Диффуры. Практика.
Третий семестр

Автор: Вячеслав Чепелин

Содержание

1. Практика 1. Начала диффур

Определение. Уравнение в нормальной форме

$$y' = f(x, y)$$

Определение. Уравнение с разделенными переменными

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0$$

Задача 1.4.

$$y' = \cos^2 x$$

Решение:

Как мы знаем $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. Подставим и получим:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \cos^2 x$$

$$\mathrm{d}y = \cos^2 x \, \mathrm{d}x$$

Проинтегрируем обе части уравнений

$$y = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} + C$$

Задача 1.5.

$$y' = 2 - y$$

Решение:

Аналогично прошлому получим

$$\frac{\mathrm{d}y}{2 - y} = \mathrm{d}x$$

Проинтегрируем обе части получим:

$$-\ln(|2 - y|) = x + C$$

По факту это и есть решение. Или можно докрутить и получить $y = 2 + Ce^{-x}$. В данном случае C не равны и в целом мы под C будем съедать все константы, которые у нас будут в решении.

Задача 1.6.

$$y' = y^2(y^2 + 1)$$

Решение:

Аналогично получим:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y^2(y^2 + 1)} = \mathrm{d}x$$

Проинтегрируем обе части и получим:

$$\int \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{y^2+1}\right) \mathrm{d}y = x + C$$

$$\frac{1}{y} + \arctan y = x + C$$

Также $y = 0$ будет решением

Задача 1.7.

$$\frac{x\,\mathrm{d}x}{\cos^2 x} + \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{9+y^2}} = 0$$

Решение:

Это уравнение с разделяющимися переменными. Давайте перенесем в правую часть и проинтегрируем:

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = -\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{9+y^2}} + C$$

$$x \operatorname{tg} x + \ln \cos x = C - \frac{1}{3} \arctan \frac{y}{3}$$

Отсюда уже понятно, как вывести y.

Задача 1.8.

$$\frac{\mathrm{d}x}{8+2x^2} + \frac{e^y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{4-e^{2y}}} = 0$$

Решение:

Вся сложность задачи - взять интеграл, поэтому скип

Задача 1.9.
Решить задачу Коши $y\left(-\frac{1}{4}\right) = 4$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \mathrm{d}x$$

Решение:

Возьму интеграл, получу:

$$-\frac{1}{y} = x + C$$

$$-1 = (x + C)y$$

Решу задачу Коши. Для этого

$$-1 = \left(-\frac{1}{4} + C\right)4$$

Откуда C = 0 и мы решили задачу Коши

2. Практика 2.

2.1. Геометрический смысл уравнений

Задача 1.1.
Под каким углом интегральные кривые уравнения $y' = x^2 + y^2 + 1$ пересекают ось Ox в начале координат

Решение:

В начале координат надо подставить 0,0. Получим $y' = 1$ - тангенс угла наклона. Откуда 45 градусов

Задача 1.2.
Не решая уравнения $y' = x + 1$, найдите его точки экстремума.

Решение:

$$y' = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0$$

Откуда $x = -1$ его точка экстремума (тут надо было сказать еще про смену знака у производной, ну в данном случае это очевидно)

Определение. Изоклина
Изоклиной уравнения $y' = f(x, y)$ называют множество уровня функции f:

$$I_k = \{(x, y) \in dom f \mid f(x, y) = k\}$$

Задача 1.3.
Методом изоклин нарисовать приближенно интегральные кривые уравнений:
1. $y' = -2x$
2. $y(y' + x) = 1$
3. $y' = y - x^2$

Решение:

Так как мне много рисовать, а мне лень, напишу алгоритм, что надо

1. Нарисовать кривые $f(x, y) = k$ для каких-то понятных k.
2. Нарисовать интегральную кривую.

Как по мне это очень скучно, с вашего позволения(то есть моего) я делать это не буду

2.2. Уравнения в полных дифференциалах

Задача 2.1.

$$(2 - 9xy^2)x \,\mathrm{d}x + (4y^2 - 6x^3)y \,\mathrm{d}y = 0$$

Решение:

В чем соль? Нам надо проверить, что это УПД, то есть ${P(x, y)_y}' = {Q(x, y)_x}'$

$$u'_x = P(x, y) \quad u'_y = Q(x, y)$$

Если мы найдем u, то решением УПД будет $u(x, y) = C$

Найдем u, взяв интеграл по x функции $P(x, y)$. Когда мы берем интеграл по переменной, мы забиваем на другую переменную.

$$u(x, y) = \int (2x - 9x^2y^2)\, \mathrm{d}x + C(y)$$

$$u = x^2 - 3x^3y^2 + C(y)$$

Возьмем производную по y.

$$u'_y = (-3x^3y^2 + C(y))\, \mathrm{d}y = -6x^3y + C(y)' = 4y^3 - 6x^3y = Q(x, y)$$

Откуда $u = x^2 + y^4 - 3x^3y^2$

Задача 2.2.

$$(x^3 + y)\, \mathrm{d}x + (x - y)\, \mathrm{d}y = 0$$

Решение:

Это УПД. Найдем u. Возьму интеграл по y у Q

$$u = \int (x - y)\, \mathrm{d}y + C(x) = xy - \frac{y^2}{2} + C(x)$$

Теперь найдем $C(x)$:

$$u'_x = y + C(x)' = x^3 + y = Q(x, y)$$

Откуда $u = \frac{x^4}{4} + xy - \frac{y^2}{2}$. Ну и решением будет $u = C$

Задача 2.3.

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} - 1\right) \mathrm{d}x - \frac{y\, \mathrm{d}y}{\sqrt{x^2 - y^2}} = 0$$

Решение:

Это УВД (удивительно). Тут в принципе аналогичные действия, даже интеграл просто берется, получим ответ: $u = \sqrt{x^2 - y^2} - x^2$

3. Практика 3.

Определение. Метод интегрирующего множителя

Рассмотрим решение дифференциальных уравнений вида: $M(x, y)\,\mathrm{d}x + N(x, y)\,\mathrm{d}y = 0$

Алгоритм решения:

1. Проверить уравнение на точность:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

2. Найти интегрирующий множитель:
   - Если $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ зависит только от x, то $\mu(x) = \exp\left(\int\left(\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}\right)\mathrm{d}x\right)$
   - Если $\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}$ зависит только от y, то $\mu(y) = \exp\left(\int\left(\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}\right)\mathrm{d}y\right)$
3. Умножить исходное уравнение на интегрирующий множитель
4. Решить полученное точное уравнение

3.1. Интегрирующий множитель

Задача 1.1.
Найти решение установив, что оно имеет интегрирующий множитель, зависящий только от одной переменной

1. $(1 - x^2 y)\,\mathrm{d}x + x^2(y - x)\,\mathrm{d}y = 0$
2. $(2xy^2 - 3y^3)\,\mathrm{d}x + (7 - 3xy^2)\,\mathrm{d}y = 0$

Решение:

Делаем все по гайду.

3.2. Уравнения с разделяющимися переменными

Задача 2.1.
Найти все решения

$$x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = 0$$

Решение:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$\ln x = \ln y + C$

$$Ce^{\ln x} = y$$

Откуда уже получаем решение

Задача 2.2.
Найти все решения

$$y' = \sqrt{1 - y^2}$$

Решение:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}} = \mathrm{d}x$$

Возьму интеграл по обоим частям и выиграю. Этим довольно скучно заниматься

Задача 2.3.

Найти все решения на множестве $[-1, 1], y > 0$

$$(x^2-1)y' + 2xy^2 = 0$$

Сравните с решениями

$$2xy^2\,\mathrm{d}x + (x^2-1)\,\mathrm{d}y = 0$$

Решение:

В первом случае мы не можем рассматривать решения, где $\mathrm{d}x = 0$, то есть x - константа

Найдем производную по y первого и производную по x второго:

$$N'_y = 4xy \quad M'_x = 2x$$

Откуда $u(y) = \exp\left(\int\left(\frac{1-2y}{y^2}\right)\right) = \frac{e^{-\frac{1}{y}}}{y^2}$

Умножим на интегрирующий множитель. Уравнение станет УВД. Мне лень его дорешивать

3.3. Линейное уравнение

Задача 3.1.

Решите уравнение

$$y' + \frac{x}{1+x^2}y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

с помощью метода Лагранжа и интегрирующего множителя

Решение:

Метод интегрирующего множителя

Общее решение линейного уравнения по теории $\mu = e^{\int -p}$, $y = \frac{C+\int q\mu}{\mu}$

Где $p(x) = -\frac{x}{1+x^2}$, $q(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Найдем μ

$$\mu = \exp\left(\int \frac{x}{1+x^2}\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right) = \sqrt{1+x^2}$$

$$y = \frac{C + \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\frac{x^2}{2} + C}{\sqrt{1+x^2}}$$

Метод Лагранжа

Решим уравнение $y' = p(x)y$. Это будет простое уравнение с разделяющимися переменными

$$y' = -\frac{x}{1+x^2}y$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{1+x^2}y$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

$$\ln y = \ln\left(\sqrt{1+x^2}^{-1}\right) + C$$

$$y = \frac{C}{\sqrt{1+x^2}}$$

Отлично. Заменим C на $C(x)$ в решении и попробуем его подогнать, чтобы все сошлось.

$y' = \frac{C(x)'}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{C(x)x}{\sqrt{1+x^2}(1+x^2)} = -\frac{x}{1+x^2} \cdot \frac{C}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x}{1+x^2}$

Ну откуда уже видно $C(x) = \frac{x^2}{2} + C$

Замечание Хз чем хорош метод Лагранжа, как будто только больнее

Задача 3.2.

Найдите решение уравнения:

$$y' = \left(2x + \frac{1}{x}\right)y + x$$

Решение:

Общее решение линейного уравнения по теории $\mu = e^{\int -p}$, $y = \frac{C + \int q\mu}{\mu}$

Где $p(x) = \left(2x + \frac{1}{x}\right)$, $q(x) = x$. Найдем μ:

$$\mu = \exp\left(\int\left(2x + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\right) = \exp(x^2 + \ln x) = xe^{x^2}$$

Найдем решение уравнения:

$$y = \frac{C + \int\left(x^2 e^{x^2}\right)\mathrm{d}x}{xe^{x^2}}$$

Это вроде не дорешивается

4. Практика 4.

4.1. Однородное уравнение

Задача 1.0.

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$$

Решение:

Приведем к общему виду

$$-\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right) \mathrm{d}x + \mathrm{d}y = 0$$

Заметим, что уравнение однородное. Сделаем замену $\frac{y}{x} = v$. Тогда $\mathrm{d}y = v \, \mathrm{d}x + x \, \mathrm{d}v$. Получим:

$$\left(-v - \frac{1}{v}\right) \mathrm{d}x + v \, \mathrm{d}x + x \, \mathrm{d}v = 0$$

$$-\frac{1}{v} \mathrm{d}x = -x \, \mathrm{d}v$$

А это уже обычное уравнение с разделяющимися, дорешивается очевидно.

Задача 1.1.

$$xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}, y(1) = 1$$

Решение:

$$\mathrm{d}y = \left(\frac{y}{x} - e^{\frac{y}{x}}\right) \mathrm{d}x$$

Получили однородное. Сделаем замену

$$v \, \mathrm{d}x + x \, \mathrm{d}v = (v - e^v) \, \mathrm{d}x$$

$$x \, \mathrm{d}v = (v - e^v - v) \, \mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{v - e^v - v} \mathrm{d}v = \frac{1}{x} \mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{e^v} \mathrm{d}v = \frac{1}{x} \mathrm{d}x$$

Дорешивается

Задача 1.2.

$$(x + y) \, \mathrm{d}x + (x - y - 2) \, \mathrm{d}y = 0$$

Решение:

Надо сдвинуть начало координат в точку пересечения данных прямых, то есть $y = -x$ и $y = x - 2$. Это происходит в точке $x = 1, y = -1$.Сдвину и получу

$$(x + y) \, \mathrm{d}x + (x - y) \, \mathrm{d}y = 0$$

А это в свою очередь тривиальное однородное.

4.2. Уравнение Бернулли

Задача 2.1.

$$y' + 2y = y^2 e^x$$

Решение:

$z = y^{1-\alpha}$ - Бернулли сводится к линейному. В данном случае $\alpha = 2$. Поэтому $z = y^{-1}$

$$\left(\frac{1}{z}\right)' + \frac{2}{z} = \frac{1}{z^2}e^x$$

$$-\frac{z'}{z^2} + \frac{2}{z} = \frac{1}{z^2}e^x$$

$$-z' + 2z = e^x$$

$$z' = 2z - e^x$$

Свели к простенькому линейному, оставим читателю порешать)

Задача 2.2.

$$y' - 9x^2 y = (x^5 + x^2) y^{\frac{2}{3}}$$

Решение:

Это уравнение Бернулли. Сделаем замену $z = y^{1-\alpha}$. В данном случае $z = y^{1-\frac{2}{e}}$ или $z^{\frac{1}{1-\frac{2}{3}}} = y$, $z^3 = y$

Обозначу ущербную константу в степени за c

$$\left(z^3\right)' - 9x^2 z^3 = (x^5 + x^2) z^2$$

$$z' 3z^2 - 9x^2 z^3 = (x^5 + x^2) z^2$$

$$z' = 9x^2 z + (x^5 + x^2)$$

Получили линейное, а что делать с ним уже понятно

4.3. Уравнение Риккати

Задача 3.1.

$$y' + 2e^x y - y^2 = e^{2x} + e^x$$

Решение:

$y = e^x$ - решение

$y = z + \varphi$, где φ частное решение, в данном случае e^x.

$$z' + e^x + 2e^{2x} + 2e^x z - (z + e^x)^2 = e^{2x} + e^x$$

$$z' + 2e^x z - z^2 - 2ze^x = 0$$

$$z' = z^2$$

Дорешивается

Задача 3.1.
Пусть y - решение уравнения

$$x^2y' = x^2y^2 + 3xy + 3$$

Решение:

Похоже решение должно иметь вид $y = \frac{a}{x}$. Попробуем его найти

$$x^2\frac{-a}{x^2} = a^2 + 3a + 3$$

$$a^2 + 4a + 3 = 0$$

Откуда находим a и соответственно находим решение. Дальше мне честно лень делать

5. Практика 5.

5.1. Методы понижения порядка

Задача 1.1. Уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$.

1. $y'' = x + \cos x$
2. $y'' = e^x + \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}$

Решение:

Тут надо в обоих случать 2 раза взять интеграл, не знаю, что здесь еще делать

Задача 1.2. Уравнения без искомой функции.

1. $y'' + \frac{1}{x}y' = 0, x > 9$
2. $xy^{(3)} + y'' = 1 + x, y(1) = 1, y'(1) = \frac{5}{4}, y''(1) = \frac{3}{2}$
3. $xy'' - y' = e^x x^2, y(1) = 1, y'(1) = 1 + e$

Решение:

1. Сделаем замену $z = y'$. Получу:

$$z' + \frac{z}{x} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -\frac{z}{x}$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{z} = -\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Дорешивается

2. Сделаем замену $z = y''$

$$xz' + z = 1 + x$$

$$z' = -\frac{z}{x} + \frac{1}{x} + 1$$

Это линейное уравнение. Найдя его решение, подставим его вместо x и получим ответ. Тадам

3. $xz' - z = e^x x^2$

Очевидно дорешивается, так как линейное

Задача 1.3. Уравнения без независимой переменной.

1. $y'' + yy' = 0, y(0) = 2, y'(0) = -2$
2. $y''y^3 + 1 = 0, y(1) = -1, y'(1) = -1$
3. $y'' + (2 + 4y^2)y'^3 - 2yy'^2 = 0, y(0) = 1, y'(0) = \frac{1}{2}$

Решение:

1. Надо сделать подстановку $z(y) = y', y = t$

$$(z(y))' + tz = 0$$

$$z'z + tz = 0$$

$$z' + t = 0 \text{ или } z = 0$$

$$\mathrm{d}z = -t\,\mathrm{d}t$$

$$z = -\frac{t^2}{2} + C$$

$$y' = -\frac{y^2}{2} + C$$

что является уже уравнением с разделяющимися переменными

2. $z(y) = y'$

$$z' z t^3 + 1 = 0$$

$$z \, \mathrm{d}z = -\frac{1}{t^3} \, \mathrm{d}t$$

Я верю, что вы умеете дорешивать разделяющиеся 2 раза.

3. Аналогично

Задача 1.4. Уравнение, однородное относительно искомой функции и её производных.

1. $xyy'' - xy'^2 - yy' = 0, y(0) = 1, y(2) = e^{16}$
2. $x^2 yy'' = (y - xy')^2, y(1) = e^3, y(3) = 3e$
3. $yy'' + yy' \operatorname{tg} x = (1 - \sin x)(y')^2, y(0) = 1, y'(0) = -2$

Решение:

1. $z = \frac{y'}{y}, y' = yz, y'' = z'y + z^2 y$

$$xy(z'y + z^2 y) - x(yz)^2 - yyz = 0$$

$$xz'y^2 + xz^2y^2 - xz^2y^2 - y^2 z = 0$$

$$xz' - z = 0$$

А это уже уравнение с разделяющимися переменными, а такое мы решать умеем.

2 и 3 аналогично.

Задача 1.5. Уравнение в точных производных.

1. $y'' \sin y + y'^2 \cos y = 1, y(1) = \frac{\pi}{6}, y'(1) = 2$
2. $y'' \operatorname{tg} y + \frac{y'^2}{\cos^2 y} = 0, y(0) = \frac{\pi}{4}, y'(0) = 1$
3. $yy'' = y'^2$

Решение:

1. Заметим, что слева у нас производная:

$$(y' + \sin y)' = 1$$

$$y' + \sin y = x$$

А такое мы решать умеем.

2. Заметим, что слева у нас производная

$$(y' \operatorname{tg} y)' = 0$$

$$y' \operatorname{tg} y = 1$$

А такое мы решать умеем.

3. Заметим, что это почти $\left(\frac{y'}{y}\right)'$. Тадам

6. Практика 6

6.1. Методы понижения порядка

Задача 1.1.

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = x + y \end{cases}$$

Решение

$$x'(t) = x(t) \Leftrightarrow x = Ce^t$$

Подставим во второе и решим линейное уравнение:

$$y'(t) = Ce^t + y(t)$$

$$y(t) = (Ct + C_1)e^t$$

Задача 1.2.

$$\begin{cases} x' = \frac{2t}{1+t^2} x \\ y' = -\frac{1}{t} y + x + t \end{cases}$$

Решение

Первое уравнение это уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$x = Ce^{\int p} = C(1+t^2)$$

Подставим во второе и получим что=то понятное

6.2. Метод исключения

Определение. Метод исключения

Метод исключения состоит в сведении системы к одному или нескольким уравнениям высших порядков, содержащих только одну неизвестную функцию. Это достигается путём последовательно дифференцирования одного или нескольких уравнений системы, а затем исключения всех неизвестных функций, кроме одной.

Рассмотрим схему метода на примеры системы второго порядка.

$$\begin{cases} x' = f(t, x, y) \\ y' = g(t, x, y) \end{cases}$$

Дифференцируя первое уравнение по переменной t, имеем

$$x'' = f'_t + f'_x x' + f'_{y'} y'$$

Используя уравнения системы, заменим производные x', y':

$$x'' = f'(t) + f'_x f + f'_y g = \alpha(t, x, y)$$

Выразим y из первого уравнения и получим:

$$y = \beta(t, x, x')$$

Подставим и тем самым исключим y из уравнения

Задача 2.1.

$$\begin{cases} x' = 2y - 2x \\ y' = 3y - 3x \end{cases}$$

$x(0) = 0, y(0) = 1$

Решение

Действуем по алгоритму. Возьмем производную по x

$$x'' = 2y' - 2x'$$

Заменим:

$$x'' = 2(3y - 3x) - 2(2y - 2x) = 2y - 2x$$

Возьмем выразим y в первом уравнении:

$$y = \frac{x' + 2x}{2}$$

Подставим:

$$x'' = x' + 2x - 2x$$

$$x'' = x'$$

Возьму интеграл:

$$x' = x + C$$

Сделаем замену $z = x + C$ и решим уравнение:

$$x + C_1 = Ce^t$$

Подставим $x = 0$ получим $C = -C_1$. Дальше уже подстановкой найдем y. (в угоду моего времени это писаться не будет)

Задача 2.1.

$$\begin{cases} x' = 1 - \frac{1}{y} \\ y' = \frac{1}{x-t} \end{cases}$$

$x(0) = -1, y(0) = 1$

Решение

Действуем по алгоритму. Возьмем производную по x:

$$x'' = \frac{y'}{y^2}$$

$$x'' = \frac{1}{x - t} \cdot \frac{1}{y^2}$$

Выразим y:

$$y = \frac{1}{x' - 1}$$

Подставим

$$x'' = \frac{1}{x - 1} \cdot (x' - 1)^2$$

$$x''(x - 1) = (x' - 1)^2$$

$$\left(\frac{x' - 1}{x - 1}\right)' = 0$$

$$x' - 1 = C(x - 1)$$

Я верю, что это дорешивается

7. Практика 7

7.1. Теорема существования и единственности

Задача 1.1.
Указать какой-либо промежуток, на котором существует решение задачи:
1. $x' = x^2 + t^2, x(0) = 0, |t| \le 1, |x| \le 1$
2. $x' = t + \sin(t^2 + x), x(0) = 0, |t| \le 1$
3. $x' = |t| + \sin x^2 + \cos x^2, x(0) = 0$

Решение

Чтобы проверить это, мы хотим воспользоваться теоремой пикара.

Для того, чтобы пользоваться теоремой Пикара, мы хотим проверить Условие Липщица на области G и непрерывность. Чтобы проверить, что выполнено условие Липщица, мы хотим проверить, что частная производная по всем переменным, кроме времени непрерывна.

1. Заметим, что для пункта 1. Очевидно выполнены условия Теоремы Пикара. Теорема Пикара гласит, что существует решение на отрезке $[-h, h]$, где $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$, где M - максимум функции. Попробуем максимизировать, почти очевидно $h = \frac{1}{2}$, откуда есть решение на $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$
2. Аналогичные рассуждения приводят нас к существованию решения на $[-1, 1]$.
3. Аналогично $(-\infty, \infty)$

Задача 1.2.
Найти области на плоскости в $\mathbb{R}^2_{tx}$, в каждой точке которых теорема Пикара гарантирует существование и единственность решения:
1. $x' = 2 + \sqrt[3]{x - 2t}$
2. $(t-2)x' = \sqrt{x} - t$
3. $(x - t)x' = x \ln t$

Решение:

По-хорошему надо для каждой точки проверять условие Липшица честно, но мы обойдемся не существованием частной производной в какой-либо точке.

Чтобы решить это задание просто возьмем частные производные и посмотрим где они существуют
1. $x \ne 2t$
2. $t \ne 2, x > 0$
3. $t > 0, x \ne t$

Задача 1.3.
При каких начальных условиях теорема Пикара гарантирует существование и единственность решения задачи Коши для

1. $y'' - yy''' = \sqrt[5]{y' - x}$
2. $x' = y^2 + \sqrt[3]{t}, y' = \sqrt[3]{x}$.

Решение

1. Пользуемся следствием и должны показать непрерывность для производной по y, y', y''

Ответ: $x_0 \ne y_{0'}$

2. Нужно взять опять производные и получить: $x_0 \ne 0$

Строить приближения Пикара в оставшихся задачах я не буду, это скучно

8. Практика 9

8.1. Линейные однородные уравнения больших степеней

$\sum\limits_{i=0}^{n} a_i y^{(i)} = b(t), a_n = 1$ - линейное уравнение n-ого порядка.

если $b(t) = 0$, то оно однородное.

Как решать однородное: $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0$ - характеристический многочлен, корни - характеристические числа. Для каждого характеристического числа сопоставим $e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_0 t}, \ldots, t^{m-1}e^{\lambda_0 t}$ - линейно-независимые решения линейно однородного уравнения, где m - кратные корни.

Задача 1.1.

$$y^{(3)} + 6y^{(2)} - 32y = 0$$

Решение

$p(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 5$. Найдем, когда $p(\lambda) = 0$, $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -4, \lambda_3 = -4$

Тогда общим решением будет:

$y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-4t} + C_3 t e^{-4t}$

Задача 1.2.

$$4y'' - 8y' + 5y = 0$$

Построить вещественную ФСР

Решение

Характеристическое уравнение: $4\lambda^2 - 8\lambda + 5 = 0$

Дискриминант: $D = (-8)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5 = -16$

Корни: $\lambda_{1,2} = \frac{8 \pm 4i}{8} = 1 \pm 0.5i$

Вещественная ФСР: $e^t \cos(0.5t), \quad e^t \sin(0.5t)$

Она выводится разложением $e^{(1+0.5i)t}$ через формулу синусов и коснусов

Задача 1.3.

$$3y'' + 12y' + 13y = 0$$

Построить вещественную ФСР

Решение

Характеристическое уравнение: $3\lambda^2 + 12\lambda + 13 = 0$

Дискриминант: $D = 144 - 4 \cdot 3 \cdot 13 = -12$

Корни: $\lambda_{1,2} = \frac{-12 \pm 2\sqrt{3}i}{6} = -2 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}i$

Вещественная ФСР: $e^{-2t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}t\right), \quad e^{-2t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{3}t\right)$

8.2. Линейные неоднородные уравнения больших степеней

У неородных:

$$\text{Общее решение } = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k + \psi$$

где ψ - частное решение ЛНУ, а φ_k - ФСР ЛОУ

Если $b(t) = e^{\gamma t} p_{k(t)}$, то существует $\psi : t^m e^{\gamma t} q_{k(t)}$, где m - кратность хар. числа γ

Задача 2.1.

$$2y'' - 11y' - 6y = -48t^2 - 170t + 43$$

Решение

1. Решим однородное уравнение: $2y'' - 11y' - 6y = 0$ Характеристическое уравнение: $2\lambda^2 - 11\lambda - 6 = 0$ Корни: $\lambda_1 = 6, \quad \lambda_2 = -0.5$ ФСР: $e^{6t}, \quad e^{-0.5t}$

    2. Правая часть имеет вид $e^{\gamma t} p_2(t)$, где $\gamma = 0$, $p_2(t)$ — многочлен 2-й степени. Так как $\gamma = 0$ не является корнем характеристического уравнения, частное решение ищем в виде: $\psi = At^2 + Bt + C$

       Подставляем в уравнение: $\psi' = 2At + B$ $\psi'' = 2A$ $2(2A) - 11(2At + B) - 6(At^2 + Bt + C) = -48t^2 - 170t + 43$

       Приводим подобные: $-6At^2 + (-22A - 6B)t + (4A - 11B - 6C) = -48t^2 - 170t + 43$

       Решаем систему:

       $$\begin{cases} -6A = -48 \\ -22A - 6B = -170 \\ 4A - 11B - 6C = 43 \end{cases}$$

       Получаем: $A = 8, \quad B = -1, \quad C = 0$

    3. Общее решение: $y = C_1 e^{6t} + C_2 e^{-0.5t} + 8t^2 - t$

9. Практика 10.

9.1. Принцип декомпозиции

$\begin{cases}\text{Если } y_1 \text{ решение } Ly=\varphi_1 \\ \text{Если } y_2 \text{ решение } Ly=\varphi_2\end{cases}$, то $y_1 + y_2$ решение $Ly = \varphi_1 + \varphi_2$

Задача 1.1.

$$y'' + y = 2e^t + 1$$

Решение

Сперва как обычно решим соответствующее однородное:

$$y'' + y = 0$$

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda = \pm i$$

Теперь найдем решение $y'' + y = 2e^t$, $\psi = e^t$

Теперь найдем решение: $y'' + y = 1$, $\psi = 1$

Откуда по принципу декомпозиции ответом будет:

$y(y) = c_0 e^{it} + c_1 e^{-it} + e^t + 1$

9.2. Метод комплексной амплитуды

1. $Ly = a(t)$, где L состоит из $\mathbb{R}$ коэффициентов
2. Возьмем $f : f(t) = a(t) + ib(t)$ или $f(t) = ia(t) + b(t)$
3. Решим $Ly = f(t)$, пусть φ - решение.
4. $\operatorname{Re}(\varphi)$ или $\operatorname{Im}(\varphi)$ - решение $a(t)$

Задача 2.1.

$$2y'' - y' - 6y = 42\sin(3x) - 336\cos(x)$$

Решение

Здесь мы опять решаем однородное и получаем 2 корня.

Дальше заметим, что $42\sin(3x) = \operatorname{Im}(42e^{i3x})$, а так же, что $-336\cos x = \operatorname{Re}\left(-336e^{ix}\right)$

Пользуясь методом комплексной амплитуды и принципом декомпозиции получаем ответ.

9.3. Метод вариации постоянных

Общее решение $Ly = q(t)$ имеет вид $y = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k(t)\psi_k(t)$, где $\{c_k\}_{k=1}^n$ - решение системы $[\Lambda\psi_1, ..., \Lambda\psi_n] \cdot [c_1' ... c_n'] = [0, 0, ..., q(t)]$

$\Lambda y = [y, y', ..., y^{n-1}]^T$

Задача 3.1.

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{t}$$

Решение

Как обычно решаем, сначала однородное.

$y'' - 2y' + y = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$ - кратный

$\psi_1 = e^t, \psi_2 = te^t$. Откуда

$$\begin{bmatrix} e^t & te^t \\ e^t & e^t + te^t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1' \\ C_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{e^t}{t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & t \\ 1 & 1+t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{t} \end{bmatrix}$$

Откуда получаем, что $c_1' = \frac{1}{t}, c_2' = -1 \Rightarrow c_2 = \ln(t) + A, c_1 = -x + B$

Итого: $y(t) = (-t + B)e^t + (\ln(t) + A)te^t$

10. Практика 11.

10.1. Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами

10.1.1. Решение матричным видом

Шаги решения:

1. Составляем характеристическое уравнение:

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

2. Находим собственные значения λ_1, λ_2.
3. Для каждого λ_i находим собственный вектор $(h)_i$ из системы:

$$(A - \lambda_i E)(h)_i = 0.$$

4. Общее решение:

$$(r) = C_1 e^{\lambda_1 t}(h)_1 + C_2 e^{\lambda_2 t}(h)_2$$

Если λ комплексные (например, $\lambda = \alpha \pm i\beta$), то решение выражается через вещественные функции:

$$(r) = e^{\alpha t} C_1 \operatorname{Re}\left((h)e^{i\beta t}\right) + C_2 \operatorname{Im}\left((h)e^{i\beta t}\right).$$

10.2. Линейные неоднородные системы

10.2.1. Метод исключения

Аналогично однородному случаю, но после сведения к одному уравнению ищется общее решение однородного и частное решение неоднородного (например, методом неопределённых коэффициентов). Затем восстанавливается вторая переменная.

Пример из задачи 7:

$$\begin{cases} x' = 4x - 3y + \sin t \\ y' = 2x - y - 2\cos t. \end{cases}$$

Дифференцируем первое уравнение, подставляем y' из второго, получаем:

$$x'' - 3x' + 2x = \sin t + 7\cos t.$$

Решаем, находим $x(t)$, затем из первого уравнения находим $y(t)$.

10.2.2. Метод вариации постоянных

Используется для систем с произвольной правой частью.

Алгоритм:

1. Находим общее решение однородной системы в матричной форме:

$$(r)_0 = \Phi(t)(C), \quad \Phi(t) \text{— фундаментальная матрица}$$

2. Решение неоднородной системы ищем в виде:

$$(r)(t) = \Phi(t)(C)(t).$$

3. Подставляем в исходную систему, получаем уравнение для $(C)'(t)$:

$$\Phi(t)(C)'(t) = (q)(t), \quad (q)(t) \text{— правая часть}$$

4. Интегрируем:

$$(C)(t) = \int \Phi^{-1}(t)(q)(t)\,\mathrm{d}t + (A).$$

5. Общее решение:

   $(r)(t) = \Phi(t)(C)(t).$

11. Информация о курсе

Поток — y2024.

Группы M3238-M3239.

Преподаватель — Бабушкин Максим Владимирович