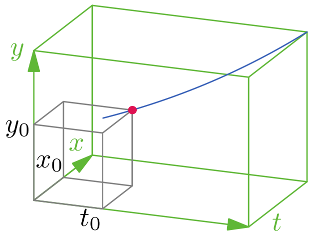

Рис. 5.2. Интегральная кривая двумерного уравнения (здесь t — независимая переменная, от которой зависят компоненты x, y искомой вектор-функции)

Определение. ***Интегральной кривой*** системы (5.10) называют график её решения.

В отличие от одномерного случая, интегральная кривая — это график вектор-функции, расположенный в $(n+1)$-мерном пространстве (рис. 5.2).

Определение. ***Задачей Коши*** для системы (5.10) называется задача нахождения её решения, удовлетворяющего начальному условию $r(t_0) = r^0$. Значения t_0, r^0 называют ***начальными данными***.

С геометрической точки зрения задача Коши подразумевает поиск интегральной кривой, проходящей через заданную точку $(n+1)$-мерного пространства (рис. 5.2).

Выбор буквы t в качестве независимой переменной связан с механической интерпретацией решения системы: интегральная кривая — траектория, вдоль которой движется точка с течением времени t. Если компонент искомой вектор-функции не более трёх, то будем обозначать их через x, y и z. Все производные, если не оговорено противное, берутся по переменной t.

Пример 5.3.1. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x' = 2x, \\ y' = x + 2y. \end{cases}$$

Первое уравнение — линейное однородное. Его общее решение

$$x = C_1 e^{2t}.$$

Подставляя эту функцию во второе уравнение системы, приходим к линейному неоднородному уравнению:

$$y' = 2y + C_1 e^{2t}.$$

Решая его, например, методом Лагранжа, приходим к функции

$$y = C_1 t e^{2t} + C_2 e^{2t}.$$

Составим из полученных функций вектор

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 e^{2t} \\ C_1 t e^{2t} + C_2 e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Эта формула описывает общее решение исходной системы. △

Рассмотрим вопрос о связи между нормальными системами и уравнениями высших порядков.

Определение. Зададим отображение Λ_n формулой

$$\Lambda_n \varphi = (\varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(n-1)})^T.$$

Индекс n будем опускать, если его значение ясно из контекста.

Лемма 5.3.2 (о системе, равносильной уравнению). *Отображение* Λ_n *— биекция между решениями уравнения*

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{5.11}$$

и решениями системы

$$r' = \begin{bmatrix} r_2 \\ r_3 \\ \ldots \\ r_n \\ f(t, r) \end{bmatrix}. \tag{5.12}$$

Доказательство. Пусть y — решение уравнения (5.11). Пусть $r = \Lambda_n y$, то есть

$$r_1 = y, \quad r_2 = y', \quad r_3 = y'', \quad \ldots, \quad , r_{n-1} = y^{(n-2)}, \quad r_n = y^{(n-1)}.$$

Дифференцируя каждое равенство, имеем

$$\begin{aligned}
&r_1' = y' = r_2, \\
&r_2' = y'' = r_3, \\
&\ldots \\
&r_{n-1}' = y^{(n-1)} = r_n, \\
&r_n' = y^{(n)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = f(t, r_1, r_2, \ldots, r_n).
\end{aligned}$$

Следовательно, вектор-функция $\Lambda_n y$ — решение системы (5.12).

Если y_1, y_2 — разные функции, то $\Lambda_n y_1, \Lambda_n y_2$ — разные вектор-функции, так как они отличаются хотя бы первыми компонентами. Следовательно, Λ_n — инъекция.

Пусть r — решение системы (5.12). Дифференцируя первое уравнение системы и принимая во внимание второе, получаем $r_1'' = r_3$. Дифференцируя полученное равенство и принимая во внимание третье уравнение системы, имеем $r_1^{(3)} = r_4$. Продолжая аналогично, находим $r_1^{(n-1)} = r_n$. Дифференцируя это равенство и принимая во внимание последнее уравнение системы, получаем $r_1^{(n)} = f(t, r)$. Учитывая все найденные соотношения, имеем $r = \Lambda_n r_1$. Это означает, что r_1 — прообраз вектор-функции r в множестве решений уравнения (5.11) при отображении Λ_n. Следовательно, Λ_n — сюръекция. $\square$

Определение. Систему (5.12) будем называть ***системой, равносильной уравнению*** (5.11).

Лемма 5.3.2 позволяет перенести теорию и методы решения систем на уравнения высших порядков.

5.3.1. Каноническая система

В прикладных задачах встречаются системы уравнений высшего порядка. Пусть мы хотим узнать закон движения материальной точки. При этом известна действующая на неё сила F, зависящая от момента времени t, положения точки в пространстве r, и её скорости r'. Если m — масса данной материальной точки, то согласно второму закону Ньютона

$$mr'' = F(t, r, r').$$

Записывая это векторное уравнение покоординатно, приходим к системе

$$\begin{cases} x'' = f_x(t, x, y, z, x', y', z'), \\ y'' = f_y(t, x, y, z, x', y', z'), \\ z'' = f_z(t, x, y, z, x', y', z'), \end{cases}$$

где f_x, f_y, f_z — компоненты функции $\frac{1}{m}F$.

Заметим, что каждое уравнение этой системы выражено относительно производной наибольшего порядка. Такие системы называют **каноническими**. Аналогично случаю одного уравнения, каноническая система сводится к нормальной при помощи введения новых искомых функций.

Например, шесть функций

$$x_1 = x, \quad x_2 = x', \quad y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad z_1 = z, \quad z_2 = z'$$

удовлетворяют эквивалентной нормальной системе 6-го порядка

$$\begin{cases} x_1' = x_2, & x_2' = f_x(t, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2), \\ y_1' = y_2, & y_2' = f_y(t, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2), \\ z_1' = z_2, & z_2' = f_z(t, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2). \end{cases}$$

В общем случае порядок равносильной нормальной системы равен сумме порядков всех уравнений, входящих в каноническую систему.

Лекция 6

§6.1. Условие Липшица

Через r_i обозначаем компоненты вектора $r \in \mathbb{R}^n$. Векторы из $\mathbb{R}^n$ нумеруются верхними индексами. Через A_i обозначаем строки, A^j — столбцы, A_i^j — компоненты матрицы A.

Определение. Пусть $r \in \mathbb{R}^n$. Тогда $|r| := \max\limits_{i\in[1:n]} |r_i|$.

Определение. Пусть $A \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R})$. Тогда $|A| := \max\limits_{i\in[1:n],\ j\in[1:m]} \left|A_i^j\right|$.

Лемма 6.1.1. *Пусть $f \in C\left([a,b] \to \mathbb{R}^n\right)$. Тогда*

$$\left|\int_a^b f(\tau)\,d\tau\right| \leqslant \int_a^b |f(\tau)|\,d\tau.$$

Доказательство. Принимая во внимание определение нормы, имеем

$$\left|\int_a^b f(\tau)\,d\tau\right| = \max_i\left|\int_a^b f_i(\tau)\,d\tau\right| \leqslant \max_i \int_a^b |f_i(\tau)|\,d\tau \leqslant \max_i \int_a^b \max_j |f_j(\tau)|\,d\tau =$$

$$= \max_i \int_a^b |f(\tau)|\,d\tau = \int_a^b |f(\tau)|\,d\tau. \qquad \square$$

Лемма 6.1.2. *Пусть $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathrm{Mat}_{n\times l}(\mathbb{R})$. Тогда*

$$|AB| \leqslant n|A||B|.$$

Доказательство. Пусть $AB = C$. Тогда

$$|C_i^j| = \left|\sum_{k=1}^n A_i^k B_k^j\right| \leqslant \sum_{k=1}^n |A_i^k||B_k^j| \leqslant \sum_{k=1}^n |A||B| = n|A||B|.$$

Поэтому $|AB| \leqslant n|A||B|$. $\square$

Определение. Функция $f\colon G \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет ***условию Липшица*** на множестве G, если найдётся $L \in \mathbb{R}$ (***константа Липшица***), такое что для любых точек $x^1, x^2 \in G$ выполнено

$$|f(x^2) - f(x^1)| \leqslant L|x^2 - x^1|.$$

Обозначение: $f \in \operatorname{Lip} G$.

Определение. Функция $f\colon G \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет ***условию Липшица локально*** на множестве G, если для любой точки $x \in G$ можно указать её окрестность $U(x)$, такую что $f \in \mathrm{Lip}(U(x) \cap G)$. Обозначение: $f \in \mathrm{Lip}_{loc}\, G$.

Пример 6.1.3. Для $f(x) = \sqrt{x}$ будет $f \in \mathrm{Lip}[\frac{1}{2}, 1]$, $f \notin \mathrm{Lip}(0,1]$, $f \in \mathrm{Lip}_{loc}(0,1]$, $f \notin \mathrm{Lip}_{loc}[0,1]$. △

Пример 6.1.4. Если $f \in C^1[a,b]$, то $f \in \mathrm{Lip}[a,b]$. Обратное неверно: например, при $f(x) = |x|$ будет $f \in \mathrm{Lip}[-1,1]$. △

Определение. Функция $f\colon G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,r} \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет ***условию Липшица по*** r ***(равномерно по*** t***)*** на множестве G, если найдётся $L \in \mathbb{R}$, такое что для любых точек $(t, r^1), (t, r^2) \in G$ справедливо неравенство

$$|f(t,r^2) - f(t,r^1)| \leqslant L|r^2 - r^1|.$$

Обозначение: $f \in \mathrm{Lip}_r\, G$.

Определение. Функция $f\colon G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,r} \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет ***условию Липшица по*** r ***локально*** на множестве G, если для любой точки $x \in G$ можно указать её окрестность $U(x)$, такую что $f \in \mathrm{Lip}_r(U(x) \cap G)$. Обозначение: $f \in \mathrm{Lip}_{r,loc}\, G$.

Пример 6.1.5. Пусть $f(t,r) = \sqrt{t} + \sqrt{r}$, $G = [0,1] \times (0,1]$. Тогда $f \notin \mathrm{Lip}_{loc}\, G$, $f \in \mathrm{Lip}_{r,loc}\, G$, $f \notin \mathrm{Lip}_r\, G$. △

Из определения нормы следует, что f удовлетворяет условию Липшица (глобальному или локальному) тогда и только тогда, когда этому условию удовлетворяет каждая из её n компонент.

Установим простое достаточное условие того, что $f \in \mathrm{Lip}_{r,loc}\, G$.

Лемма 6.1.6 (достаточное условие локальной липшицевости). *Пусть* $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,r}$ *— область,* $f \in C(G \to \mathbb{R}^n)$, $f'_r \in \mathrm{Mat}_n(C(G))$. *Тогда* $f \in \mathrm{Lip}_{r,loc}\, G$.

Доказательство. Возьмём произвольную точку из области G и построим открытый шар $B \subset G$ с центром в этой точке.

Пусть $(t,r^1), (t,r^2) \in B$. В силу выпуклости шара B будет $(t, r^1 + s(r^2 - r^1)) \in B$ при $s \in [0,1]$. Положим

$$g(s) = f(t, r^1 + s(r^2 - r^1)).$$

Тогда

$$f(t,r^2) - f(t,r^1) = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(s)\, ds = \int_0^1 f'_r \cdot r'_s\, ds =$$
$$= \int_0^1 f'_r(t, r^1 + s(r^2 - r^1)) \cdot (r^2 - r^1)\, ds.$$

Принимая во внимание леммы 6.1.1 и 6.1.2, получаем

$$\begin{aligned}\left|f(t,r^2)-f(t,r^1)\right| &\leqslant \int_0^1 n\left|f_r'(t,r^1+s(r^2-r^1))\right||r^2-r^1|\,ds \leqslant \\ &\leqslant n\sup_{x\in\overline{B}}|f_r'(x)|\cdot|r^2-r^1|.\end{aligned}$$

Следовательно, $f\in\operatorname{Lip}_r B$. По определению будет $f\in\operatorname{Lip}_{r,loc} G$. □

Пример 6.1.7. Пусть

$$f(t,x,y)=\begin{bmatrix} t+2(\sqrt{x}+\sqrt{y}) \\ txy \end{bmatrix}.$$

Частная матрица Якоби

$$f'_{(x,y)}(t,x,y)=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{x}} & \frac{1}{\sqrt{y}} \\ ty & tx \end{bmatrix}, \quad f'_{(x,y)}\in\operatorname{Mat}_2(C(G)),$$

где $G=\mathbb{R}\times(0,+\infty)^2$. По лемме 6.1.6 будет $f\in\operatorname{Lip}_{(x,y),loc} G$. △

Ясно, что $\operatorname{Lip}_r G\subset\operatorname{Lip}_{r,loc} G$ для произвольной области G. Обратного включения на всей области нет. Однако, обратное включение верно на компактных подмножествах.

Лемма 6.1.8 (достаточное условие глобальной липшицевости). *Пусть область $G\subset\mathbb{R}^{n+1}_{t,r}$, $f\in C(G\to\mathbb{R}^n)\cap\operatorname{Lip}_{r,loc}$, компакт $K\subset G$. Тогда $f\in\operatorname{Lip}_r K$.*

Доказательство. Докажем методом от противного. Пусть $f\notin\operatorname{Lip}_r K$. Тогда для любого $N\in\mathbb{N}$ найдётся пара точек (t_N,r^N), $(t_N,\widetilde{r}^N)\in K$, для которых верно неравенство

$$|f(t_N,r^N)-f(t_N,\widetilde{r}^N)|>N|r^N-\widetilde{r}^N|. \tag{6.1}$$

Поскольку K — компакт, то из последовательности $\{(t_N,r^N)\}$ можно выбрать подпоследовательность с номерами $\{N_k\}$, сходящуюся к некоторой точке $(t,r)\in K$. Затем из последовательности $\{(t_{N_k},\widetilde{r}_{N_k})\}$ выберем подпоследовательность с номерами $\{N_{k_l}\}$, сходящуюся к $(t,\widetilde{r})$. Пусть $\nu=\{N_{k_l}\mid l\in\mathbb{N}\}$.

Возможны два случая: $r=\widetilde{r}$ и $r\neq\widetilde{r}$. Рассмотрим сначала первый.

По условию $f\in\operatorname{Lip}_{r,loc} G$, значит, найдётся окрестность U точки (t,r), в которой $f\in\operatorname{Lip}_r U$, то есть существует постоянная L, для которой

$$|f(\tau,\rho)-f(\tau,\widetilde{\rho})|\leqslant L|\rho-\widetilde{\rho}|$$

при любых $(\tau,\rho),(\tau,\widetilde{\rho})\in U$. Выберем номер $N\in\nu$ так, чтобы $N>L$ и (t_N,r^N), $(t_N,\widetilde{r}^N)\in U$, и положим $\tau=t_N$, $\rho=r^N$, $\widetilde{\rho}=\widetilde{r}^N$. Тогда из неравенства (6.1) следует

$$|f(\tau,\rho)-f(\tau,\widetilde{\rho})|>N|\rho-\widetilde{\rho}|\geqslant L|\rho-\widetilde{\rho}|,$$

что противоречит предыдущему неравенству.

Пусть теперь $r \neq \widetilde{r}$. В неравенстве (6.1) перейдём к пределу при $\nu \ni N \to \infty$. В силу непрерывности функции f получаем

$$|f(t, r) - f(t, \widetilde{r})| \geqslant \infty,$$

что неверно. $\square$

Лекция 7

§7.1. Интегральное уравнение

Определение. Пусть $f\colon G \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$. Функция $\varphi\colon E \to \mathbb{R}^n$ — ***решение на*** E ***интегрального уравнения***

$$r(t) = r^0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, r(\tau))\,d\tau,$$

если $E = \langle a, b \rangle$ и $\varphi(t) \equiv r^0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))\,d\tau$ на E, где интеграл понимается в смысле Римана.

Лемма 7.1.1 (о равносильном интегральном уравнении). *Пусть* $E = \langle a, b \rangle$, $t_0 \in E$, G *— область в* $\mathbb{R}^{n+1}$, $(t_0, r^0) \in G$, $f \in C(G \to \mathbb{R}^n)$. *Тогда* φ *— решение на* E *задачи Коши*

$$r' = f(t, r), \quad r(t_0) = r^0, \tag{7.1}$$

если и только если φ *— решение на* E *уравнения*

$$r(t) = r^0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, r(\tau))\,d\tau. \tag{7.2}$$

Доказательство. Пусть φ — решение (7.1) на E. Интегрируя равенство $\varphi'(\tau) = f(\tau, \varphi(\tau))$ от t_0 до $t \in E$, обе части которого — непрерывные функции, имеем

$$\varphi(t) - \varphi(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))\,d\tau.$$

Поскольку $\varphi(t_0) = r^0$, то функция φ — решение уравнения (7.2) по определению.

Докажем обратное. Пусть φ — решение (7.2) на E. Тогда из равенства

$$\varphi(t) = r^0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))\,d\tau \tag{7.3}$$

следует, что $\varphi \in C(E)$. Отсюда и из (7.3) вытекает дифференцируемость φ. Дифференцируя (7.3) по t, получаем: $\varphi'(t) \equiv f(t, \varphi(t))$. Кроме того, из (7.3) имеем $\varphi(t_0) = r^0$. Таким образом, φ — решение задачи (7.1) по определению. $\square$

Лемма 7.1.2 (о гладкой стыковке решений). *Пусть область* $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,r}$, $f \in C(G \to \mathbb{R}^n)$, $(t_0, r^0) \in G$, *уравнение* $r' = f(t, r)$ *имеет решения:* φ_- *на* (a, t_0), φ_+ *на* (t_0, b). *Кроме того,* $\varphi_-(t_0-) = \varphi_+(t_0+) = r^0$. *Тогда функция*

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_-(t), & \textit{если } t \in (a, t_0), \\ r^0, & \textit{если } t = t_0, \\ \varphi_+(t), & \textit{если } t \in (t_0, b) \end{cases}$$

является решением того же уравнения на (a, b).

Доказательство. Пусть $t, t_- \in (a, t_0)$. По лемме 7.1.1

$$\varphi_-(t) = \varphi_-(t_-) + \int_{t_-}^{t} f(\tau, \varphi_-(\tau))\, d\tau.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $t_- \to t_0-$ и замечая, что $\varphi_- = \varphi$ для точек из отрезка $\overline{t, t_-}$, получаем

$$\varphi(t) = r^0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau. \tag{7.4}$$

Поступая аналогично для точек $t, t_+ \in (t_0, b)$, при $t_+ \to t_0+$ приходим к равенству (7.4).

Таким образом, равенство (7.4) выполнено для всех $t \in (a, b)$. Остаётся применить лемму 7.1.1. □

Лемма 7.1.3 (Гронуолл). *Пусть* $D = \langle a, b \rangle$, $\varphi \in C(D)$, $t_0 \in D$, $\lambda, \mu \geqslant 0$, *при любом* $t \in D$ *верно двойное неравенство*

$$0 \leqslant \varphi(t) \leqslant \lambda + \mu \left| \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\, d\tau \right|.$$

Тогда для любого $t \in D$

$$\varphi(t) \leqslant \lambda e^{\mu |t - t_0|}.$$

Доказательство. Рассмотрим случай $t \geqslant t_0$ (при $t < t_0$ доказательство аналогично). Положим

$$v(t) = \lambda + \mu \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\, d\tau.$$

Из данного в условии неравенства имеем $v'(t) = \mu\varphi(t) \leqslant \mu v(t)$. Умножая полученное неравенство на $e^{-\mu t}$, находим

$$v' e^{-\mu t} - \mu v e^{-\mu t} \leqslant 0,$$

то есть

$$(v e^{-\mu t})' \leqslant 0.$$

Следовательно, функция $v e^{-\mu t}$ убывает при $t \geqslant t_0$. Поэтому

$$v(t) e^{-\mu t} \leqslant v(t_0) e^{-\mu t_0}.$$

Отсюда

$$\varphi(t) \leqslant v(t) \leqslant v(t_0) e^{\mu(t - t_0)} = \lambda e^{\mu(t - t_0)}.$$ □

§7.2. Теорема существования и единственности

Определение. Пусть область $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,r}$, $(t_0, r^0) \in G$,

$$\Pi := \left\{(t,r) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |t - t_0| \leqslant a, |r - r^0| \leqslant b\right\},$$

где числа $a, b > 0$ таковы, что $\Pi \subset G$. Положим $M = \max\limits_{(t,r)\in\Pi} |f(t,r)|$, $h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$ (если $M = 0$, то $h := a$). Отрезок $[t_0 - h, t_0 + h]$ называется ***отрезком Пеано***, соответствующим точке (t_0, r^0) (рис. 7.1).

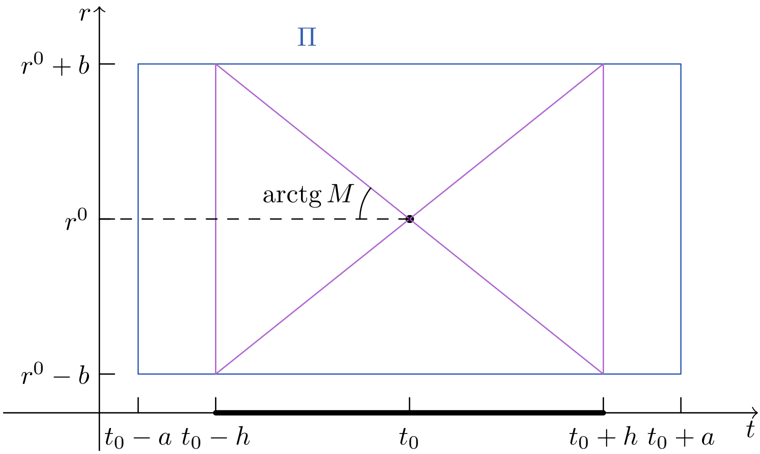

Рис. 7.1. Отрезок Пеано $[t_0 - h, t_0 + h]$

Теорема 7.2.1 (Пикар, существование и единственность решения ЗК). *Пусть область* $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,r}$, $f \in C(G \to \mathbb{R}^n) \cap \mathrm{Lip}_{r,loc}$, $(t_0, r_0) \in G$. *Тогда*

(i) на отрезке Пеано существует решение задачи

$$r' = f(t,r), \quad r(t_0) = r_0; \tag{7.5}$$

(ii) если ψ^1 *и* ψ^2 *— решения (7.5), то* $\psi^1 \equiv \psi^2$ *на* $\mathrm{dom}\,\psi^1 \cap \mathrm{dom}\,\psi^2$.

Доказательство. Будем считать, что $t_0 = 0$, $r^0 = 0$ (в противном случае перенесём начало координат в точку (t_0, r^0)). Достаточно установить существование решения на отрезке $[0, h]$ — правой половине отрезка Пеано (рассуждения на $[-h, 0]$ аналогичны, а на всём отрезке решение получается применением леммы 7.1.2 о гладкой стыковке).

Пусть

$$\Pi := \left\{(t,r) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |t| \leqslant a, |r| \leqslant b\right\} \subset G, \quad M := \max_{\Pi} |f|, \quad h = \min\{a, b/M\}.$$

На отрезке $[0, h]$ зададим последовательность функций

$$\varphi^0(t) = 0,$$
$$\varphi^{k+1}(t) = \int_0^t f(\tau, \varphi^k(\tau))\, d\tau.$$

Дальнейшую часть доказательства разобьём на этапы:

1. Чтобы построить функцию φ^{k+1} должно быть $(t, \varphi^k(t)) \in G$ при всех $t \in [0, h]$. Докажем более сильное утверждение: $(t, \varphi^k(t)) \in \Pi$ при всех $t \in [0, h]$.
2. Покажем, что последовательность (φ^k) равномерно на $[0, h]$ сходится к некоторой функции φ.
3. Установим, что φ — решение интегрального уравнения, равносильного задаче (7.5). Тогда останется применить лемму 7.1.1 для завершения доказательства пункта (i).
4. Докажем единственность (пункт (ii)), применив лемму Гронуолла.

1. При $k = 0$, очевидно, $(t, \varphi^k(t)) \in \Pi$. Пусть это верно при некотором $k \in \mathbb{Z}_+$. Тогда функция φ^{k+1} определена на $[0, h]$ и

$$\left|\varphi^{k+1}(t)\right| \leqslant \int_0^t |f(\tau, \varphi^k(\tau))|\, d\tau \leqslant Mt \leqslant Mh \leqslant M\frac{b}{M} = b,$$

что влечёт включение $(t, \varphi^{k+1}(t)) \in \Pi$ при всех $t \in [0, h]$.

2. Воспользуемся критерием Коши: установим, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $N \in \mathbb{N}$, такое что при всех $m \geqslant N$, всех $k \in \mathbb{N}$ и всех $t \in [0, h]$

$$\left|\varphi^{m+k}(t) - \varphi^m(t)\right| \leqslant \varepsilon.$$

По лемме 6.1.8 будет $f \in \mathrm{Lip}_r\, \Pi$ с некоторой константой Липшица L. Индукцией по m докажем неравенство

$$\left|\varphi^{m+k}(t) - \varphi^m(t)\right| \leqslant \frac{ML^m t^{m+1}}{(m+1)!}. \tag{7.6}$$

При $m = 0$ утверждение верно, так как

$$\left|\varphi^k(t) - \varphi^0(t)\right| \leqslant \int_0^t |f(\tau, \varphi^{k-1}(\tau))|\, d\tau \leqslant Mt.$$

Допуская его справедливость при некотором m, имеем

$$\left|\varphi^{m+1+k}(t) - \varphi^{m+1}(t)\right| \leqslant \int_0^t |f(\tau, \varphi^{m+k}(\tau)) - f(\tau, \varphi^m(\tau))|\, d\tau$$
$$\leqslant \int_0^t L|\varphi^{m+k}(\tau) - \varphi^m(\tau)|\, d\tau \leqslant \int_0^t L\frac{ML^m \tau^{m+1}}{(m+1)!}\, d\tau = \frac{ML^{m+1}t^{m+2}}{(m+2)!},$$

что и требовалось. Из (7.6) вытекает, что при любом $t \in [0, h]$

$$\left|\varphi^{m+k}(t) - \varphi^m(t)\right| \leqslant \frac{ML^m h^{m+1}}{(m+1)!}. \tag{7.7}$$

Выражение в правой части не зависит от t и k и стремится к нулю при $m \to \infty$, поскольку является общим членом ряда Тейлора для экспоненты. Значит, последовательность (φ^m) удовлетворяет критерию Коши. Обозначим через φ её предел на $[0, h]$.

3. Переходя к пределу при $m \to \infty$ в равенстве

$$\varphi^{m+1}(t) = \int_0^t f(\tau, \varphi^m(\tau))\, d\tau,$$

получаем

$$\varphi(t) = \lim_{m\to+\infty} \int_0^t f(\tau, \varphi^m(\tau))\, d\tau. \tag{7.8}$$

В пункте 1 было установлено, что $(t, \varphi^m(t)) \in \Pi$ при всех $t \in [0, h]$. Тогда при $m \to +\infty$ будет $(t, \varphi(t)) \in \Pi$ при всех таких t. Следовательно,

$$|f(\tau, \varphi^m(\tau)) - f(\tau, \varphi(\tau))| \leqslant L\, |\varphi^m(\tau) - \varphi(\tau)|\,.$$

Учитывая равномерную сходимость φ^m, из данного неравенства следует, что $f(t, \varphi^m(t)) \to f(t, \varphi(t))$ при $m \to +\infty$ равномерно на $[0, h]$. Это позволяет внести знак предела под интеграл в (7.8). После этого по лемме 7.1.1 заключаем, что φ — решение задачи (7.5) на $[0, h]$.

4. Пусть ψ^1 и ψ^2 — решения (7.5), $E = \operatorname{dom}\psi^1 \cap \operatorname{dom}\psi^2$. По лемме 7.1.1

$$\psi^k(t) = \int_0^t f(\tau, \psi^k(\tau))\, d\tau, \quad t \in E, \quad k \in \{1, 2\}\,,$$

поэтому

$$\left|\psi^1(t) - \psi^2(t)\right| \leqslant \int_0^t \left|f(\tau, \psi^1(\tau)) - f(\tau, \psi^2(\tau))\right|\, d\tau.$$

Рассмотрим произвольный отрезок $[\alpha, \beta] \subset E$, содержащий ноль. Графики функций ψ^1 и ψ^2 на $[\alpha, \beta]$ — компактные множества. По лемме 6.1.8 найдётся постоянная $\widetilde{L}$, такая что

$$\left|f(\tau, \psi^1(\tau)) - f(\tau, \psi^2(\tau))\right| \leqslant \widetilde{L}|\psi^1(\tau) - \psi^2(\tau)|$$

при всех $\tau \in [\alpha, \beta]$. Следовательно,

$$\left|\psi^1(t) - \psi^2(t)\right| \leqslant \widetilde{L} \int_0^t |\psi^1(\tau) - \psi^2(\tau)|\, d\tau.$$

По лемме Гронуолла 7.1.3 будет $|\psi^1(t) - \psi^2(t)| = 0$ на $[\alpha, \beta]$, то есть ψ^1 и ψ^2 совпадают на $[\alpha, \beta]$. Поскольку отрезок $[\alpha, \beta]$ выбирался произвольно из E, то функции ψ^1 и ψ^2 совпадают и на всём промежутке E. □

Определение. При доказательстве использовались ***последовательные приближения Пикара***

$$\varphi^0(t) = r^0, \quad \varphi^{k+1}(t) = r^0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi^k(\tau))\, d\tau.$$

Сформулируем как следствие теорему существования и единственности, условие которой сильнее, но в то же время проще, чем в теореме Пикара 7.2.1.

Следствие 7.2.2. *Пусть область $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,r}$, $f \in C(G \to \mathbb{R}^n)$, $f'_r \in \mathrm{Mat}_n(C(G))$, $(t_0, r^0) \in G$. Тогда на отрезке Пеано $[t_0 - h, t_0 + h]$ существует решение φ задачи Коши (7.5).*

Следствие 7.2.3 (теорема существования и единственности для уравнения высшего порядка). *Пусть область $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,y,y',\ldots,y^{(n-1)}}$, f, f'_y, $f'_{y'}$, $\ldots$, $f'_{y^{(n-1)}} \in C(G)$, $(t_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}) \in G$. Тогда*

(i) в некоторой окрестности точки t_0 существует решение задачи

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \\ y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = y'_0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}; \end{cases} \tag{7.9}$$

(ii) если ψ_1 и ψ_2 — решения (7.9), то $\psi_1 \equiv \psi_2$ на $\operatorname{dom}\psi_1 \cap \operatorname{dom}\psi_2$.

Лекция 8

§8.1. Продолжение решений

Теорема Пикара гарантирует существование решения задачи Коши на отрезке Пеано. Существует ли решение за пределами этого отрезка? Насколько далеко можно продолжить решение за его пределы? Этот параграф даёт ответы на поставленные вопросы в некоторых специальных случаях.

Определение. Решение φ уравнения $r' = f(t, r)$ ***продолжимо***, если существует решение ψ того же уравнения, такое что $\operatorname{dom}\varphi \subsetneq \operatorname{dom}\psi$ и $\psi|_{\operatorname{dom}\varphi} = \varphi$. Решение ψ называют ***продолжением решения*** φ.

Определение. Если для решения φ уравнения $r' = f(t, r)$ не существует продолжения, то функция φ — ***максимальное решение*** этого уравнения.

Пример 8.1.1. Уравнение $x' = 1 + x^2$ имеет решение $x = \operatorname{tg} t$, $t \in [-\pi/4, \pi/4]$. Для этого решения существует продолжение на интервал $(-\pi/2, \pi/2)$, заданное той же формулой. Функция $x = \operatorname{tg} t$, рассмотренная на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$, является максимальным решением. △

Теорема 8.1.2 (критерий локальной продолжимости). *Пусть область* $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,r}$, $f \in C(G \to \mathbb{R}^n) \cap \operatorname{Lip}_{r,loc}$, φ *— решение уравнения* $r' = f(t, r)$ *на промежутке* $[a, b)$. *Тогда решение* φ *продолжимо на отрезок* $[a, c]$ *при некотором* $c > b$, *если и только если* $(b, \varphi(b-)) \in G$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть ψ — продолжение на $[a, c]$ решения φ. Тогда в силу непрерывности функции ψ

$$\varphi(b-) = \psi(b-) = \psi(b).$$

Поскольку $b \in [a, c]$, то из определения решения следует $(b, \psi(b)) \in G$.

Достаточность. По теореме Пикара 7.2.1 существует решение χ задачи

$$r' = f(t, r), \quad r(b) = \varphi(b-)$$

на некотором отрезке $[b, b + h]$. Положим (рис. 8.1)

$$\psi(t) := \begin{cases} \varphi(t), t \in [a, b), \\ \chi(t), t \in [b, b + h]. \end{cases}$$

По лемме 7.1.2 о гладкой стыковке функция ψ — решение уравнения $r' = f(t, r)$ на $[a, b + h]$. Тогда ψ — продолжение решения φ на $[a, c]$, где $c = b + h$. □

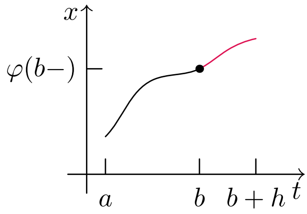

Рис. 8.1. Продолжение решения вправо

Замечание. Пусть уравнение $r' = f(t,r)$ рассматривается в области G, φ — его решение на отрезке $[a,b]$. Тогда по теореме 8.1.2 решение φ продолжимо и вправо за точку b, и влево за точку a. Отсюда следует, что максимальное решение может быть определено только на *интервале*, а не на произвольном промежутке.

Теорема 8.1.3 (существование и единственность максимального решения). *Пусть область $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,r}$, $f \in C(G \to \mathbb{R}^n) \cap \mathrm{Lip}_{r,loc}$, $(t_0, r^0) \in G$. Тогда*

(i) существует максимальное решение ψ задачи Коши

$$r' = f(t,r), \quad r(t_0) = r^0; \tag{8.1}$$

(ii) любое решение задачи (8.1) — сужение решения ψ.

Доказательство. *(i)* Пусть S — множество всевозможных решений задачи (8.1), определённых на произвольных промежутках. По теореме Пикара 7.2.1 это множество не пусто. Обозначим через a_φ и b_φ левый и правый конец промежутка $\operatorname{dom}\varphi$. Положим

$$a = \inf_{\varphi \in S} a_\varphi, \quad b = \sup_{\varphi \in S} b_\varphi.$$

Определим на (a,b) функцию ψ следующим образом. Пусть $t \in [t_0, b)$. Возьмём произвольное решение φ, для которого $t < b_\varphi$ (такое решение найдётся в силу определения числа b). Положим $\psi(t) = \varphi(t)$.

Если найдётся ещё одно решение φ_1, такое что $t < b_{\varphi_1}$, то $\varphi(t) = \varphi_1(t)$ по тереме Пикара 7.2.1. Тем самым, в точке t функция ψ определена однозначно.

Из определения функции ψ следует, что $\psi \equiv \varphi$ на $[t_0, b_\varphi)$.

Тогда ψ — решение на $[t_0, b_\varphi)$ задачи (8.1). Следовательно, $\psi'(t) = f(t, \psi(t))$. Так как t выбиралось произвольно из $[t_0, b)$, то последнее равенство верно на $[t_0, b)$. То есть ψ — решение на $[t_0, b)$.

Аналогично поступаем при $t \in (a, t_0]$. По лемме о гладкой стыковке функция ψ будет решением на (a,b).

Если решение ψ продолжимо на промежуток $(a,b]$, то по теореме 8.1.2 оно продолжимо и на промежуток $(a,c]$ при некотором $c > b$. Но это противоречит определению числа b. Аналогично для точки a. Таким образом, ψ — максимальное решение.

(ii) Пусть $\varphi \in S$. По теореме Пикара 7.2.1 будет $\psi \equiv \varphi$ на $\operatorname{dom}\psi \cap \operatorname{dom}\varphi = (a_\varphi, b_\varphi)$. Так как $(a_\varphi, b_\varphi) \subset (a, b)$, то φ — сужение функции ψ. $\square$

График максимального решения покидает любой компакт, лежащий в области задания уравнения. Строго это утверждение формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема 8.1.4 (о выходе интегральной кривой за пределы компакта). *Пусть $n \in \mathbb{N}$, область $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,r}$, $f \in C(G \to \mathbb{R}^n) \cap \mathrm{Lip}_{r,loc}$, φ — максимальное решение на (a, b) уравнения $r' = f(t, r)$, $K \subset G$ — компакт. Тогда найдётся $\Delta > 0$, такое что $(t, \varphi(t)) \notin K$ при всех $t \in (a, a + \Delta) \cup (b - \Delta, b)$.*

Доказательство. Заметим, что расстояние $\rho = \rho(K, \partial G)$ от компакта K до границы ∂G области G положительно (иначе можно было бы построить последовательность точек из K, сходящейся к точке на границе, но $\partial G \cap K = \varnothing$). Если $\rho < +\infty$, положим $c := \rho/2$, иначе пусть $c := 1$.

Вокруг каждой точки $p' \in K$ построим внутри G параллелепипед

$$\Pi(p') = \left\{p \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |p - p'| \leqslant c\right\}$$

и рассмотрим множество

$$K_c := \bigcup_{p' \in K} \Pi(p').$$

Поскольку K — компакт, то норма каждого элемента из K ограничена некоторым числом d. Если p — произвольная точка из K_c, то для некоторой точки $p' \in K$ будет $p \in \Pi(p')$, поэтому

$$|(t, r)| \leqslant |(t, r) - (t', r')| + |(t', r')| \leqslant c + d.$$

Значит, множество K_c ограничено.

Докажем его замкнутость. Рассмотрим последовательность (p_m) точек из K_c, сходящуюся к $p \in \mathbb{R}^{n+1}$. Для каждой такой точки найдётся параллелепипед $\Pi(p'_m)$, которому она принадлежит. Раз K — компакт, то существует подпоследовательность (p'_{m_k}), сходящаяся к некоторой точке $p' \in K$. Переходя к пределу в неравенствах

$$|p_{m_k} - p'_{m_k}| \leqslant c,$$

находим $|p - p'| \leqslant c$. Следовательно, $p \in K_c$.

Таким образом, K_c — компакт, и функция $|f|$ достигает на нём максимального значения

$$M := \max_{p \in K_c} |f(p)|.$$

Теперь предположим, что утверждение теоремы неверно. Пусть $\Delta = h/2$, где $h = \min\{c, c/M\}$. Тогда при некотором $t_0 \in (b - h/2, b)$ будет $(t_0, \varphi(t_0)) \in K$.

Рассмотрим задачу Коши $r' = f(t,r)$ с начальными данными $r(t_0) = \varphi(t_0)$. По теореме Пикара 7.2.1 она имеет решение ψ на отрезке $[t_0, t_0 + h]$. Пусть

$$\widetilde{\varphi}(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{если } t \in (a, t_0), \\ \psi(t), & \text{если } t \in [t_0, t_0 + h]. \end{cases}$$

По лемме 7.1.2 $\widetilde{\varphi}$ — решение уравнения $r' = f(t,r)$ на $(a, t_0 + h)$. Функция $\widetilde{\varphi}$ совпадает с φ на $(a,b) \cap (a, t_0 + h)$ по теореме Пикара 7.2.1. Но

$$t_0 + h > b - \frac{h}{2} + h = b + \frac{h}{2} > b,$$

то есть $\widetilde{\varphi}$ — продолжение φ вправо за точку b. Так как φ по условию является максимальным решением, приходим к противоречию. □

Установим важный с точки зрения приложений признак продолжимости.

Теорема 8.1.5 (о системе, сравнимой с линейной). *Пусть* $G = (a,b) \times \mathbb{R}^n_r$, $f \in C(G \to \mathbb{R}^n) \cap \mathrm{Lip}_{r,loc}$, *функции* $u, v \in C(a,b)$ *таковы, что для любой точки* $(t,r) \in G$

$$|f(t,r)| \leqslant u(t)|r| + v(t).$$

Тогда каждое максимальное решение уравнения $r' = f(t,r)$ *определено на* (a,b).

Доказательство. По теореме 8.1.3 любая задача Коши с начальными данными $(t_0, r^0) \in G$ имеет единственное максимальное решение φ, заданное на некотором интервале (α, β). Пусть, например, $\beta < b$. Применяя равносильное интегральное уравнение (лемма 7.1.1), при $t \in [t_0, \beta)$ находим

$$|\varphi(t)| = \left| r^0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau \right| \leqslant |r^0| + \int_{t_0}^{t} |f(\tau, \varphi(\tau))|\, d\tau \leqslant$$
$$\leqslant |r^0| + \int_{t_0}^{t} |u(\tau)||\varphi(\tau)|\, d\tau + \int_{t_0}^{t} |v(\tau)|\, d\tau.$$

Из непрерывности функций u и v вытекает их ограниченность на отрезке $[t_0, \beta]$. Следовательно, найдутся такие числа $\lambda, \mu \geqslant 0$, что при $t \in [t_0, \beta)$

$$|\varphi(t)| \leqslant \lambda + \mu \int_{t_0}^{t} |\varphi(s)|\, ds.$$

Тогда по лемме Гронуолла 7.1.3

$$|\varphi(t)| \leqslant \lambda e^{\mu(t - t_0)} \leqslant L,$$

где $L = \lambda e^{\mu(\beta - t_0)}$. Отсюда следует, что график решения φ не покидает компакт

$$K = \{(t,r) \in G \mid t \in [t_0, \beta], |r| \leqslant L\} \subset G$$

при $t \in [t_0, \beta)$, что противоречит теореме 8.1.4. □

Следствие 8.1.6. *Пусть* $G = (a, b) \times \mathbb{R}^n_r$, $f \in C(G \to \mathbb{R}^n) \cap \mathrm{Lip}_r$. *Тогда каждое максимальное решение уравнения* $r' = f(t, r)$ *определено на* (a, b).

Доказательство. Поскольку $f \in \mathrm{Lip}_r\, G$, то найдётся такое число $L > 0$, что для любых пар точек $(t, r), (t, \widetilde{r}) \in G$ верно

$$|f(t, r) - f(t, \widetilde{r})| \leqslant L|r - \widetilde{r}|.$$

Для произвольной точки $(t, r) \in G$ имеем

$$|f(t, r)| \leqslant |f(t, r) - f(t, 0)| + |f(t, 0)| \leqslant L|r| + |f(t, 0)|.$$

Полагая $u(t) = L$, $v(t) = |f(t, 0)|$ в условии теоремы 8.1.5, получаем требуемое. $\square$

Лекция 9

§9.1. Линейная система и её решение

Определение. ***Линейной системой дифференциальных уравнений*** называют систему вида

$$r' = P(t)r + q(t). \tag{9.1}$$

Теорема 9.1.1 (существование и единственность максимального решения ЛС). *Пусть $P \in \mathrm{Mat}_n(C((a, b) \to \mathbb{R}))$, $q \in C((a, b) \to \mathbb{R}^n)$, $t_0 \in (a, b)$, $r^0 \in \mathbb{R}^n$. Тогда максимальное решение задачи Коши*

$$r' = P(t)r + q(t), \quad r(t_0) = r^0 \tag{9.2}$$

существует, единственно и определено на интервале (a, b).

Доказательство. Заметим, что правая часть системы $f(t, r) = P(t)r+q(t)$ и её производная $f'_r = P(t)$ непрерывны в области $(a, b) \times \mathbb{R}^n$. Тогда по теореме 8.1.3 существует единственное максимальное решение задачи (9.2).

Имеем

$$|f(t, r)| \leqslant |P(t)r| + |q(t)| \leqslant n|P(t)| \cdot |r| + |q(t)|.$$

Так как функции $u(t) = n|P(t)|$ и $v(t) = |q(t)|$ непрерывны на (a, b), то по теореме 8.1.5 решение задачи (9.2) продолжимо на интервал (a, b). □

Теорема 9.1.2 (существование и единственность максимального решения ЛС с комплексными коэффициентами). *Пусть $P \in \mathrm{Mat}_n(C(a, b))$, $q \in C((a, b) \to \mathbb{C}^n)$, $t_0 \in (a, b)$, $r^0 \in \mathbb{C}^n$. Тогда максимальное решение задачи Коши*

$$r' = P(t)r + q(t), \quad r(t_0) = r^0 \tag{9.3}$$

существует, единственно и определено на интервале (a, b).

Доказательство. Пусть

$$P = A + iB, \quad q = \alpha + i\beta, \quad r = u + iv, \quad r^0 = u_0 + iv_0,$$

где $A, B \in \mathrm{Mat}_n(C((a, b) \to \mathbb{R}))$, $\alpha, \beta, u, v \in C((a, b) \to \mathbb{R}^n)$, $u_0, v_0 \in \mathbb{R}^n$.

Единственность. Пусть r — максимальное решение задачи (9.3). Тогда

$$u' + iv' = (A + iB)(u + iv) + \alpha + i\beta, \quad u(t_0) + iv(t_0) = u_0 + iv_0, \tag{9.4}$$

что равносильно

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u(t_0) \\ v(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}. \tag{9.5}$$

Значит, вектор $(u,v)^T$ — решение задачи (9.5) с вещественными коэффициентами. По теореме 9.1.1 задача (9.5) не может иметь более одного максимального решения. Поэтому, если решение задачи (9.2) существует, то оно единственно.

Существование. По теореме 9.1.1 задача (9.5) имеет максимальное решение $(u,v)^T$, заданное на (a,b). Поскольку соотношения (9.4) и (9.5) равносильны, получаем, что $r = u + iv$ — решение задачи (9.2) на (a,b). Решение r непродолжимо, иначе решение $(u,v)^T$ задачи (9.5) было бы продолжимо. $\square$

Замечание. В дальнейшем под решением линейной системы подразумевается максимальное решение.

§9.2. Линейные однородные системы

Определение. Если $q \equiv 0$ на (a,b), то система (9.1), то есть

$$r' = P(t)r, \tag{9.6}$$

называется ***однородной***, в противном случае — ***неоднородной***.

Упражнение 1. Докажите, что множество всех решений линейной однородной системы образует линейное пространство.

Определение. ***Определителем Вронского*** (***вронскианом***) вектор-функций $(r^k)_{k=1}^n$, где $r^k\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$, называют определитель

$$W(t) := \det(r^1(t), r^2(t), \ldots, r^n(t)).$$

Лемма 9.2.1 (свойства вронскиана решений ЛОС). *Пусть $(r^k)_{k=1}^n$ — решения системы (9.6). Тогда следующие утверждения равносильны:*

(i) $W \equiv 0$ на (a,b);

(ii) $W(t_0) = 0$ в некоторой точке $t_0 \in (a,b)$;

(iii) $(r^k)_{k=1}^n$ линейно зависимы на (a,b).

Доказательство. Проведём доказательство по схеме: (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i).

(i) $\Rightarrow$ (ii) Это следствие очевидно.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Пункт (ii) означает, что векторы $(r^k(t_0))_{k=1}^n$ линейно зависимы. Значит, найдётся набор чисел $(c_k)_{k=1}^n$, такой что

$$\sum_{k=1}^n c_k r^k(t_0) = 0.$$

Положим $\varphi := c_1 r^1 + c_2 r^2 + \ldots + c_n r^n$. Тогда φ — решение системы (9.6), удовлетворяющее условию $\varphi(t_0) = 0$. Но решением этой же задачи Коши является функция, тождественно равная нулю на (a,b). Следовательно, по теореме 9.1.2 будет $\varphi \equiv 0$ на (a,b). Значит, вектор-функции $(r^k)_{k=1}^n$ линейно зависимы.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Линейная зависимость вектор-функций $(r^k)_{k=1}^n$ означает линейную зависимость столбцов матрицы $(r^1(t), r^2(t), \ldots, r^n(t))$ при любом $t \in (a,b)$. Тогда её определитель, то есть вронскиан $W(t)$, тождественно равен нулю. $\square$

Теорема 9.2.2 (критерий линейной независимости решений ЛОС). *Пусть $(r^k)_{k=1}^n$ — решения системы (9.6), W — вронскиан данного набора. Тогда*

- *набор $(r^k)_{k=1}^n$ линейно зависим, если и только если $W(t_0) = 0$ для некоторого $t_0 \in (a,b)$;*
- *набор $(r^k)_{k=1}^n$ линейно независим, если и только если $W(t_0) \neq 0$ для некоторого $t_0 \in (a,b)$.*

Доказательство. Теорема следует из леммы 9.2.1. □

Теорема 9.2.3 (формула Остроградского–Лиувилля для решений ЛОС). *Пусть $t, t_0 \in (a,b)$, $P \in \mathrm{Mat}_n(C(a,b))$, r^1, r^2, ..., r^n — решения системы (9.6). Тогда их вронскиан равен*

$$W(t) = W(t_0) \exp \int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} P(\tau)\, d\tau.$$

Доказательство. Пусть r — матрица со столбцами r^1, r^2, ..., r^n, а r_k — её k-я строка. Используя формулу полного разложения определителя, нетрудно убедиться, что

$$W' = (\det r)' = \det \begin{bmatrix} r_1' \\ r_2 \\ \dots \\ r_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2' \\ \dots \\ r_n \end{bmatrix} + \ldots + \det \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \dots \\ r_n' \end{bmatrix}.$$

Так как

$$r' = [r^{1\prime}, r^{2\prime}, \ldots, r^{n\prime}] = [Pr^1, Pr^2, \ldots, Pr^n] = Pr,$$

то k-я строка матрицы r' совпадает с k-й строкой матрицы Pr, то есть

$$r_k' = P_k r = \sum_{j=1}^{n} P_k^j r_j.$$

Подставляя выражения для r_k' при $k \in [1:n]$ в формулу для W' и пользуясь тем, что определитель — линейная функция своих строк, находим

$$W' = P_1^1 \det \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \dots \\ r_n \end{bmatrix} + P_2^2 \det \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \dots \\ r_n \end{bmatrix} + \ldots + P_n^n \det \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \dots \\ r_n \end{bmatrix} = W \operatorname{tr} P.$$

Решая полученное дифференциальное уравнение, приходим к требуемой формуле. □

Замечание. Если r^1, r^2, $\dots r^n$ — не решения линейной однородной системы, а произвольные линейно зависимые вектор-функции, то их вронскиан $W \equiv 0$, однако, обратное утверждение неверно. Например, вронскиан вектор-функций

$$r^1(t) = \begin{bmatrix} |t|t \\ |t| \end{bmatrix}, \quad r^2(t) = \begin{bmatrix} t^2 \\ t \end{bmatrix}$$

равен нулю на всём отрезке $[-1, 1]$. Но r^1 и r^2 линейно независимы на $[-1, 1]$, поскольку $r^1(t) = \operatorname{sgn} t \cdot r^2(t)$.

Теорема 9.2.4 (общее решение ЛОС). *Пусть $P \in \mathrm{Mat}_n(C(a, b))$. Тогда множество решений системы $r' = P(t)r$ образует n-мерное линейное пространство.*

Доказательство. Пусть $t_0 \in (a, b)$, $(a^k)_{k=1}^n$ — базис в $\mathbb{C}^n$. По теореме 9.1.2 для любого $k \in [1 : n]$ существует r^k — решение задачи Коши $r' = P(t)r$, $r(t_0) = a^k$. Вронскиан этих решений $W(t_0) = \det(a^1, a^2, \dots, a^n) \neq 0$. Тогда по теореме 9.2.2 функции $(r^k)_{k=1}^n$ линейно независимы.

Рассмотрим произвольное решение r системы $r' = P(t)r$. Пусть $(c_k)_{k=1}^n$ — координаты вектора $r(t_0)$ в базисе $(a^k)_{k=1}^n$. Положим

$$\varphi = c_1 r^1 + c_2 r^2 + \dots + c_n r^n.$$

Ясно, что φ — решение системы $r' = P(t)r$, при этом $\varphi(t_0) = r(t_0)$. Тогда $r \equiv \varphi$ в силу теоремы 9.1.2.

Таким образом, функции $(r^k)_{k=1}^n$ линейно независимы, и любое решение есть их линейная комбинация. Значит, $(r^k)_{k=1}^n$ — базис в пространстве решений. □

Определение. ***Фундаментальной системой решений*** системы уравнений (9.6) называется совокупность её n линейно независимых решений.

Определение. ***Фундаментальная матрица системы*** (9.6) — матрица, столбцы которой образуют фундаментальную систему решений.

Пример 9.2.5. Система уравнений

$$x' = x, \quad y' = 2y$$

имеет общее решение $x = C_1 e^t$, $y = C_2 e^{2t}$. Тогда в качестве фундаментальной системы решений можно выбрать вектор-функции

$$\varphi_1(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \varphi_2(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Соответствующая фундаментальная матрица

$$\Phi = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}. \qquad \triangle$$

Лемма 9.2.6 (о множестве фундаментальных матриц). *Пусть* Φ — *фундаментальная матрица системы (9.6). Тогда* $\{\Phi M \mid M \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}), \det M \neq 0\}$ — *множество всех фундаментальных матриц этой системы.*

Доказательство. Пусть Ψ — фундаментальная матрица системы (9.6). Тогда каждый её столбец, будучи решением этой системы, является линейной комбинацией столбцов матрицы Φ. Записывая коэффициенты разложения в столбцы матрицы M, имеем $\Psi = \Phi M$. А так как $\det \Psi \neq 0$ и $\det \Phi \neq 0$, то и $\det M \neq 0$.

Обратно, пусть $M \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ — произвольная невырожденная матрица. Тогда матрица ΦM состоит из решений, а её определитель не обращается в ноль. Следовательно, по теореме 9.2.2 эти решения линейно независимы, поэтому ΦM — фундаментальная матрица. □

Лемма 9.2.7 (об овеществлении). *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $\Phi = (r^1, r^2, r^3 \dots, r^n)$ — *фундаментальная матрица системы (9.6), при этом* $r^1 = \overline{r}^2$. *Тогда*

$$\Psi = (\operatorname{Re} r^1, \operatorname{Im} r^1, r^3, \dots, r^n)$$

— *фундаментальная матрица той же системы.*

Доказательство. Так как

$$\operatorname{Re} r^1 = \frac{1}{2}(r^1 + \overline{r}^1) = \frac{1}{2}r^1 + \frac{1}{2}r^2,$$
$$\operatorname{Im} r^1 = \frac{1}{2i}(r^1 - \overline{r}^1) = \frac{1}{2i}r^1 - \frac{1}{2i}r^2,$$

то

$$\Psi = \Phi \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} & \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2i} & 0 \\ & 0 & E_{n-2} \end{bmatrix},$$

где E_{n-2} — единичная матрица порядка $n-2$. По лемме 9.2.6 матрица Ψ является фундаментальной. □

Пример 9.2.8. Рассмотрим систему

$$x' = y, \quad y' = -x.$$

В качестве её фундаментальной матрицы можно взять

$$\Phi = \begin{bmatrix} e^{it} & e^{-it} \\ ie^{it} & -ie^{-it} \end{bmatrix}$$

Столбцы матрицы Φ комплексно-сопряжены. По лемме 9.2.7 матрица

$$\Psi = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix},$$

столбцы которой суть вещественная и мнимая части первого столбца матрицы Φ, также является фундаментальной. △

Лекция 10

§10.1. Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами

Определение. ***Линейной системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами*** называют линейную систему вида

$$r' = Ar + q(t), \tag{10.1}$$

где $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$, $q \in C((a,b) \to \mathbb{C}^n)$.

Лемма 10.1.1. *Пусть $n, k \in \mathbb{N}$, $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$, $h^1, h^2, \ldots, h^k$ — жорданова цепочка, соответствующая $\lambda \in \operatorname{spec} A$. Тогда функции*

$$\begin{aligned}
&\varphi^1(t) = e^{\lambda t} h^1, \\
&\varphi^2(t) = e^{\lambda t}\left(\frac{t}{1!}h^1 + h^2\right), \\
&\ldots \\
&\varphi^k(t) = e^{\lambda t}\left(\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}h^1 + \ldots + \frac{t}{1!}h^{k-1} + h^k\right)
\end{aligned}$$

являются решениями системы $r' = Ar$.

Доказательство. Принимая во внимание определение жордановой цепочки, при $j \in [1:k]$ имеем

$$A\varphi^j = e^{\lambda t}\sum_{m=1}^{j}\frac{t^{j-m}}{(j-m)!}Ah^m = e^{\lambda t}\left(\frac{t^{j-1}}{(j-1)!}\lambda h^1 + \sum_{m=2}^{j}\frac{t^{j-m}}{(j-m)!}(\lambda h^m + h^{m-1})\right) =$$
$$= e^{\lambda t}\left(\lambda\sum_{m=1}^{j}\frac{t^{j-m}}{(j-m)!}h^m + \sum_{m=2}^{j}\frac{t^{j-m}}{(j-m)!}h^{m-1}\right).$$

Это же выражение получается при дифференцировании вектор-функции φ^j. Значит, $(\varphi^j)' = A\varphi^j$, что и требовалось. $\square$

Теорема 10.1.2 (ФСР ЛОС с постоянными коэффициентами). *Пусть $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$, базис пространства $\mathbb{C}^n$ состоит из жордановых цепочек*

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 \sim h^1, h^2, \ldots, h^k, \\
&\ldots \\
&\lambda_d \sim u^1, u^2, \ldots, u^m,
\end{aligned}$$

соответствующих $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \operatorname{spec} A$*. Тогда вектор-функции*

$$\varphi^1(t) = e^{\lambda_1 t}h^1, \quad \ldots, \quad \varphi^k(t) = e^{\lambda_1 t}\left(\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}h^1 + \ldots + \frac{t}{1!}h^{k-1} + h^k\right),$$

...

$$\psi^1(t) = e^{\lambda_d t}u^1, \quad \ldots, \quad \psi^m(t) = e^{\lambda_d t}\left(\frac{t^{m-1}}{(l-1)!}u^1 + \ldots + \frac{t}{1!}u^{m-1} + u^m\right)$$

образуют фундаментальную систему решений системы $r' = Ar$*.*

Доказательство. По лемме 10.1.1 каждая из вектор-функций

$$\varphi^1 \ldots, \varphi^k, \ldots, \psi^1 \ldots, \psi^m$$

является решением. Их вронскиан

$$W(0) = \det[h^1, \ldots, h^k, \ldots, u^1, \ldots, u^m] \neq 0.$$

Тогда по теореме 9.2.2 вектор-функции $\{\varphi^1, \ldots, \varphi^k, \ldots, \psi^1, \ldots, \psi^m\}$ линейно независимы, а значит, образуют фундаментальную систему решений. □

Пример 10.1.3 (случай собственного базиса). Найдём общее решение системы

$$\begin{cases} x' = y + z, \\ y' = x - z, \\ z' = x - y. \end{cases}$$

Матрица системы

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Её собственные числа: -2 (кратности 1) и 1 (кратности 2). Соответствующие им собственные векторы: $[-1, 1, 1]^T$, $[1, 1, 0]^T$, $[1, 0, 1]^T$. Тогда общее решение

$$r(t) = C_1 e^{-2t}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_3 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \qquad \triangle$$

Следствие 10.1.4. *Пусть* $\lambda \in \operatorname{spec} A$ *имеет алгебраическую кратность* m_a *и геометрическую кратность* m_g*. Тогда система* $r' = Ar$ *имеет* m_a *линейно независимых решений вида*

$$\varphi(t) = e^{\lambda t} Q^{m_a - m_g}(t), \tag{10.2}$$

где Q^s *— вектор-многочлен степени не выше* s*.*

Доказательство. По теореме 10.1.2 числу λ соответствуют m_g групп решений размеров k_1, k_2, $\ldots$, k_{m_g}, причём $k_1 + k_2 + \ldots + k_{m_g} = m_a$. Все эти решения линейно независимы и имеют вид экспоненты, умноженной на некоторый вектор-многочлен. При этом в j-й группе степень многочленов, умножаемых на $e^{\lambda t}$, не превосходит $k_j - 1$.

Не умаляя общности, считаем $k_1 = \max\limits_{j \in [1:m_g]} k_j$. Тогда степень многочленов не превосходит $k_1 - 1$. Так как

$$m_a = k_1 + \ldots + k_{m_g} \geqslant k_1 + (m_g - 1),$$

то $k_1 - 1 \leqslant m_a - m_g$, что и требовалось. $\square$

На этом следствии основан *метод Эйлера* построения общего решения линейного однородного уравнения. Каждому собственному числу сопоставляется вектор-функция (10.2) с неопределёнными коэффициентами. Они определяются подстановкой функции φ в систему уравнений. Среди коэффициентов всегда будет m независимых, где m — алгебраическая кратность собственного числа.

Если алгебраическая и геометрическая кратности совпадают, то метод Эйлера фактически сводится к поиску собственных векторов. Продемонстрируем данный метод на примере.

Пример 10.1.5. Решим систему

$$\begin{cases} x' = 2x + y + z, \\ y' = -z - 2x, \\ z' = y + 2x + 2z. \end{cases}$$

Матрица коэффициентов

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

имеет собственные числа $\lambda_1 = 2$, $\lambda_{2,3} = 1$.

Так как алгебраическая и геометрическая кратности числа λ_1 совпадают и равны 1, то найдём собственный вектор, отвечающий λ_1: $h^1 = [1, -2, 2]^T$. Тогда соответствующие решения

$$\varphi^1(t) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} e^{2t}.$$

Геометрическая кратность числа $\lambda_{2,3}$ равна

$$m_g = n - \operatorname{rank}(A - \lambda_{2,3} E) = 3 - 2 = 1.$$

Алгебраическая кратность $m_a = 2$. Поэтому многочлены в формуле (10.2) имеют степень не выше $m_a - m_g = 2 - 1 = 1$. Следовательно, решения, отвечающие $\lambda_{2,3}$, ищем в виде

$$\varphi^{2,3}(t) = e^t(at + b),$$

где $a = [a_1, a_2, a_3]^T$, $b = [b_1, b_2, b_3]^T$. Подставляя $\varphi^{2,3}$ в систему, находим

$$e^t(at + b) + e^t a = e^t(tAa + Ab) \iff at + (a + b) = tAa + Ab.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, получаем систему

$$\begin{cases} Aa = a, \\ Ab = a + b. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим $a_1 = 0$, $a_2 = -C_2$, $a_3 = C_2$.

Подставляя во второе уравнение системы, получаем $b_1 = C_2$, $b_2 = -C_2 - C_3$, $b_3 = C_3$. Здесь C_2 и C_3 — произвольные параметры.

Тогда числу $\lambda_{2,3}$ соответствуют решения вида

$$\varphi^{2,3}(t) = e^t \big(t \begin{bmatrix} 0 \\ -C_2 \\ C_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_2 \\ -C_2 - C_3 \\ C_3 \end{bmatrix} \big) = C_2 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ -t - 1 \\ t \end{bmatrix} + C_3 e^t \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Общее решение исходной системы — сумма φ^1 и $\varphi^{2,3}$:

$$r(t) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -t - 1 \\ t \end{bmatrix} e^t + C_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t. \qquad \triangle$$

Лекция 11

§11.1. Линейные неоднородные системы

Установим, что общее решение линейной неоднородной системы есть сумма общего решения соответствующей однородной и некоторого частного решения исходной неоднородной системы.

Теорема 11.1.1 (общее решение ЛС). *Пусть $P \in \mathrm{Mat}_n(C(a,b))$, $q \in C((a,b) \to \mathbb{C}^n)$, φ — решение системы*

$$r' = P(t)r + q(t), \tag{11.1}$$

Φ — фундаментальная матрица системы

$$r' = P(t)r.$$

Тогда общее решение неоднородной системы (11.1) имеет вид

$$r = \Phi C + \varphi, \quad C \in \mathbb{C}^n.$$

Доказательство. Пусть r — произвольное решение (11.1). Тогда

$$r' = Pr + q.$$

Функция φ удовлетворяет такому же соотношению:

$$\varphi' = P\varphi + q.$$

Вычитая эти равенства, находим

$$(r - \varphi)' = P(r - \varphi).$$

Значит, найдётся вектор-столбец $C \in \mathbb{R}^n$, такой что

$$r - \varphi = \Phi C.$$

Верно и обратное: любая функция вида $\Phi C + \varphi$ является решением (11.1), что проверяется непосредственной подстановкой. □

Упражнение 2 (принцип суперпозиции). Докажите, что если φ_1 — решение системы $r' = P(t)r + q_1(t)$, φ_2 — решение системы $r' = P(t)r + q_2(t)$, то $\varphi_1 + \varphi_2$ — решение системы $r' = P(t)r + q_1(t) + q_2(t)$.

Если известна фундаментальная матрица однородной системы, то общее решение неоднородной системы может быть найдено методом вариации постоянных.

Теорема 11.1.2 (метод вариации постоянных для ЛС). *Пусть Φ — фундаментальная матрица системы $r' = P(t)r$, $P \in \mathrm{Mat}_n(C(a,b))$, $q \in C((a,b) \to \mathbb{C}^n)$. Тогда общее решение системы (11.1) имеет вид $r = \Phi C$, где вектор-функция C удовлетворяет системе*

$$\Phi C' = q.$$

Доказательство. Опираясь на формулу для обратной матрицы, использующей алгебраические дополнения, заключаем, что $\Phi^{-1} \in \mathrm{Mat}_n(C(a,b))$. Поэтому

$$C(t) = \int \Phi^{-1} q + A,$$

где A — вектор произвольных постоянных. Тогда требуется доказать, что общее решение системы (11.1) имеет вид

$$r = \Phi A + \Phi \int \Phi^{-1} q.$$

По теореме 11.1.1 достаточно показать, что второе слагаемое в правой части — частное решение системы (11.1). Убедимся в этом подстановкой:

$$\Phi' \int \Phi^{-1} q + \Phi\Phi^{-1} q = P(t)\Phi \int \Phi^{-1} q + q.$$

Это верное тождество, поскольку $P(t)\Phi = \Phi'$. $\square$

Пример 11.1.3. Найдём общее решение системы

$$x' = y, \quad y' = -x + \frac{1}{\sin t}.$$

Матрица

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

является фундаментальной для однородной системы

$$x' = y, \quad y' = -x.$$

Общее решение ищем в виде $r = \Phi(t)C(t)$, где C удовлетворяет системе

$$\Phi C' = q.$$

Отсюда

$$C' = \Phi^{-1} q = \begin{pmatrix} -1 \\ \operatorname{tg} t \end{pmatrix}.$$

Интегрируя, получаем

$$C_1(t) = -t + A_1, \quad C_2(t) = \ln \sin t + A_2.$$

Поэтому общее решение исходной системы

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(t)C(t) = A_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + A_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin t \cdot \ln \sin t - t\cos t \\ \cos t \cdot \ln \sin t + t \sin t \end{pmatrix}. \quad \triangle$$

§11.2. Линейные уравнения

Определение. ***Линейным дифференциальным уравнением*** порядка n называется уравнение вида

$$y^{(n)} + p_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \ldots + p_1(t)y' + p_0(t)y = q(t), \tag{11.2}$$

где $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}, q \in C(a,b)$.

Определение. Если $q \equiv 0$ на (a,b), то уравнение (11.2), то есть

$$y^{(n)} + p_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \ldots + p_1(t)y' + p_0(t)y = 0, \tag{11.3}$$

называется ***однородным***, в противном случае — ***неоднородным***.

Лемма 11.2.1 (о равносильной ЛС). *Отображение* $\Lambda_n\varphi = [\varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(n-1)}]^T$ — *биекция между решениями уравнения (11.2) и решениями системы*

$$r' = P(t)r + Q(t), \tag{11.4}$$

где

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -p_0 & -p_1 & -p_2 & \ldots & -p_{n-1} \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ q \end{bmatrix}.$$

Доказательство. В силу леммы 5.3.2. □

Теорема 11.2.2 (существование и единственность максимального решения ЛУ). *Пусть* $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}, q \in C(a,b)$, $t_0 \in (a,b)$, $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)} \in \mathbb{C}$. *Тогда максимальное решение задачи Коши*

$$\begin{cases} y^{(n)} + p_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \ldots + p_0(t)y = q(t), \\ y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases} \tag{11.5}$$

существует, единственно и определено на интервале (a,b).

Доказательство. По теореме 9.1.2 задача Коши для системы (11.4) с начальными условиями $r(t_0) = [y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}]^T$ имеет единственное максимальное решение $\psi = [\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}]^T$, определённое на (a,b). По лемме 11.2.1 функция φ — решение исходной задачи Коши (11.5) на (a,b).

Не существует другого решения задачи (11.5) (в том числе и определённого на большем интервале), так как иначе по той же лемме 11.2.1 нашлось бы ещё одно решение задачи Коши для системы (11.4), что противоречит теореме 9.1.2. □

Замечание. В дальнейшем под решением линейного уравнения понимается максимальное решение.

Теорема 11.2.3 (об изоморфизме). *Пусть $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1} \in C(a, b)$. Тогда множество решений однородного уравнения (11.3) является линейным пространством, изоморфным пространству решений системы*

$$r' = P(t)r, \tag{11.6}$$

где матрица P та же, что и в (11.4). При этом изоморфизм устанавливается отображением Λ_n.

Доказательство. Любое решение уравнения (11.3) является элементом линейного пространства $C(a, b)$. Кроме того, сумма двух решений, а также решение, умноженное на произвольное число, также являются решениями. Поэтому множество всех решений само образует линейное пространство.

По лемме 11.2.1 отображение Λ_n устанавливает биекцию между решениями уравнения и равносильной системы. Отображение Λ_n линейно. Таким образом, Λ_n — изоморфизм. □

Следствие 11.2.4. *Пусть $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1} \in C(a, b)$. Тогда множество решений уравнения (11.3) образует n-мерное линейное пространство.*

Доказательство. По теореме 11.2.3 пространства решений уравнения (11.3) и системы (11.6) изоморфны, значит, они имеют одинаковую размерность. □

Определение. ***Фундаментальной системой решений*** однородного уравнения (11.3) называется совокупность из n его линейно независимых решений.

Определение. ***Определителем Вронского*** (или ***вронскианом***) функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$ называют

$$w(y_1, \ldots, y_n; t) := W(\Lambda_n y_1, \ldots, \Lambda_n y_n; t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \ldots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \ldots & y_n'(t) \\ \ldots & & & \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix},$$

где W — вронскиан вектор-функций.

Лемма 11.2.5 (свойства вронскиана решений ЛОУ). *Пусть $(y_k)_{k=1}^n$ — решения уравнения (11.3). Тогда следующие утверждения равносильны:*

(i) $w \equiv 0$ *на* (a, b);

(ii) $w(t_0) = 0$ *в некоторой точке* $t_0 \in (a, b)$;

(iii) $(y_k)_{k=1}^n$ *линейно зависимы на* (a, b).

Доказательство. Так как вронскиан функций $(y_k)_{k=1}^n$ совпадает с вронскианом вектор-функций $(\Lambda_n y_k)_{k=1}^n$, то для доказательства достаточно принять во внимание теорему 9.2.2. □

Теорема 11.2.6 (критерий линейной независимости решений ЛОУ). *Пусть $(y_k)_{k=1}^n$ — решения уравнения (11.3), w — вронскиан этого набора. Тогда*

- *набор* $(y_k)_{k=1}^n$ *линейно зависим, если и только если* $w(t_0) = 0$ *для некоторого* $t_0 \in (a, b)$;
- *набор* $(y_k)_{k=1}^n$ *линейно независим, если и только если* $w(t_0) \neq 0$ *для некоторого* $t_0 \in (a, b)$.

Доказательство. Следует из леммы 11.2.5 □

Теорема 11.2.7 (формула Остроградского–Лиувилля для решений ЛОУ). *Пусть* $t, t_0 \in (a, b)$, $p_0, p_1, \dots, p_{n-1} \in C(a, b)$, $(y_k)_{k=1}^n$ *— решения линейного однородного уравнения (11.3). Тогда вронскиан этих решений*

$$w(t) = w(t_0) \exp \int_{t_0}^{t} (-p_{n-1}(\tau))\, d\tau.$$

Доказательство. Принимая во внимание теорему 9.2.3 и лемму 11.2.1, находим

$$\begin{aligned} w(y_1, \dots, y_n) &= W(\Lambda y_1, \dots, \Lambda y_n) \\ &= W(t_0) \exp \int\limits_{t_0}^{t} \operatorname{tr} P(\tau)\, d\tau = w(t_0) \exp \int\limits_{t_0}^{t} (-p_{n-1}(\tau))\, d\tau. \end{aligned}$$ □

Теорема 11.2.8 (общее решение ЛУ). *Пусть* $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}, q \in C(a, b)$, ψ *— решение уравнения (11.2),* $(\varphi_k)_{k=1}^n$ *— фундаментальная система решений уравнения (11.3). Тогда общее решение уравнения (11.2) имеет вид*

$$y = \sum_{k=1}^{n} C_k \varphi_k + \psi,$$

где $(C_k)_{k=1}^n$ *— произвольные постоянные.*

Доказательство. По теореме 11.2.3 вектор-функции $(\Lambda\varphi_k)_{k=1}^n$ образуют базис в пространстве решений однородной системы (11.6). В силу леммы 11.2.1 вектор-функция $\Lambda\psi$ — решение неоднородной системы (11.4). По теореме 11.1.1

$$r = \sum_{k=1}^{n} C_k \Lambda\varphi_k + \Lambda\psi$$

— общее решение системы (11.4). По лемме 11.2.1 первая компонента правой части даёт формулу общего решения уравнения (11.2). □

Для нахождения общего решения неоднородного уравнения может быть использован метод вариации постоянных.

Теорема 11.2.9 (метод вариации постоянных для ЛУ). *Пусть* $(\varphi_k)_{k=1}^n$ *— фундаментальная система решений однородного уравнения (11.3). Тогда общее решение уравнения (11.2) имеет вид* $y = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k\varphi_k$, *где функции* $(C_k)_{k=1}^n$ *пробегают все решения системы*

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \dots & \varphi_n' \\ \dots & & & \\ \varphi_1^{(n-2)} & \varphi_2^{(n-2)} & \dots & \varphi_n^{(n-2)} \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \dots & \varphi_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1' \\ C_2' \\ \dots \\ C_{n-1}' \\ C_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ q \end{bmatrix}.$$

Доказательство. По теореме 11.1.2 общее решение системы, равносильной уравнению (11.2), имеет вид

$$r = \sum_{k=1}^{n} C_k \Lambda\varphi_k,$$

где функции $C_1, \dots, C_n$ удовлетворяют системе

$$(\Lambda\varphi_1, \dots, \Lambda\varphi_n) \begin{bmatrix} C_1' \\ \dots \\ C_{n-1}' \\ C_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ q \end{bmatrix}.$$

По лемме 11.2.1 первая строка вектора r — общее решение уравнения (11.2). $\square$

Упражнение 3. (*принцип суперпозиции*) Докажите, что если y_1 — решение уравнения (11.2) с правой частью $f = f_1$, а y_2 — решение того же уравнения с правой частью $f = f_2$, то $y_1 + y_2$ — решение того же уравнения с правой частью $f = f_1 + f_2$.

Лекция 12

§12.1. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

Определение. Линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами называют уравнение вида

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(t), \tag{12.1}$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$, $f \in C(a, b)$.

Положим $a_n = 1$,

$$L = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k}{dt^k}.$$

При помощи оператора L уравнение (12.1) записывается в виде

$$Ly = f(t).$$

12.1.1. Однородное уравнение

Рассмотрим линейное однородное уравнение

$$Ly = 0. \tag{12.2}$$

Применяя оператор L к функции $e^{\lambda t}$, находим

$$L(e^{\lambda t}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k}{dt^k} e^{\lambda t} = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k \right) e^{\lambda t}.$$

Определение. Многочлен

$$p(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

называется ***характеристическим многочленом*** уравнения (12.1), а его корни — ***характеристическими числами*** уравнения (12.1).

Если λ — корень характеристического многочлена, то получаем $L(e^{\lambda t}) \equiv 0$. Верно и обратное: если $e^{\lambda t}$ — решение однородного уравнения (12.2), то λ — корень многочлена p. Докажем более общее утверждение.

Лемма 12.1.1. *Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ — корень кратности $m \in \mathbb{N}$ характеристического многочлена уравнения (12.2). Тогда функции*

$$e^{\lambda t},\ te^{\lambda t},\ \ldots,\ t^{m-1}e^{\lambda t}$$

являются решениями (12.2).

Доказательство. Убедимся подстановкой в уравнение (12.2), что указанные функции являются решениями.

Пусть $k \in [0 : m-1]$. Считая λ переменной, в силу бесконечной дифференцируемости функции $e^{\lambda t}$ при любом $j \in \mathbb{Z}_+$ будет

$$\frac{\partial^j}{\partial t^j}\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k}e^{\lambda t} = \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k}\frac{\partial^j}{\partial t^j}e^{\lambda t}.$$

Тогда

$$L\left(t^k e^{\lambda t}\right) = L\left(\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k}e^{\lambda t}\right) = \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k}L\left(e^{\lambda t}\right).$$

Применяя формулу Лейбница, имеем

$$\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k}L\left(e^{\lambda t}\right) = \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k}\left(p(\lambda)e^{\lambda t}\right) = \sum_{j=0}^{k} C_k^j p^{(j)}(\lambda)\frac{\partial^{k-j}}{\partial \lambda^{k-j}}e^{\lambda t}.$$

Подставляя вместо λ корень кратности m многочлена p, получаем ноль, поскольку при $j \in [0 : k]$ обнуляются значения $p^{(j)}(\lambda)$. □

Лемма 12.1.2 (линейная независимость квазиодночленов). *Пусть* $k_j \in \mathbb{Z}_+$, $\lambda_j \in \mathbb{C}$ *при* $j \in [1 : n]$, $((k_j, \lambda_j))_{j=1}^n$ *— различные пары чисел. Тогда функции* $(t^{k_j}e^{\lambda_j t})_{j=1}^n$ *линейно независимы на любом промежутке из* $\mathbb{R}$.

Доказательство. Разобьём множество пар (k_1, λ_1), …, (k_n, λ_n) на группы с одинаковым вторым элементом. Если такая группа одна, то линейная независимость указанных функций следует из линейной независимости одночленов.

Допустим, что линейная независимость доказана, если количество групп равно m. Предположим, что в случае $m+1$ группы некоторая нетривиальная линейная комбинация этих функций тождественно равна нулю. Объединяя слагаемые с одинаковыми экспонентами и изменяя нумерацию чисел λ_i, имеем

$$p_1(t)e^{\lambda_1 t} + p_2(t)e^{\lambda_2 t} + \ldots + p_{m+1}(t)e^{\lambda_{m+1} t} \equiv 0,$$

где p_i — многочлены, а числа λ_i различны. Деля обе части на $e^{\lambda_{m+1} t}$, получаем

$$p_1(t)e^{(\lambda_1-\lambda_{m+1})t} + p_2(t)e^{(\lambda_2-\lambda_{m+1})t} + \ldots + p_m(t)e^{(\lambda_m-\lambda_{m+1})t} + p_{m+1}(t) \equiv 0.$$

Дифференцируя это тождество $\deg p_{m+1} + 1$ раз, находим

$$q_1(t)e^{(\lambda_1-\lambda_{m+1})t} + q_2(t)e^{(\lambda_2-\lambda_{m+1})t} + \ldots + q_m(t)e^{(\lambda_m-\lambda_{m+1})t} \equiv 0, \tag{12.3}$$

где при всех $i \in [1 : m]$ многочлен q_i имеет ту же степень, что и p_i.

Значит, если для некоторого i будет $p_i \not\equiv 0$, то и $q_i \not\equiv 0$. Следовательно, в левой части тождества (12.3) находится нетривиальная линейная комбинация квазиодночленов. Это противоречит индукционному предположению. □

Теорема 12.1.3 (общее решение ЛОУ с постоянными коэффициентами). *Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{C}$ — характеристические числа уравнения (12.2) кратностей $m_1, m_2, \ldots, m_s \in \mathbb{N}$. Тогда функции*

$$\begin{aligned} &e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \ldots, t^{m_1-1}e^{\lambda_1 t}, \\ &\ldots \\ &e^{\lambda_s t}, te^{\lambda_s t}, \ldots, t^{m_s-1}e^{\lambda_s t} \end{aligned} \tag{12.4}$$

образуют фундаментальную систему решений уравнения (12.2).

Доказательство. По лемме 12.1.1 указанные функции являются решениями (12.2), а по лемме 12.1.2 они линейно независимы. Так как сумма всех кратностей равна порядку уравнения, то эти функции образуют фундаментальную систему решений. □

Замечание. Пусть $\{y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n\}$ — фундаментальная система решений уравнения (12.2), и $y_1 = \overline{y}_2$. Тогда, опираясь на теорему 11.2.3 и лемму об овеществлении 9.2.7, получаем, что $\{\operatorname{Re} y_1, \operatorname{Im} y_1, y_3, \ldots, y_n\}$ — фундаментальная система того же уравнения.

Если коэффициенты уравнения (12.2) вещественны, то функции из набора (12.4), соответствующие комплексным корням, разбиваются на комплексно-сопряжённые пары. Заменяя каждую пару функций

$$t^k e^{(a+ib)t}, \quad t^k e^{(a-ib)t}$$

на пару

$$t^k e^{at}\cos bt, \quad t^k e^{at}\sin bt,$$

получаем вещественный базис в пространстве решений.

12.1.2. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами

Для поиска частного решения неоднородного уравнения (12.1) в случае, когда правая часть является квазимногочленом, можно воспользоваться методом неопределённых коэффициентов. Чтобы обосновать его, докажем предварительно формулу, которая позволяет упростить вычисление производной квазимногочлена. В дальнейшем $D := \frac{d}{dt}$.

Лемма 12.1.4 (формула сдвига). *Пусть p — многочлен степени n, функция f дифференцируема n раз, $\gamma \in \mathbb{C}$. Тогда*

$$p(D)(f(t)e^{\gamma t}) = e^{\gamma t}p(D+\gamma)f(t).$$

Доказательство. Сначала докажем формулу для одночленов $p(\lambda) = \lambda^k$. При $k = 0$ формула очевидна. Допустим она доказана при некотором $k \in \mathbb{Z}_+$. Тогда

$$D^{k+1}(fe^{\gamma t}) = D^k(Df \cdot e^{\gamma t} + f\gamma e^{\gamma t}) = D^k(e^{\gamma t}(D+\gamma)f)$$

$$= e^{\gamma t}(D+\gamma)^k(D+\gamma)f = e^{\gamma t}(D+\gamma)^{k+1}f.$$

Тогда для многочлена общего вида получаем

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k D^k\right)(fe^{\gamma t}) = \sum_{k=0}^{n} a_k e^{\gamma t}(D+\gamma)^k f = e^{\gamma t}p(D+\gamma)f. \qquad \square$$

Теорема 12.1.5 (метод неопределённых коэффициентов для ЛУ). *Пусть правая часть уравнения (12.1) — квазимногочлен*

$$f(t) = p_k(t)e^{\gamma t},$$

где $\gamma \in \mathbb{C}$, p_k — многочлен степени k. Тогда уравнение (12.1) имеет единственное частное решение вида

$$\varphi(t) = t^m q_k(t)e^{\gamma t},$$

где q_k — многочлен степени k, при этом

- *если γ не характеристическое число, то $m = 0$;*
- *если γ — характеристическое число, то m — его кратность.*

Доказательство. Пусть q — некоторый многочлен. Подставим $y = q(t)e^{\gamma t}$ в уравнение (12.1), для которого p — характеристический многочлен. По лемме 12.1.4 имеем

$$e^{\gamma t}p(D+\gamma)q = p_k e^{\gamma t} \iff p(D+\gamma)q = p_k. \tag{12.5}$$

Оператор $p(D+\gamma)$ отображает множество многочленов степени n в себя. Если $(\lambda_i)_{i=1}^n$ — корни многочлена p, то $p(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)\cdot\ldots\cdot(\lambda-\lambda_n)$, значит,

$$p(D+\gamma) = \prod_{i=1}^{n}(D+\gamma-\lambda_i).$$

Отсюда видно, что если γ — не характеристическое число, то многочлен $p(D+\gamma)$ имеет ненулевой свободный член, поэтому $\deg p(D+\gamma)q = \deg q$. Следовательно, ядро оператора $p(D+\gamma)$ содержит лишь ноль. Поэтому $p(D+\gamma)$ — автоморфизм пространства многочленов степени n, а тогда существует и при том единственный многочлен q, для которого верно соотношение (12.5).

Если γ — характеристическое число кратности m, то

$$p(D+\gamma) = \widetilde{p}(D+\gamma)D^m,$$

при этом $\widetilde{p}(\gamma) \neq 0$. Тогда, рассуждая аналогично, заключаем, что $\widetilde{p}(D+\gamma)$ — автоморфизм пространства многочленов степени не выше $n-m$. Поэтому (12.5) равносильно

$$D^m q = (\widetilde{p}(D+\gamma))^{-1}p_k.$$

Интегрируя многочлен в правой части m раз, найдём q. Выбирая каждый раз при интегрировании константы равными нулю, получим единственный многочлен вида $t^m q_k(t)$, для которого верно (12.5). $\square$

Упражнение 4. (*метод комплексных амплитуд*) Пусть коэффициенты оператора L вещественны. Докажите, что если z — решение уравнения $Lz = f(t)$, то $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$ — решения уравнений $Ly = \operatorname{Re} f(t)$ и $Ly = \operatorname{Im} f(t)$ соответственно.

Лекция 13

§13.1. Численные методы решения дифференциального уравнения

Определение. Запись

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad x \in [x_0, b] \tag{13.1}$$

означает, что требуется найти решение отрезке $[x_0, b]$ уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Решая задачу численно, мы задаём решение таблично на некоторой сетке значений аргумента $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Шаг сетки также может быть задан в условии задачи либо выбран исходя из требуемой погрешности приближения.

13.1.1. Метод Эйлера

Метод Эйлера является одним из самых простых численных методов решения начальной задачи. Геометрический смысл метода таков. Пусть φ — точное решение задачи (13.3). Отправляясь от начальной точки (x_0, y_0) заменим часть интегральной кривой на отрезок касательной (см. рис. 13.1). Пройдя вдоль оси x расстояние h, равное $x_1 - x_0$, попадём в точку y_1 по оси y. Значение y_1 определим, зная тангенс угла α наклона касательной:

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \operatorname{tg} \alpha = \varphi'(x_0) = f(x_0, \varphi(x_0)) = f(x_0, y_0).$$

Отсюда $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$. Далее рассуждаем аналогично относительно точки (x_1, y_1). И так далее, пока не построим решение на всём данном отрезке.

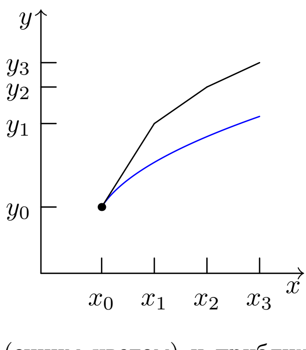

Рис. 13.1. Точное решение (синим цветом) и приближённое, построенное методом Эйлера (чёрным цветом)

Определение 13.1.1. ***Метод Эйлера*** — метод построения численного приближённого решения задачи (13.3) по формулам

$$x_{j+1} = x_j + h, \quad y_{j+1} = y_j + hf(x_j, y_j), \quad j \in [0 : n-1].$$

Пример 13.1.2. $2y' + y = e^{-x}$, $y(0) = 0.8$, $x \in [0, 1]$.

Найдём приближённое решение по методу Эйлера с шагом $h = 0.5$. Приведём уравнение к нормальной форме:

$$y' = \frac{1}{2}(e^{-x} - y),$$

то есть $f(x, y) = (e^{-x} - y)/2$. Имеем

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 0.8 + 0.5 \cdot f(0, 0.8) = 0.85,$$
$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 0.85 + 0.5 \cdot f(0.5, 0.85) \approx 0.7891.$$

Результаты вычислений сведём в таблицу

x	0	0.5	1
y	0.8	0.85	0.7891

Таким образом, мы задали приближённое решение с помощью таблицы.

Сравним полученные результаты с точными значениями. Точное решение исходной задачи: $\varphi(x) = \frac{9}{5}e^{-x/2} - e^{-x}$. Составим таблицу приближённых значений, точных значений, абсолютных и относительных погрешностей.

x	0	0.5	1
y	0.8	0.85	0.7891
$\varphi(x)$	0.8	0.7953	0.7239
$\lvert y - \varphi(x)\rvert$	0	0.0547	0.0653
$\left\lvert \frac{y-\varphi(x)}{\varphi(x)} \right\rvert$	0	0.07	0.09

Из таблицы видно, что наибольшее значение абсолютной погрешности в точках сетки равно 0.0653, а относительной погрешности — 9%. △

Ясно, что вычисления, необходимые для метода Эйлера, лучше запрограммировать, чем проводить вручную. Например, программа для системы компьютерной алгебры SageMath может быть такой. Определим функцию, возвращающую таблично заданное решение:

```
def E(f, x0, b, y0, h):
  """f -- правая часть уравнения y' = f(x,y)
  x0 -- начальная точка
  b -- конечная точка
  y0 -- начальное значение
  h -- шаг сетки"""
```

```
    P = [(x0, y0)] # список вершин ломаной Эйлера
    xj = x0
    yj = y0
    while xj + h <= b:
        yj = yj + h*f(xj, yj)
        xj += h
        P.append((xj, yj))
    return P
```

Для решения примера 13.1.2, можно исполнить следующий код:

```
def f(x, y):
    return (e^(-x) - y) / 2
x0 = 0
b = 1
y0 = 0.8
h = 0.5
P = E(f, x0, b, y0, h)
for p in P:
    print(f"{p[0]:.2f}, {p[1]:.4f}")
line(P)
```

Цикл в конце программы выведет таблицу значений решения (независимая переменная — с двумя знаками после запятой, значения функции — с четырьмя). Команда `line` изобразит соответствующую ломаную.

Чем меньше берётся шаг в методе Эйлера, тем точнее получается результат. Например, взяв шаг $h = 1/4$, получим наибольшую абсолютную погрешность, равную 0.0287. Уменьшив шаг ещё в два раза до $1/8$, получим наибольшую погрешность 0.0135. Можно заметить, что погрешность уменьшается примерно во столько же раз, во сколько раз уменьшается размер шага: $0.0653/0.0287 \approx 2.3$, $0.0287/0.0135 \approx 2.13$. Это согласуется с теорией, которая говорит, что глобальная погрешность метода Эйлера есть величина, равная $O(h)$ при $h \to 0$.

Определение. Численный метод решения дифференциального уравнения имеет ***k-й порядок точности***, если этот метод даёт значения, наибольшая абсолютная погрешность которых есть величина $O(h^k)$ при $h \to 0$.

Таким образом, метод Эйлера — это метод первого порядка точности.

13.1.2. Метод Хойна

Определение. ***Метод Хойна*** — метод построения численного приближённого решения задачи (13.3) по формулам

$$x_{j+1} = x_j + h, \quad y_{j+1} = y_j + h\frac{k_1 + k_2}{2},$$

где $j \in [0 : n - 1]$,

$$k_1 = f(x_j, y_j), \quad k_2 = f(x_j + h, y_j + k_1 h).$$

Этот метод можно интерпретировать так. Из очередной точки $A(x_j, y_j)$ проводится звено ломаной, построенной по методу Эйлера, которое оканчивается в точке $B(x_{j+1}, y_j + k_1 h)$. Далее из точки A проводится звено ломаной с «уточнённым» угловым коэффициентом, который равен среднему арифметическому угловых коэффициентов касательных к интегральным кривым в точках A и B. Новое звено оканчивается в точке $C(x_{j+1}, y_{j+1})$.

Метод Хойна имеет второй порядок точности. Он является одним из представителей методов Рунге–Кутты второго порядка, которые задаются формулами

$$y_{j+1} = y_j + h(a_1 k_1 + a_2 k_2),$$

где

$$k_1 = f(x_j, y_j), \quad k_2 = f(x_j + b_1 h, y_j + c_1 k_1 h).$$

13.1.3. Классический метод Рунге–Кутты 4-го порядка

Методы Рунге–Кутты 4-го порядка — это класс методов, каждый из которых имеет 4-й порядок точности. Мы рассмотрим только один из них.

Определение. ***Классический метод Рунге–Кутты 4-го порядка*** — метод построения численного приближённого решения задачи (13.3) по формулам

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

где $j \in [0 : n-1]$,

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_j, y_j), \\ k_2 &= f\left(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{k_1 h}{2}\right), \\ k_3 &= f\left(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{k_2 h}{2}\right), \\ k_4 &= f(x_j + h, y_j + k_3 h). \end{aligned}$$

Данный метод является одним из наиболее популярных численных методов, применяющихся на практике. Функция для построения численного решения в системе SageMath может быть, например, такой:

```
def RK4(f, x0, b, y0, h):
    P = [(x0, y0)]
    xj = x0
    yj = y0
    while xj + h <= b:
        k1 = f(xj, yj)
        k2 = f(xj + h/2, yj + 1/2 * h * k1)
        k3 = f(xj + h/2, yj + 1/2 * h * k2)
```

```
        k4 = f(xj + h, yj + h * k3)
        yj = yj + 1/6 * h * (k1 + 2 *k2 + 2*k3 + k4)
        xj += h
        P.append((xj, yj))
    return P
```

Сравнить результаты работы функций `E` и `RK4` можно, например, с помощью такой программы:

```
def f(x, y):
    return (e^(-x) - y) / 2
x0 = 0
b = 1
y0 = 0.8
h = 0.1
P1 = E(f, x0, b, y0, h)
P2 = RK4(f, x0, b, y0, h)
plot(lambda x: 9/5*e^(-1/2*x) - e^(-x), x0, b, color='black') \
+ line(P1, color='blue') \
+ line(P2, color='red')
```

Результаты работы программы приведены на рисунке 13.2. Видно, что метод Рунге–Кутты даёт существенно более точный результат, чем метод Эйлера.

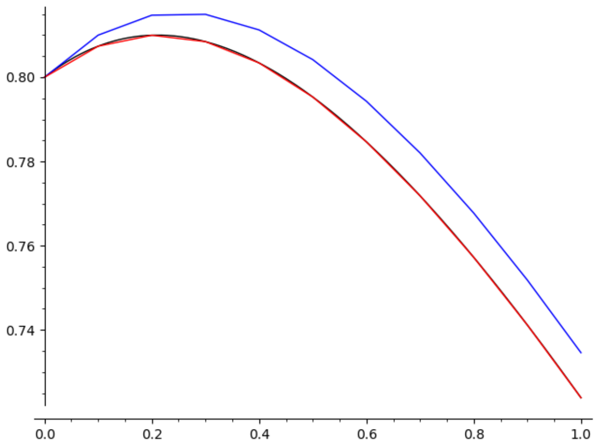

Рис. 13.2. Точное решение (чёрным цветом) и численные решения, полученные методом Эйлера (синим цветом) и классическим методом Рунге–Кутты 4-го порядка (красным цветом) с одинаковым шагом.

В системе SageMath существуют встроенные функции, реализующие данный метод (функция `desolve_rk4`, см. также класс `ode_solver`).

13.1.4. Теоремы существования и единственности

Пример 13.1.3. Решим начальную задачу

$$y' = y^2 + 1, \quad y(0) = 0, \quad x \in [0, 2] \tag{13.2}$$

численно с помощью определённой выше функции `E`, реализующей метод Эйлера. Возьмём, например, шаг $h = 0.2$. Программа выдаст такую таблицу значений:

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2
y	0	0.2	0.408	0.641	0.924	1.294	1.829	2.698	4.354	8.346	22.478

Правда ли, что мы нашли приближённое решение? На самом деле, поставленная задача некорректна: она не имеет решения.

Решим данное уравнение аналитически. Разделив переменные, находим

$$\frac{dy}{y^2 + 1} = dx.$$

Интегрируя обе части, имеем $\operatorname{arctg} y = x + C$. Используя начальное условие, получаем $C = 0$. Тогда

$$y = \operatorname{tg} x.$$

Область определения найденного решения — интервал $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Проблема поставленной задачи в области определения решения: поскольку $\frac{\pi}{2} \approx 1.57$, решение не существует на отрезке $[0, 2]$. Таким образом, последние три столбца таблицы лишены смысла. △

Как же узнать заранее, что начальная задача поставлена корректно? В рассмотренном примере мы смогли решить уравнение аналитически, тем самым показали существование, единственность и нашли область определения решения. Но численные методы как раз и нужны для тех ситуаций, когда нельзя найти аналитическое решение.

Для доказательства корректности можно использовать, например, теоремы 7.2.1, 8.1.5, 9.1.2, 8.1.4. Приведём ещё одну теорему, сформулированную для отрезка.

Теорема 13.1.4 (существование и единственность решения на данном отрезке, [2, теорема 110C]). *Пусть* $f \in C([x_0, b] \times \mathbb{R}) \cap \mathrm{Lip}_y$. *Тогда задача (13.1) имеет единственное решение.*

Пример 13.1.5. Докажем, что задача

$$y' = x^2 + x\sqrt{y^2 + 1}, \quad y(0) = 0, \quad x \in [0, 10]$$

имеет единственное решение.

Функция $f(x,y) = x^2 + x\sqrt{y^2+1}$ непрерывна на множестве $[0,10]\times\mathbb{R}$. При $x\in[0,10]$, $y_1,y_2\in\mathbb{R}$, $y_1<y_2$ рассмотрим разность

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = x\left|\sqrt{y_1^2+1} - \sqrt{y_2^2+1}\right| \leqslant 10|g(y_2) - g(y_1)|,$$

где $g(y) = \sqrt{y^2+1}$. По теореме Лагранжа о конечных приращениях имеем

$$|g(y_2) - g(y_1)| = |g'(c)||y_2 - y_1|,$$

где $c\in(y_1,y_2)$. Так как

$$|g'(c)| = \left|\frac{c}{\sqrt{c^2+1}}\right| \leqslant \frac{|c|}{\sqrt{c^2}} = 1,$$

то

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leqslant 10|y_2 - y_1|.$$

Значит, функция f удовлетворяет условию Липшица по второй переменной (с постоянной $L=10$). Таким образом, выполнены условия теоремы 13.1.4. Значит, решение существует и единственно на отрезке $[0,10]$. △

Замечание. При решении реальных практических задач не стоит самостоятельно программировать тот или иной численный метод. Лучше всего воспользоваться зарекомендовавшей себя библиотекой. Функции такой библиотеки будут работать быстрее и содержать меньше потенциальных ошибок, поскольку они, скорее всего, оптимизированы и прошли проверку временем. Например, в системе SageMath реализован доступ к функциям библиотеки GSL (GNU Scientific Library).

Программа, решающая задачу (13.2) на отрезке $[0,1.5]$ может выглядеть так:

```
def f(x, y):
    return [y[0]^2 + 1]
b = 1.5
S = ode_solver(function=f)  # класс для доступа к библиотеке GSL
S.ode_solve(y_0 = [0], t_span=[0, b], num_points=10)
print(S.solution)  # таблица значений
S.plot_solution()  # график численного решения
```

Если задать $b=2$, то функция `ode_solve`, в отличие от нашей функции `E`, завершится с ошибкой.

§13.2. Численные методы решения систем дифференциальных уравнений

Определение. Запись

$$r' = f(t,r), \quad r(t_0) = r^0, \quad t\in[t_0,b] \tag{13.3}$$

означает, что требуется найти решение системы $r' = f(t, r)$, удовлетворяющее условию $r(t_0) = r^0$ и заданное на отрезке $[t_0, b]$.

Определение 13.1.1 метода Эйлера дословно переносится со скалярного случая на системы, если в цитируемом определении считать величины y_j векторами. Его реализация в системе SageMath также остаётся прежней (см. функцию `E` в параграфе 13.1).

Пример 13.2.1. Рассмотрим задачу

$$r' = Ar, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad r(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 0.5].$$

Найдём её решение аналитически и численно методом Эйлера и сравним результаты.

Для аналитического решения найдём собственные числа $\lambda = 1$, $\lambda = 4$ и соответствующие собственные векторы $[1, -1]^T$, $[1, 2]^T$ матрицы A. Тогда общее решение имеет вид

$$r(t) = C_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2 e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Используя начальное условие, получаем $C_1 = -3$, $C_2 = 2$.

Таким образом, точное решение поставленной задачи

$$r(t) = -3e^t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 2e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Для численного решения воспользуемся функцией E (см. параграф 13.1) и следующим скриптом:

```
def f(t, r):
    return vector([
        2 * r[0] + r[1],
        2 * r[0] + 3 * r[1]
    ])
t0 = 0
b = 0.5
r0 = vector([-1, 7])
h = 0.1
P = E(f, t0, b, r0, h)

for p in P:
    print(f"{p[0]:10.2f}", end=" ")
    for j in range(len(r0)):
        print(f"{p[1][j]:10.4f}", end=" ")
    print()
for j in range(len(r0)):
    show(line([(p[0], p[1][j]) for p in P]))
```

Замечание. В системе SageMath компоненты вектора нумеруются с нуля, а не с единицы.

Интегральная кривая проходит в трёхмерном пространстве. Для визуализации решения мы строим проекции интегральной кривой и ломаной Эйлера на двумерные плоскости с координатами (t, r_1) и (t, r_2) (рис. 13.3). $\triangle$

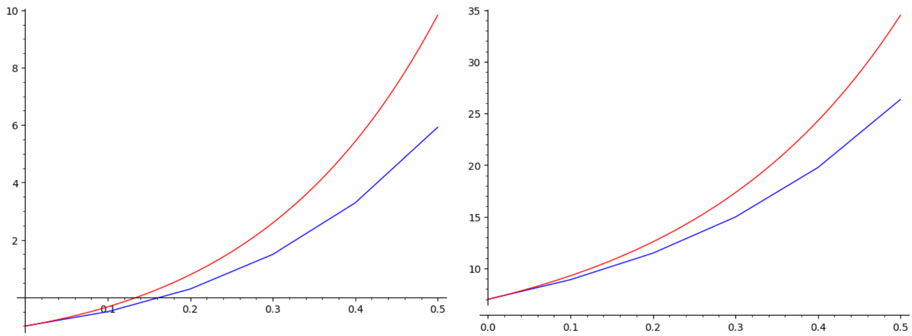

Рис. 13.3. Проекции точного решения (красным) и приближения ломаной Эйлера (синим) в системах координат (t, r_1) и (t, r_2)

Определение и реализация классического метода Рунге–Кутты 4-го порядка в системе SageMath также дословно переносится со скалярного случая (см. параграф 13.1) на системы уравнений.

Рассмотрим вопрос о том, как численно решать уравнения высших порядков. С помощью леммы 5.3.2 о системе, равносильной уравнению, теоремы существования и единственности, а также численные методы распространяются на уравнения высших порядков.

Пример 13.2.2. Рассмотрим начальную задачу

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad [0, 10].$$

Эта задача решается аналитически. Точное решение: $y = \sin t$.

Чтобы решить задачу численно, перейдём к равносильной системе. Для этого вводятся новые переменные

$$r_1 = y, \quad r_2 = y'.$$

Имеем $r_1' = y' = r_2$, $r_2' = y'' = -y = -r_1$. Тогда равносильная система и начальные условия имеют вид

$$\begin{cases} r_1' = r_2, \\ r_2' = -r_1, \end{cases} \qquad r(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Далее решим эту систему численно пользуясь, например, функцией `RK4` (см. 13.1). Искомое решение — первая компонента вектора r.

Скрипт, решающий поставленную задачу с шагом $h = 0.1$:

```
def f(t, r):
    return vector([
        r[1],
        -r[0]
    ])
t0 = 0
b = 10
r0 = vector([0, 1])
h = 0.1
P2 = RK4(f, t0, b, r0, h)

def phi(t):
    return sin(t)

show(plot(lambda t: phi(t), t0, b, color='red') + \
    line([(p[0], p[1][0]) for p in P2], color='blue'))
```

Наконец, приведём программу, решающую ту же задачу с помощью встроенных в систему SageMath средств для численного решения систем:

```
def f(t, r):
    return [
        r[1],
        -r[0]
    ]
b = 10
S = ode_solver(function=f)  # класс для доступа к библиотеке GSL
S.ode_solve(y_0 = [0, 1], t_span=[0, b], num_points=100)
S.plot_solution()  # график численного решения
```

△

Лекция 14

§14.1. Автономная система

Определение. ***Автономная система*** — система вида

$$r' = f(r). \tag{14.1}$$

Другими словами, нормальная система уравнений автономна, если её правая часть не зависит от времени.

Замечание. Любая нормальная система $r' = f(t, r)$ может быть сведена к автономной при помощи введения дополнительной неизвестной $r_{n+1} = t$.

Всякое решение $r = [r_1(t), \ldots, r_n(t)]^T$ системы (14.1) параметрически определяет траекторию в пространстве $\mathbb{R}^n_r$. Она является проекцией интегральной кривой на пространство $\mathbb{R}^n_r$.

Пример 14.1.1. Рассмотрим одномерное автономное уравнение

$$x' = x.$$

Одно из его решений — функция $x = e^t$. Сдвиг интегральной кривой параллельно оси времени на τ приводит к функции $x = e^{t-\tau} = e^{-\tau}e^t$, также являющейся решением. Причём проекция новой интегральной кривой на ось x совпадает с проекцией прежней кривой. Это общее свойство автономных систем (см. теорему 14.1.3). Ось x называют *фазовым пространством*, а $\mathbb{R}^2_{t,x}$ — *расширенным фазовым пространством* уравнения. Функция $t \mapsto e^t$ параметрически определяет *фазовую траекторию* — положительную часть оси x. Направление движения отмечают стрелкой на фазовой траектории (рис. 14.1). △

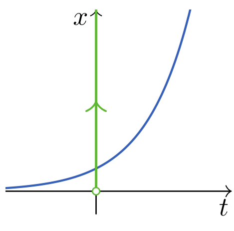

Рис. 14.1. Интегральная кривая и фазовая траектория скалярного уравнения $x' = x$

Определение. ***Фазовое пространство*** системы (14.1) — пространство $\mathbb{R}^n_r$.

Определение. ***Расширенное фазовое пространство*** системы (14.1) — множество $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_r$.

Определение. ***Фазовая траектория*** системы (14.1) — проекция интегральной кривой на фазовое пространство параллельно оси времени.

Определение. ***Фазовый портрет*** системы — совокупность её фазовых траекторий.

Определение. ***Фазовая скорость*** системы (14.1) в точке r — вектор $f(r)$.

Из формулы (14.1) следует, что фазовая траектория в каждой своей точке касается вектора поля фазовых скоростей.

Пример 14.1.2. На рис. 14.2 изображена интегральная кривая и *фазовая траектория*, соответствующие решению $x = \cos t$, $y = \sin t$ системы

$$\begin{cases} x' = -y, \\ y' = x. \end{cases}$$

Для данной системы *фазовое пространство* — плоскость $\mathbb{R}^2_{x,y}$, *расширенное фазовое пространство* — пространство $\mathbb{R}^3_{t,x,y}$. $\triangle$

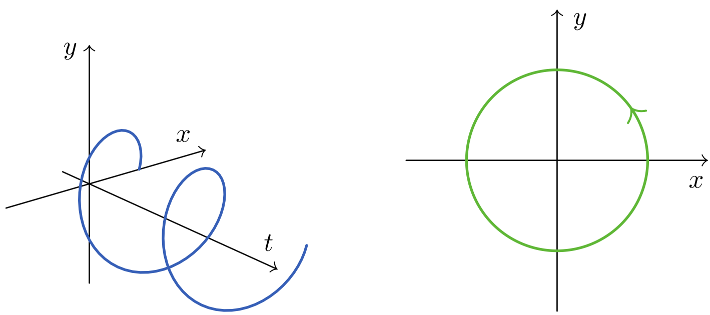

Рис. 14.2. Интегральная кривая и фазовая траектория двумерного уравнения

Определение. ***Точка покоя*** (***положение равновесия***, ***стационарное состояние***) системы (14.1) — точка r_0, такая что $f(r_0) = 0$.

Упражнение 5. Докажите, что r_0 — точка покоя системы (14.1), если и только если $r \equiv r_0$ — её решение.

Теорема 14.1.3 (свойства автономной системы). *Пусть область* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f \in \mathrm{Lip}_{loc}\,\Omega$, $E = \langle a, b\rangle$. *Тогда*

(i) Если φ *— решение системы (14.1) на* E, $\tau \in \mathbb{R}$, *то* $\varphi(t - \tau)$ *— решение на* $E + \tau$ *с той же траекторией.*

(ii) Если для решений φ^1 *и* φ^2 *будет* $\varphi^1(t_1) = \varphi^2(t_2)$, *то* $\varphi^1(t_1 + t) \equiv \varphi^2(t_2 + t)$ *при всех* t, *для которых определены обе части тождества.*

(iii) *Пусть* r^0 *— точка покоя системы* (14.1), $r \not\equiv r^0$ *— решение* (14.1) *на* E. *Тогда* $r(t) \neq r^0$ *при всех* $t \in E$.

(iv) *Пусть* φ *— не постоянное решение* (14.1) *на* $\mathbb{R}$, $t_1 \neq t_2$, $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$. *Тогда* φ *— периодическая функция, а соответствующая траектория — замкнутая кривая без самопересечений.*

Доказательство. (i) Имеем $\varphi'(t) \equiv f(\varphi(t))$ на E. Значит, $\varphi'(t-\tau) \equiv f(\varphi(t-\tau))$ при $t \in E+\tau$. Решения $\varphi(t)$ и $\varphi(t-\tau)$ имеют одну и ту же траекторию, так как их графики отличаются параллельным переносом вдоль оси t (рис. 14.3).

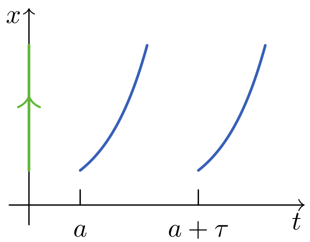

Рис. 14.3. Сдвиг по времени даёт другое решение, но сохраняет траекторию

(ii) Рассмотрим вектор-функции $\psi^1(t) = \varphi^1(t_1+t)$ и $\psi^2(t) = \varphi^2(t_2+t)$. По свойству (i) они является решением системы (14.1). Кроме того,

$$\psi^1(0) = \varphi^1(t_1) = \varphi^2(t_2) = \psi^2(0).$$

Тогда по теореме 7.2.1 будет $\psi^1 \equiv \psi^2$ при всех t, для которых определены обе части тождества.

(iii) По свойству (ii) если фазовая траектория имеет общую точку с положением равновесия, то она должна совпадать с ним при всех t.

(iv) Пусть $t_1 < t_2$. По свойству (i) функция $\psi(t) = \varphi(t+t_2-t_1)$ — тоже решение, при этом $\psi(t_1) = \varphi(t_2) = \varphi(t_1)$. Тогда по теореме 7.2.1 $\varphi \equiv \psi$ на $\mathbb{R}$. Значит, $t_2 - t_1$ — период решения φ.

Докажем, что найдётся наименьший положительный период. Для этого установим, что $T := \inf\{d > 0 \mid \varphi(t+d) \equiv \varphi(t)\} > 0$ и T — период.

Так как φ — не положение равновесия, то найдётся число $t_3 \neq t_1$ такое, что $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_3)$. Предположим противное: для любого $\delta > 0$ найдётся период, меньший δ. Тогда в любой δ-окрестности точки t_1 найдётся точка t', в которой $\varphi(t') = \varphi(t_3)$. Из таких точек составим последовательность $t'_n \to t_1$. При этом $|\varphi(t'_n) - \varphi(t_1)| = |\varphi(t_3) - \varphi(t_1)|$ для любого n, а значит, вектор-функция φ не является непрерывной в t_1. Это противоречит определению решения.

Построим последовательность периодов $d_i \to T$. В каждой точке $t \in \mathbb{R}$ имеем $\varphi(t+d_i) \equiv \varphi(t)$. Принимая во внимание непрерывность φ и осуществляя предельный переход при $i \to \infty$, получаем, что T также является периодом.

Теперь покажем, что у фазовой траектории решения φ нет точек самопересечения. Допустим при некоторых t^* и t^{**} будет $\varphi(t^*) = \varphi(t^{**})$, но $|t^* - t^{**}| < T$.

Рассуждая также, как в начале доказательства пункта (iv), получаем, что $|t^* - t^{**}|$ — период. Но это невозможно, поскольку T — наименьший период. □

Следствие 14.1.4 (виды траекторий). *Пусть область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f \in \mathrm{Lip}_{loc}\,\Omega$. Тогда всякая фазовая траектория автономной системы (14.1) принадлежит одному из следующих типов:*

(а) положение равновесия;

(б) замкнутая траектория без самопересечений;

(в) незамкнутая траектория без самопересечений.

Доказательство. Пусть φ — решение (14.1) и не положение равновесия. Тогда либо $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$ при любых t_1 и t_2, $t_1 \neq t_2$. В этом случае траектория — незамкнутая кривая без самопересечений. Либо при некоторых t_1 и t_2, $t_1 \neq t_2$, будет $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$. Тогда при помощи сдвигов $\varphi(t + k(t_2 - t_1))$, где $k \in \mathbb{Z}$, решение φ продолжается на всю вещественную ось. Следовательно, по свойству (iv) теоремы 14.1.3 траектория — замкнутая кривая без самопересечений. □

Теорема 14.1.5 (о понижении размерности автономной системы). *Пусть $u, v \in C(G)$, $G_0 = \{(x, y) \in G \mid u(x, y) = v(x, y) = 0\}$. Тогда на множестве $G \setminus G_0$ семейство фазовых траекторий системы*

$$\begin{cases} x' = u(x, y), \\ y' = v(x, y) \end{cases} \tag{14.2}$$

совпадает с семейством интегральных кривых уравнения

$$v(x, y)\, dx = u(x, y)\, dy. \tag{14.3}$$

Доказательство. См. [3]. □

Замечание. Уравнение (14.3) формально получается из системы (14.2), если записать производные в виде отношения дифференциалов и исключить dt.

§14.2. Понятие устойчивости

Рассмотрим скалярное автономное уравнение

$$x' = \lambda x.$$

Его общее решение имеет вид $x = x_0 e^{\lambda t}$, где $x_0 = x(0)$. При любом значении параметра λ уравнение имеет решение $x \equiv 0$. Ему соответствует точка покоя в начале координат на фазовой прямой — оси Ox. Проследим, как ведут себя другие решения с близкими начальными условиями в зависимости от λ (рис. 14.4).

Если $\lambda = 0$, то любое решение — это константа, равная начальному значению. Таким образом, вся фазовая прямая состоит из точек покоя. В этом случае

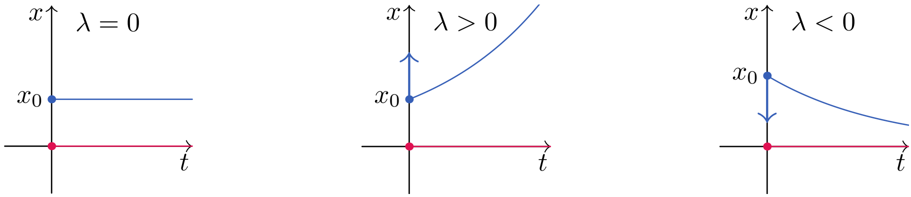

Рис. 14.4. Решения уравнения $x' = \lambda x$

говорят, что решение, тождественно равное нулю, устойчиво. Другими словами если немного изменить начальное значение, то решение сильно не изменится.

Если $\lambda > 0$, то при $x_0 > 0$ решение неограниченно возрастает. Значит, точка на фазовой прямой удаляется от точки покоя, уходя в бесконечность. Аналогично поведение решения и при $x_0 < 0$. Говорят, что нулевое решение неустойчиво, поскольку даже очень незначительное отклонение от нуля в начальный момент времени влечёт за собой большое отклонение в будущем.

При $\lambda < 0$ решение монотонно стремится к нулю. Соответствующая фазовая точка стремится к положению равновесия. В этом случае решение не просто устойчиво, а асимптотически устойчиво: если отойти от нуля, то фазовая точка не просто останется вблизи точки покоя, а будет притягиваться к ней.

Начальные данные для уравнения или системы уравнений обычно являются результатами каких-то измерений. Следовательно, они известны не точно, а с некоторой погрешностью. Если сколь угодно малые изменения начальных данных способны сильно изменить решение, то найденное решение не может считаться удовлетворительным в смысле описания явления. Поэтому важно знать условия, при которых малое изменение начальных данных влечёт малое изменение решения.

Перейдём к формальным определениям. Пусть $p^0 = (t_0, r^0)$. В дальнейшем через $r(t, p^0)$ обозначается решение задачи Коши $r' = f(t, r)$, $r(t_0) = r^0$.

Определение. ***Устойчивое (по Ляпунову) решение*** на $[t_0, +\infty)$ системы $r' = f(t, r)$ — это такое решение, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такая δ-окрестность значения $\varphi(t_0)$, что любое решение, выходящее из этой δ-окрестности при $t = t_0$, во все будущие моменты времени отличается от φ менее, чем на ε (рис. 14.5). То есть

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall r^0 \colon |r^0 - \varphi(t_0)| < \delta \ \forall t \geqslant t_0 \ |r(t, p^0) - \varphi(t)| < \varepsilon. \tag{14.4}$$

Замечание. Используя равномерную норму $\|\cdot\|_{C[t_0,+\infty)}$, выражение (14.4) можно заменить равносильным ему:

$$\lim_{r^0 \to \varphi(t_0)} \left\| r(\cdot, p^0) - \varphi \right\|_{C[t_0,+\infty)} = 0.$$

Таким образом, решение φ устойчиво, если близкие к нему по начальным условиям решения остаются близкими и в будущем.

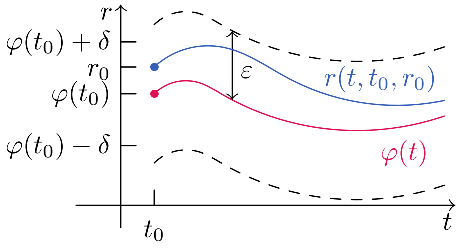

Рис. 14.5. Устойчивое решение

Определение. ***Асимптотически устойчивое решение*** системы $r' = f(t, r)$ — устойчивое решение, такое что $r(t, p^0) - \varphi(t) \to 0$ при $t \to +\infty$ для всех r^0 из некоторой окрестности значения $\varphi(t_0)$.

Определение. ***Неустойчивое решение*** системы $r' = f(t, r)$ — решение, не подходящее под определение устойчивого решения.

Замечание. В частности, решение будет неустойчивым, если оно задано на конечном промежутке.

Исследование устойчивости решения φ всегда можно свести к исследованию нулевого решения другой системы. Об этом говорит следующая лемма.

Определение. Будем говорить, что два решения имеют ***одинаковый характер устойчивости***, если они оба устойчивы, но не асимптотически, либо они оба асимптотически устойчивы, либо оба неустойчивы.

Лемма 14.2.1. *Пусть φ — решение на $[t_0, +\infty)$ системы $r' = f(t, r)$. Тогда решение φ и нулевое решение на $[0, +\infty)$ системы*

$$s'(\tau) = f(t_0 + \tau, s(\tau) + \varphi(t_0 + \tau)) - f(t_0 + \tau, \varphi(t_0 + \tau)) \tag{14.5}$$

имеют одинаковый характер устойчивости.

Доказательство. Решение φ системы $r' = f(t, r)$ устойчиво, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall r^0 \colon |r^0 - \varphi(t_0)| < \delta\ \forall t \geqslant t_0\ |r(t, p^0) - \varphi(t)| < \varepsilon.$$

Положим $\tau = t - t_0$, $s^0 = r^0 - \varphi(t_0)$, $\psi(\tau) = r(t_0 + \tau, p^0) - \varphi(t_0 + \tau)$.

Условие устойчивости в новых терминах имеет вид

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall s^0 \colon |s^0| < \delta\ \forall \tau \geqslant 0\ |\psi(\tau)| < \varepsilon.$$

Заметим, что ψ — решение системы (14.5) на $[0, +\infty)$, при этом

$$\psi(0) = r(t_0, p^0) - \varphi(t_0) = p^0 - \varphi(t_0) = s^0.$$

То есть $\psi(\tau) = s(\tau; 0, s^0)$. Следовательно, условие устойчивости решения φ приобретает вид

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall s^0 \colon |s^0| < \delta\ \forall\tau \geqslant 0\ |s(\tau; 0, s^0)| < \varepsilon,$$

что равносильно устойчивости нулевого решения системы (14.5), заданного на промежутке $[0, +\infty)$.

Аналогично рассматриваются случаи асимптотической устойчивости и неустойчивости. $\square$

Замечание. В силу леммы 14.2.1 исследование устойчивости решения автономной системы всегда можно свести к исследованию точки покоя некоторой другой автономной системы.

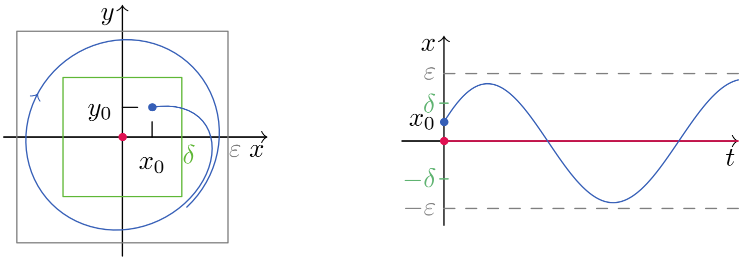

Рис. 14.6. Устойчивое положение равновесия автономной системы

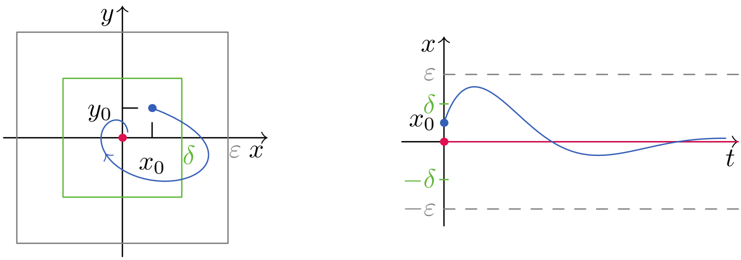

Рис. 14.7. Асимптотически устойчивое положение равновесия автономной системы

Пример 14.2.2. Исследуем на устойчивость нулевое решение уравнения

$$x' = -2x.$$

Его общее решение $x = Ce^{-2t}$. Зафиксируем некоторое $\varepsilon > 0$ и положим $\delta = \varepsilon$, U_δ — δ-окрестность нуля, $p^0 = (0, x_0)$. Тогда для любого начального значения $x_0 \in U_\delta$ имеем решение $x(t, p^0) = x_0 e^{-2t}$. Оно определено при всех $t \geqslant 0$, и при этом

$$|x(t, p^0)| = |x_0 e^{-2t}| \leqslant |x_0| < \varepsilon.$$

Значит, нулевое решение устойчиво.

Кроме того, оно асимптотически устойчиво. В качестве δ, участвующего в определении асимптотической устойчивости, можно выбрать любое число. $\triangle$

В случае, когда известно общее решение в элементарных функциях, вопрос об устойчивости можно разрешить непосредственной проверкой определения. Однако, найти явные выражения для решений удаётся далеко не всегда. Поэтому возникает необходимость построения общей теории, которая позволяла бы судить об устойчивости решения только по аналитической структуре правой части системы.

Лекция 15

§15.1. Устойчивость линейной системы

Из леммы 14.2.1 следует, что решение φ линейной системы

$$r' = P(t)r + q(t)$$

имеет тот же характер устойчивости, что и нулевое решение линейной однородной системы

$$r' = P(t)r.$$

Отсюда, в частности, вытекает, что все решения линейной системы имеют одинаковый характер устойчивости, поэтому можно говорить об *устойчивости линейной системы.*

Теорема 15.1.1 (устойчивость ЛОС с постоянными коэффициентами). *Пусть* $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$*. Обозначим через* $m_a(\lambda)$ *и* $m_g(\lambda)$ *алгебраическую и геометрическую кратность числа* $\lambda \in \operatorname{spec} A$*. Тогда система*

$$r' = Ar \tag{15.1}$$

(i) асимптотически устойчива, если $\operatorname{Re}\lambda < 0$ *для всех* $\lambda \in \operatorname{spec} A$*;*

(ii) устойчива, но не асимптотически, если одновременно выполнено:

1. $\exists \lambda \in \operatorname{spec} A \ \operatorname{Re}\lambda = 0$,
2. $\forall \lambda \in \operatorname{spec} A \ \operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$,
3. $\forall \lambda \in \operatorname{spec} A \ \operatorname{Re}\lambda = 0 \ \Rightarrow \ m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$;

(iii) неустойчива, если выполнено одно из условий:

1. $\exists \lambda \in \operatorname{spec} A \ \operatorname{Re}\lambda > 0$,
2. $\exists \lambda \in \operatorname{spec} A \ \operatorname{Re}\lambda = 0, m_a(\lambda) > m_g(\lambda)$.

Доказательство. Через T обозначаем матрицу перехода к жорданову базису матрицы A, J — жорданова форма матрицы A.

В силу следствия **??** любое решение системы (15.1) имеет вид

$$r(t) = e^{At} r(0) = T e^{Jt} T^{-1} r(0).$$

Принимая во внимание лемму 6.1.2, получаем

$$|r(t)| \leqslant n^3 \, |T| \left|e^{Jt}\right| \left|T^{-1}\right| |r(0)| = K \left|e^{Jt}\right| |r(0)|, \tag{15.2}$$

где $K > 0$ не зависит от t. Обозначим через $a_{ij}(t)$ элементы матрицы e^{Jt}.

(i) Каждая функция $a_{ij}(t)$ имеет вид $Ce^{\lambda t}t^k$, где λ — одно из собственных чисел. Поскольку $\operatorname{Re}\lambda < 0$, то для всех i, j будет $a_{ij}(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, следовательно,

$$|e^{Jt}| \to 0 \quad \text{при } t \to +\infty.$$

Тогда из оценки (15.2) следует устойчивость и асимптотическая устойчивость нулевого решения.

(ii) Каждая функция $a_{ij}(t)$ имеет вид $Ce^{\lambda t}t^k$, но теперь $k = 0$, если $\operatorname{Re}\lambda = 0$. Следовательно, существует такое число M, что при всех $t \geqslant 0$

$$|e^{Jt}| < M.$$

Поэтому из оценки (15.2) следует устойчивость нулевого решения.

Пусть $\operatorname{Re}\lambda = 0$ и соответствующая функция $e^{\lambda t}$ расположена в матрице e^{Jt} на пересечении j-й строки и j-го столбца. Обозначим через I^j столбец, в котором на j-м месте стоит 1, а остальные элементы нулевые. Тогда при любом $\delta > 0$ решение с начальным значением

$$r(0) = \delta T I^j$$

не стремится к нулю. Поэтому асимптотической устойчивости нет.

(iii) Пусть существует собственное число $\lambda = \alpha + i\beta$, где $\alpha > 0$. Обозначим через h соответствующий собственный вектор. Тогда вектор-функция

$$\varphi(t) = e^{\lambda t}h$$

является комплексным решением (15.1).

Если же имеется собственное число $\lambda = i\beta$, $\beta \neq 0$, алгебраическая кратность которого больше геометрической, то система (15.1) имеет комплексное решение

$$\varphi(t) = e^{i\beta t}(th^1 + h^2),$$

где h^1, h^2 — собственный и присоединённый вектор, соответствующие числу λ.

Заметим, что в обоих случаях $|\varphi(t)| \to +\infty$ при $t \to +\infty$. Следовательно, хотя бы одна из вектор-функций, $\operatorname{Re}\varphi(t)$ или $\operatorname{Im}\varphi(t)$, является неограниченным вещественным решением (15.1). Пусть таковой является $\operatorname{Re}\varphi(t)$. Тогда выбирая в качестве начального условия

$$r(0) = \mu \operatorname{Re}\varphi(0)$$

при достаточно малом μ, получаем неограниченное решение с начальным значением в сколь угодно малой окрестности нуля. Отсюда следует, что нулевое решение неустойчиво. □

§15.2. Классификация точек покоя линейной однородной системы второго порядка

Исследуем подробно поведение траекторий в окрестности точки покоя линейной системы

$$r' = Ar, \tag{15.3}$$

если $A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$. Пусть $\det A \neq 0$, тогда имеется единственное положение равновесия $r = 0$ и собственные числа λ_1, λ_2 матрицы A отличны от нуля.

I. Случай $\boldsymbol{\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}}$, $\boldsymbol{\lambda_1 \neq \lambda_2}$

Перейдём в систему координат u, v, связанную с собственным базисом h^1, h^2. Подставляя в уравнение $r = Ts$, где $s = [u, v]^T$, $T = [h^1, h^2]$, получаем

$$Ts' = ATs.$$

Умножая слева на T^{-1}, находим

$$s' = T^{-1}ATs.$$

Так как $T^{-1}AT = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$, то в новых координатах система имеет вид

$$\begin{cases} u' = \lambda_1 u, \\ v' = \lambda_2 v. \end{cases}$$

Её решение: $u = C_1 e^{\lambda_1 t}$, $v = C_2 e^{\lambda_2 t}$.

Если одна и только одна из констант C_1 и C_2 равна нулю, то получаем параметрическое задание одной из полуосей. Заметим ещё, что изменение знака одной из констант преобразует фазовую траекторию в симметричную ей относительно координатной оси. Таким образом, достаточно изучить фазовый портрет только в первой четверти.

Пусть $C_1 > 0$, $C_2 > 0$. Выражая t через u и подставляя в выражение для v, находим

$$v = C_2 \left(\frac{u}{C_1} \right)^{\lambda_2/\lambda_1} = Cu^{\lambda_2/\lambda_1}.$$

При $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ получается семейство парабол. Функции u и v возрастают, следовательно, фазовые траектории расходятся от начала координат. Отражая траектории относительно координатных осей, получаем фазовый портрет во всей плоскости (рис. 15.1). Такая точка покоя называется ***неустойчивым узлом.***

При возвращении к прежней системе координат фазовый портрет исказится, но качественное поведение траекторий не изменится. Это замечание относится и ко всем последующим случаям.

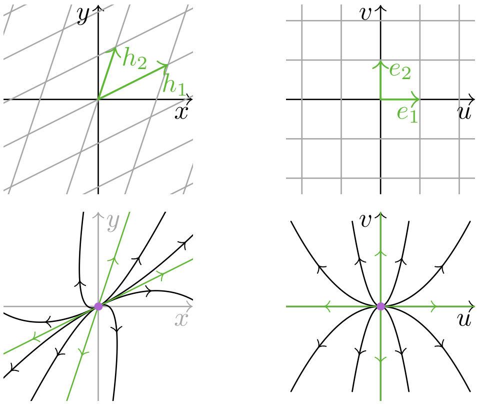

Рис. 15.1. Неустойчивый узел в старой и новой системе координат

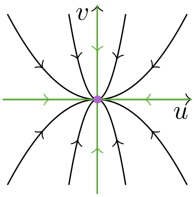

Рис. 15.2. Устойчивый узел

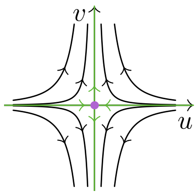

Рис. 15.3. Седло

Если $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, то уравнение фазовых траекторий не меняется, но изменяется направление движения. Теперь фазовые точки стремятся к началу координат. Соответствующее положение равновесия — ***устойчивый узел*** (рис. 15.2).

Если $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, то $v = Cu^{\lambda_2/\lambda_1}$ — уравнение гиперболы. Соотношения $u = C_1 e^{\lambda_1 t} \to 0$, $v = C_2 e^{\lambda_2 t} \to \infty$ при $t \to +\infty$ дают представление о направлении движения вдоль фазовых траекторий. Точка покоя называется ***седло*** (рис. 15.3), она неустойчива. Асимптоты фазовых траекторий называют ***сепаратрисами седла***. В старой системе координат сепаратрисы проходят вдоль собственных векторов матрицы коэффициентов.

II. Случай $\lambda_1 = \lambda_2$

Если геометрическая кратность собственного числа $\lambda = \lambda_{1,2}$ равна двум, то $A = \mathrm{diag}(\lambda, \lambda)$. Тогда решения системы: $x = C_1 e^{\lambda t}$, $y = C_2 e^{\lambda t}$. Исключая отсюда параметр t получаем, что фазовые траектории — лучи, входящие в начало координат при $\lambda < 0$, и выходящие из него, если $\lambda > 0$. Соответствующая точка покоя — устойчивый или неустойчивый ***дикритический узел*** (рис. 15.4).

Пусть собственное число λ имеет геометрическую кратность 1. Подставляя

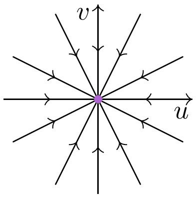

Рис. 15.4. Устойчивый и неустойчивый дикритический узел

в систему $r = Ts$, где T — матрица перехода к жорданову базису, получаем

$$s' = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} s.$$

Тогда

$$s = C_1 e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 e^{\lambda t} (t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}).$$

Следовательно, $u = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t}$, $v = C_2 e^{\lambda t}$.

Заметим, что одновременная замена знака у постоянных C_1 и C_2 переводит фазовую траекторию в симметричную ей относительно начала координат. При $C_1 \neq 0$, $C_2 = 0$ функции u и v определяют полуоси координатной оси u. Таким образом, достаточно изучить фазовый портрет при $v > 0$.

Выражая параметр t через v и подставляя его в выражение для u, находим уравнение траекторий

$$u = Cv + \frac{\ln v}{\lambda} v,$$

где $C = C_1/C_2$. Производная u'_v указывает на то, что все фазовые траектории касаются оси u при $v \to 0$ (рис. 15.5). Соответствующая точка покоя — ***вырожденный узел*** (*устойчивый* при $\lambda < 0$ и *неустойчивый* при $\lambda > 0$).

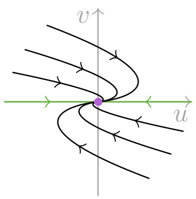

Рис. 15.5. Устойчивый и неустойчивый вырожденный узел

III. Случай $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im}\lambda_{1,2} \neq 0$

Поскольку матрица A вещественная, то $\lambda_1 = \overline{\lambda}_2$. Пусть $\lambda = \lambda_1$, h — соответствующий собственный вектор. Тогда $\operatorname{Re} h$, $\operatorname{Im} h$ — базис в $\mathbb{R}^2$. Поскольку

$$\operatorname{Re} h = \frac{h + \overline{h}}{2}, \quad \operatorname{Im} h = \frac{h - \overline{h}}{2i} = \frac{-ih + i\overline{h}}{2},$$

то матрица перехода T к базису $\operatorname{Re} h$, $\operatorname{Im} h$ представима в виде

$$T = [\operatorname{Re} h, \operatorname{Im} h] = \frac{1}{2}[h, \overline{h}] \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix}.$$

Пусть $H = [h, \overline{h}]$ — матрица перехода к собственному базису. Подставляя $r = Ts$ в уравнение $r' = Ar$, находим

$$\frac{1}{2}H \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix} s' = A\frac{1}{2}H \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix} s.$$

Сокращая на множитель $1/2$ и умножая слева на H^{-1}, получаем

$$\begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix} s' = H^{-1}AH \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix} s. \tag{15.4}$$

Поскольку $H^{-1}AH = \operatorname{diag}(\lambda, \overline{\lambda})$, то система (15.4) имеет вид

$$\begin{cases} u' - iv' = \lambda(u - iv), \\ u' + iv' = \overline{\lambda}(u + iv). \end{cases}$$

Уравнения этой системы равносильны: одно получается из другого при комплексном сопряжении. Поэтому достаточно рассмотреть только одно из них. Положим $z = u + iv$. Тогда второе уравнение принимает вид

$$z' = \overline{\lambda} z.$$

Его решения: $z = Ce^{\overline{\lambda}t}$.

Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$, $C = ae^{i\varphi}$. Тогда

$$z = ae^{\alpha t}e^{i(\varphi - \beta t)}.$$

При $\alpha = 0$ получаем окружности радиуса a. Соответствующая устойчивая, но не асимптотически устойчивая точка покоя называется ***центр***. Направление обхода окружностей зависит от знака β.

При $\alpha > 0$ получаем логарифмическую спираль. Модуль z возрастает, значит, точка удаляется от начала координат, при этом совершая вокруг него обороты. Данное положение равновесия называется ***неустойчивый фокус***.

При $\alpha < 0$ спираль закручивается. Точка покоя — ***устойчивый фокус***. Направление закручивания или раскручивания траекторий в случае фокуса зависит от знака $\operatorname{Im}\lambda$ (рис. 15.6).

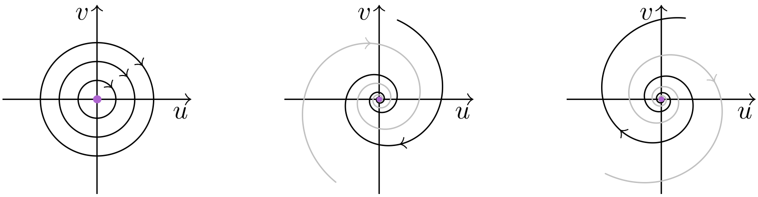

Рис. 15.6. Центр, устойчивый и неустойчивый фокус

§15.3. Теоремы Ляпунова

15.3.1. Устойчивость по первому приближению

Рассмотрим нелинейную автономную систему $r' = f(r)$. Допустим, вектор-функция f дифференцируема в нуле, то есть

$$f(r) = f(0) + f'(0)r + o(r) \quad \text{при } r \to 0.$$

Определение. Пусть $f(0) = 0$. Тогда система

$$r' = f'(0)r$$

называется ***системой первого приближения*** или ***линеаризацией*** системы $r' = f(r)$.

Теорема 15.3.1 (Ляпунов, устойчивость по первому приближению). *Пусть $f \in C^1(\Omega)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — окрестность нуля, $f(0) = 0$. Тогда нулевое решение системы $r' = f(r)$*

(а) асимптотически устойчиво, если $\operatorname{Re}\lambda < 0$ для любого $\lambda \in \operatorname{spec} f'(0)$;

(б) неустойчиво, если найдётся $\lambda \in \operatorname{spec} f'(0)$, для которого $\operatorname{Re}\lambda > 0$.

Доказательство. См. [4, гл. 7, §4]. □

Таким образом, при выполнении условий теоремы нулевое положение равновесия исходной системы и системы первого приближения ведут себя одинаково в смысле устойчивости.

Пример 15.3.2. Исследуем на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{cases} x' = 2x + 8\sin y, \\ y' = 2 - e^x - 3y - \cos y. \end{cases}$$

Матрица Якоби правой части системы

$$f'(0) = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Её собственные числа $\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$ имеют отрицательные вещественные части. Следовательно, точка покоя данной системы асимптотически устойчива. △

Отметим, что в теореме 15.3.1 не указан случай, когда имеются собственные числа с нулевой вещественной частью, а остальные, если они есть, имеют отрицательную вещественную часть. В этом случае характер устойчивости положения равновесия исходной и линеаризованной системы может различаться.

Пример 15.3.3. Скалярное уравнение $x' = x^2$ имеет точку покоя $x = 0$. Соответствующая линеаризация $x' = 0$ — устойчивое уравнение. Решения исходного уравнения при $x > 0$ — семейство гипербол

$$x = \frac{1}{C - t}.$$

Для устойчивости все решения с достаточно близкими к нулю начальными значениями должны мало отличаться от нулевого решения во все будущие моменты времени. Однако, если хоть немного отступить от нуля в положительном направлении оси x, то соответствующее решение не только не будет близким к нулевому решению в будущем, оно даже не будет определено, начиная с некоторого момента времени (рис. 15.7). Следовательно, нулевое решение неустойчиво по определению. △

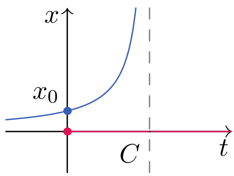

Рис. 15.7. Решение уравнения $x' = x^2$ при $x_0 > 0$

Таким образом, в указанном случае требуется привлекать иные методы исследования на устойчивость.

Литература

[1] Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И. Курс математического анализа, 2001

[2] Butcher J. C. *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*, Wiley, 2016

[3] Буфетов А. И., Гончарук Н. Б., Ильяшенко, Ю. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения (электронная версия).

[4] Романко В. К. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления, М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015