Дифференциальные уравнения.

Чепелин Вячеслав

Содержание

1 Лекция 1.

1.1 Основные определения.

def: Пусть $f : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, **нормальное уравнение** :

$$y' = f(x, y)$$

def: **Область определения** нормального уравнения — область определения его правой части. Обозначение $dom = G$.

Примеры уравнений и соответствующих областей определения:

1. $y' = x\sqrt{y}$, $G = \mathbb{R} \times [0, +\infty)$
2. $y' = y, G = \mathbb{R}^2$
3. $y' = -\frac{1}{x^2}, G = \{(x, y) \in \mathbb{R} | x \neq 0\}$

def: Функция $\varphi : E \to \mathbb{R}$ - **решение** уравнения, если $E = \langle a, b \rangle$:

$$\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x))$$

Соглашение: На протяжении курса, будем считать, что $\forall$ предиката $P(x)$, который не определен при $x = x_0$, считаем, что $P(x_0) = 0$ - то есть ложно.

Замечание: Данное зам. помогает не требовать от φ дифференцируемости на всем E.

Следствие: Учитывая соглашение любое решение уравнение — дифференцируемая функция.

Следствие: Если f - непр. функция, то любое решение нормального уравнения непрерывно дифференцируемо.

Замечание: В нормальном уравнении символы x, y и y' - три различные независимые переменные. Пока не произведена подстановка функции, буква y никак не связана с x, а y' не олицетворяет производную.

def: **Интегральная кривая** уравнения — график его решения.

def: **Общее решение** уравнения — множество всех его решений.

def: **Общим интегралом** уравнения будем называть соотношение вида:

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

которое неявно задает некоторые уравнения при некоторых значениях вещественного параметра C.

Замечание: Общий интеграл не всегда описывает все решения уравнения.

1.2 Уравнение в дифференциалах.

def: Пусть $P, Q : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, **уравнение в дифференциалах**:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

Замечание: Переменные x, y входят равноправно, поэтому его решением называется не только функция $y = \varphi(x)$, но и $x = \psi(y)$

def: Точка $(x_0, y_0) \in G$ называется **особой точкой** уравнения, если $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$

def: Пусть $T = \langle a, b\rangle$, вектор-функции $(u, v) \in \mathbb{C}^1(T \to \mathbb{R}^2)$ — **параметрические** решение уравнения, если:

1. $(u'(t), v'(t)) \neq (0, 0)$ для всех $t \in T$
2. $P(u(t), v(t))u'(t) + Q(u(t), v(t))v'(t) \equiv 0$ на T

def: **Интегральной кривой** уравнения называют годограф (множество значений) ее параметрического уравнения.

Утверждение: (Связь между обычными и параметрическими решениями).

Пусть $P, Q \in C(G)$, множество G не содержит особых точек уравнения, тогда:

1. Если $y = \varphi(x)$ — решение уравнения на E, то $r(t) = (t, \varphi(t))$ - параметрическое решение уравнения на E.
2. Если $r = (u, v)$ — параметрическое решение уравнения на T, то для любого $t_0 \in T$, найдется окрестность $U(t_0)$, такая что функции $u(t)$ и $v(t)$ при $t \in U(t_0) \cap T$ параметрически задают решение уравнения.

def: Два дифференциальных уравнения **эквивалентны** (или **равносильны**) на множестве G, если они имеют одинаковое семейство интегральных кривых на множестве G.

Теорема. Пусть $f \in C(G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})$. Тогда уравнение:

$$y' = f(x, y)$$

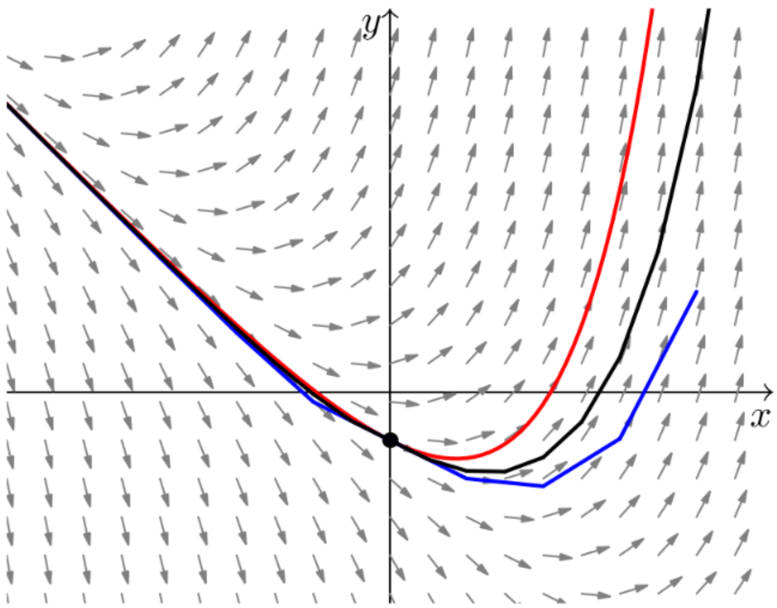
эквивалентно на множестве G уравнению:

$$dy = f(x, y)dx$$

2 Лекция 2.

2.1 Геом. смысл дифференциальных уравнений

def: Если каждой точке (x, y) области определения функции f сопоставить вектор, направленный под углом $\arctan f(x, y)$, то получится **поле направлений** $f(x, y)$.



Рассмотрим один способ построить приближение к интегральной кривой. Взяв некоторую точку (x_0, y_0) в качестве начальной, будем двигаться по направлению поля в точке (x_0, y_0) до точки с абсциссой $x_1 = x_0 + h$, ординату которой обозначим через y_1. Сделаем то же самое, что много много раз и получим **ломаную Эйлера**.

def: **Изоклиной** I_k уравнения называют множество уровня функции f:

$$I_k = \{(x, y) \in domf | f(x, y) = k\}$$

TODO: метод изоклин

2.2 Уравнение в полных дифференциалах.

def: Уравнение

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

называют **уравнением в полных дифференциалах** в области G, если для него существует **потенциал**, то есть такая дифференцируемая функция u, что для всех $x, y \in G$:

$$du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

Теорема (общее решение УПД)

Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ — область, функция $u : G \to \mathbb{R}$ дифференцируема, $u'_x = P, u'_y = Q$. Тогда функция $y = \varphi(x)$ - решение уравнения УПД на промежутке E, если и только если она дифференцируема на E и при некотором $C \in \mathbb{R}$ неявно задана уравнением:

$$u(x, y) = C$$

Доказательство:

Достаточность. Дифференцируя равенство $u(x, \varphi(x)) = C$ по переменной $x \in E$, находим:

$$u'_x(x, \varphi(x)) + u'_y(x, \varphi(x))\varphi'_x \equiv 0$$

Так как $u'_x = P, u'_y = Q$, то определению функция φ является решением

Необходимость. На промежутке E верно тождество

$$P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\varphi'(x) \equiv 0$$

Левая часть этого равенства совпадает с производной функции u по переменной x.

Q.E.D.

def: Уравнение

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0$$

называют **уравнение с разделенными переменными.**

Следствие (общее решение УРП):

Пусть $P \in C(a, b), Q \in C(c, d)$. Тогда функция $y = \varphi(x)$ — решение уравнения на промежутке E, если и только если она дифференцируема на E и при некотором $C \in \mathbb{R}$ и при некотором $C \in \mathbb{R}$ неявно задана уравнением:

$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C$$

Доказательство: подставим и проверим.

Утверждение (необходимое условие УПД).

Пусть потенциал $u \in C^2(G)$. Тогда:

$$P'_y = Q'_x$$

Теорема (признак УПД)

Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ — односвязная область $P, Q \in C^1(G), P'_y = Q'_x, (x_0, y_0) \in G$. Тогда уравнение в полных дифференциалах в области в G с потенциалом:

$$u(\overline{x}, \overline{y}) = \int\limits_{\gamma(\overline{x}, \overline{y}))} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

3 Лекция 3.

3.1 Интегрирующий множитель.

def: Функция $u : G \to \mathbb{R}$ называются **интегрирующим множителем** уравнения $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ в области G, если $\mu(x, y) \neq 0$ для любой точки $(x, y) \in G$ и уравнение

$$\mu(x, y)P(x, y)dx + \mu(x, y)Q(x, y)dy = 0$$

является уравнением в полных дифференциалах.

Замечание: мы хотим получить УПД и чтобы его получить, мы хотим, чтобы $P'_y = Q'_x$, для этого добавляем множитель μ.

def: Пусть $p_2(x) \neq 0$ при $x \in (a, b), q_1(y) \neq 0$ при $y \in (c, d)$. Тогда функция

$$\mu(x, y) = \frac{1}{p_2(x)q_1(y)}$$

является интегрирующем множителем для уравнения:

$$p_1(x)q_1(y)dx + p_2(x)q_2(y)dy = 0$$

Такое уравнение называются уравнением с **разделяющимися переменными**.

Условие для интегрирующего множества: Пусть $P, Q \in C^1(G)$. Определим условия для интегрирующего множителя из $\mathbb{C}^1(G)$. Необходимо:

$$\mu'_y P - \mu'_x Q = (Q'_x - P'_y)\mu$$

3.2 Линейное уравнение.

def: Дифференциальное уравнение:

$$y' = p(x)y + q(x)$$

называется **линейным уравнением** первого порядка.

def: Линейное уравнение называется **однородным**, если $q = 0$, иначе уравнение называется **неоднородным**.

Приведение линейного уравнения 1 порядка к УПД:

$$y' = p(x)y + q(x)$$

Заменим y' на $\dfrac{dy}{dx}$:

$$(py + q)dx - dy = 0$$

Условие $P'_y = Q'_x$ здесь не выполнено. Посмотрим на условие для интегрирующего множества. Оно принимает вид:

$$\mu'_y(pu + q) + \mu'_x = -p\mu$$

Попробуем найти интегрирующий множитель, зависящий только от переменной x. В этом случае получим:

$$\mu' = -p\mu$$

Одно из его решений:

$$\mu = e^{-\int p}$$

Откуда мы можем решать его, как уравнение в дифференциалах

3.3 Уравнение с разделяющимися переменными.

$$p_1(x)q_1(y)dx + p_2(x)q_2(y)dy = 0$$

Проблема в том, что умножая на интегрирующий множитель $\dfrac{1}{q_1(y)p_2(x)}$ возможно лишь в области, где знаменатель не обращается в ноль. Случай $q_1(y) = 0$ и $p_2(x) = 0$ требуют особого рассмотрения.

Разбив всю область поиска интегральных кривых на необходимое количество частей, нужно рассмотреть исходное уравнение на каждой части отдельно. На каждой такой подобласти его можно разделить на $q_1(y)p_2(x)$ не опасаясь.

Остается изучить поведение найденных интегральных кривых вблизи границы и мы победим.

3.4 Линейное уравнение первого порядка

Теорема (общее решение ЛУ 1-го порядка)

Пусть $E = \langle a, b\rangle, p, q \in C(E), \mu = e^{-\int p}$. Тогда общее решение имеет вид:

$$y = \frac{C + \int q\mu}{\mu}, C \in \mathbb{R}$$

Доказательство:

После приведения к УПД, получаем:

$$y'e^{-\int p} - pye^{-\int p} = qe^{-\int p}$$

Левая часть - производная y и $e^{-\int p}$. Получаем:

$$(ye^{-\int p})' = qe^{-\int p}$$

Следовательно:

$$ye^{-\int p} = C + \int qe^{-\int p}$$

Q.E.D.

Следствие (Общее решение ЛОУ первого порядка):

Пусть $E = \langle a, b\rangle$, $p \in C(E)$. Тогда уравнение

$$y' = p(x)y$$

имеет вид:

$$y = Ce^{\int p}, C \in \mathbb{R}, x \in E$$

Метод Лагранжа.

1. Решим вспомогательное уравнение $y' = p(x)y$
2. Заменим в решении C на $C(x)$
3. Подставим полученное φ в исходное уравнение и найдем $C(x)$
4. Победа!

4 Лекция 4.

4.1 Замена переменных дифференциальном уравнения.

$x = p(u, v), y = q(u, v)$

Цель такой замены — упростить и свести к известному виду.

Дифференциалы прежних переменных преобразуются по формулам:

$$dx = p'_u du + p'_v dv \quad dy = q'_u du + q'_v dv$$

Теорема (замена переменных в ДУ)

Пусть G - область в $\mathbb{R}^2_{x,y}$. $\Phi : G \subset \mathbb{R}^2_{x,y} \to \mathbb{R}^2_{u,v}$ — диффеоморфизм, $F : G \to \mathbb{R}^2$.

$$H = (F \circ \Phi^{-1})(\Phi^{-1})'$$

Тогда отображение Φ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между интегральными кривыми уравнений:

$$F(r)dr = 0, r \in G$$

$$H(s)ds = 0, s \in \Phi(G)$$

Замечание: Это имеет такой смысл: у вас есть диффеоморфизм между двумя областями — ваша функция замены переменных из $\Phi : x, y \to u, v$ мы берем обратную и производную и выигрываем

4.2 Однородное уравнение

def: Функция $F(x.y)$ называется **однородной функцией** степени α, если при всех допустимых t, x, y верно равенство:

$$F(tx, ty) = t^\alpha F(x, y)$$

def: Пусть P, Q — однородные функции одинаковой степени. Тогда уравнение вида:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

называется **однородным уравнением**.

Давайте сведем однородно уравнение к уравнением с разделяющимися переменными.

1. Сделаем замену $x = u, y = uv$

   Замечание: поскольку переменные u и x совпадают, то переменную u обычно не вводят, а полагают:

   $$y = xv$$

   При этом $dy = vdx + xdv$

2. Подставим замену и получим:

$$P(x, xv)dx + Q(x, xv)(vdx + xdv) = 0$$

$$x^\alpha P(1, v)dx + x^\alpha Q(1, v)(vdx + xdv) = 0$$

$$(P(1, v) + Q(1, v)v)dx + Q(1, v)xdv = 0$$

Уравнения, сводящиеся к однородному

Уравнения в нормальной форме:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

сводится к однородному при переходе к дифференциалам.

Более общее уравнение

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

сводится к однородному, если сдвинуть систему координат в точку пересечения прямых $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$. То есть если сделать замену:

$$x = x_0 + u, \quad y = y_0 + v$$

Геом. свойство однородного уравнения — гомотетия относительно начала координат любую интегральную кривую однородного уравнения переводит в другую его интегральную кривую.

4.3 Уравнение Бернулли

<u>def:</u> Уравнением Бернулли называют уравнение вида:

$$y' = p(x)y = +q(x)y^\alpha$$

где $a \notin \{0, 1\}, a \in \mathbb{R}$

Давайте научимся его решать:

Возьмем $z = y^{1-\alpha}$

Тогда $z' = (1 - \alpha)y^{-\alpha}y'$, откуда

$$y^{-\alpha}y' = \frac{z'}{1 - \alpha}$$

Поделим левую часть исходного уравнения на y^α, подставляя $z = y^{1-\alpha}$, а также умножая обе части на $(1 - \alpha)$ получим:

$$z' = (1 - \alpha)p(x)z + (1 - \alpha)q(x)$$

Таким образом замена $z = y^{1-\alpha}$ сводит уравнение Бернулли к линейному, а его мы уже умеем решать

Уравнение Риккати

def: Уравнением Риккати называют уравнение вида:

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$$

Чтобы такое решить, надо решить правое уравнение относительное y и сделать подстановку $y = z + \varphi$. Так оно сведется к уравнению Бернулли и победится.

Теорема (Луивилль)

Уравнение

$$y' = y^2 + x^\alpha$$

интегрируется в квадратурах, если и только если $\alpha/(2\alpha + 4) \in \mathbb{Z}$ или $\alpha = -2$

5 Лекция 5.

5.1 Уравнение высшего порядка.

def: **Дифференциальным уравнением n-го порядка** называют уравнение вида

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

def: Функция $\varphi : E \to \mathbb{R}$ - **решение уравнения**, если $E = \langle a, b \rangle$ и

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0 \text{ на } E.$$

def: **Каноничным уравнением** будем называть уравнение

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

разрешенное относительно старшей производной.

def: **Задачей Коши** для канонического уравнения называют задачу нахождения его решения, удовлетворяющего начальным условиям:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

Замечание: в данном случае стоит воспринимать $y_0^{(i)}$ как значение, а не как производную от числа.

5.2 Методы понижения порядка

1. **Уравнения вида** $y^{(n)} = f(x)$

   Хм хм, что же делать? Возьмем n раз интеграл - победили.

2. **Уравнение без искомой функции:** Пусть у нас есть уравнение:

   $$F(x, y'^{(k)}, \dots y^{(n)}) = 0$$

   Тогда стоит сделать замену $z(x) = y^{(k)}$

3. **Уравнение без независимой переменной**

   Пусть у нас есть уравнение:
   $$F(y, y', y'', \dots y^{(n)}) = 0$$
   Сделаем подстановку:
   $$y'(x) = z(y(x))$$

4. **Уравнение, однородное относительно искомой функции и ее производных**

   Пусть при любом допустимом значении t:

   $$F(x, ty, ty', \dots, ty^{(n)}) = t^m F(x, y, y', \dots, y^{(n})$$

   Тогда порядок уравнения понижается при помощи замену $z = \dfrac{y'}{y}$

5. **Уравнение в точных производных**

   Если наша функция это производная какой-то другой по переменной x, то есть:

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = \frac{d}{dx}\Phi(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

   то мы можем понизить порядок на 1 вниз решая:

$$\Phi(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) = C$$

5.3 Нормальная система

<u>**def:**</u> **Нормальной системой** дифференциальных уравнений порядка n называется система вида

$$\begin{cases} r_1' = f_1(t, r_1, \dots, r_n) \\ \dots \\ r_n' = f_n(t, r_1, \dots, r_n) \end{cases}$$

Если положить

$$r = \begin{pmatrix} r_1 \\ \dots \\ r_n \end{pmatrix}, f(t, r) = \begin{pmatrix} f_1(t, r) \\ \dots \\ f_n(t, r) \end{pmatrix},$$

то система компактно в виде одного n-мерного уравнения

$$r' = f(t, r).$$

<u>**def:**</u> Вектор-функция $\varphi : E \to \mathbb{R}^n$ - **решение системы**, если $E = \langle a, b\rangle$ и $\varphi'(t) \equiv f(t, \varphi(t))$ на E.

<u>**def:**</u> **Интегральной кривой** системы называют график, соответствующий ее решению (что не удивительно)

В отличие от одномерного случая, интегральная кривая - это график вектор-функции, расположенный в (n+1)-мерном пространстве.

<u>**def:**</u> **Задачей Коши** называется аналогичная уравнению высшему порядку конструкция

<u>**def:**</u> Зададим отображение Λ_n формулой:

$$\Lambda_n\varphi = (\varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(n-1)})^T$$

Индекс n будет иногда опускаться.

<u>**Лемма. (о системе равносильной уравнению)**</u>

Отображение Λ_n - биекция между решениями уравнения

$$y^{(n)} = f(t, y, \dots, y^{(n-1)})$$

и решениями системы:

$$r' = \begin{vmatrix} r_2 \\ r_3 \\ \dots \\ r_n \\ f(t,r) \end{vmatrix}$$

Замечание: Это лемма очевидна из того, что мы просто сопоставляем каждой производной отдельную функцию и пишем уравнение для этой производной по типу $(y')' = y'' \Leftrightarrow r_1' = r_2$

def: Такую систему будем называть **системой равносильной уравнению**.

6 Лекция 6.

6.1 Вспомогательные (Помогите) следствия

Замечание: Через r_i обозначаем компоненты вектора $r \in \mathbb{R}^n$. Векторы из $\mathbb{R}^n$ нумеруются верхними индексами. Через A_i обозначаем строки, A^j - столбцы, A_i^j - компоненты матрицы A.

def: Пусть $r \in \mathbb{R}^n$. Тогда $|r| := \max\limits_{i \in [1:n]} |r_i|$.

def: Пусть $A \in \mathrm{Mat}_{n \times m}(\mathbb{R})$. Тогда $|A| := \max\limits_{i \in [1:n], j \in [1:m]} |A_i^j|$.

Лемма.

Пусть $f \in C([a,b] \to \mathbb{R}^n)$. Тогда

$$\left| \int_a^b f(\tau) d\tau \right| \leq \int_a^b |f(\tau)| d\tau.$$

Доказательство.

Принимая во внимание определение нормы, имеем:

$$\left| \int_a^b f(\tau) d\tau \right| = \max_i \left| \int_a^b f_i(\tau) d\tau \right| \leq \max_i \int_a^b |f_i(\tau)| d\tau \leq \max_i \int_a^b \max_j |f_j(\tau)| d\tau = \max_i \int_a^b |f(\tau)| d\tau =$$

$$= \int_a^b |f(\tau)| d\tau.$$

Q.E.D.

Лемма.

Пусть $A \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathrm{Mat}_{n \times l}(\mathbb{R})$. Тогда

$$|AB| \leq n|A||B|.$$

Доказательство.

Пусть $AB = C$. Тогда

$$|C_i^j| = \left| \sum_{k=1}^n A_i^k B_k^j \right| \leq \sum_{k=1}^n \left| A_i^k B_k^j \right| \leq \sum_{k=1}^n |A||B| = n|A||B|.$$

Q.E.D.

def: Функция $f : G \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет **условию Липшица** на множестве G, если найдется $L \in \mathbb{R}$ (**константа Липшица**), такое что для любых точек $x^1, x^2 \in G$ выполнено

$$|f(x^2) - f(x^1)| \leq L|x^2 - x^1|.$$

Обозначение: $f \in \mathrm{Lip}\ G$.

def: Функция $f : G \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет **условию Липшица локально** на множестве G, если для любой точки $x \in G$ можно указать её окрестность $U(x)$, такую что $f \in \mathrm{Lip}(U(x) \cap G)$. Обозначение: $f \in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}} G$.

Пример. Если $f \in C^1[a, b]$, то $f \in \mathrm{Lip}[a, b]$. Обратное неверно.

def: Функция $f : G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,r} \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет **условию Липшица по** r (равномерно по t) на множестве G, если найдётся $L \in \mathbb{R}$, такое что для любых точек (t, r^1), $(t, r^2) \in G$ справедливо неравенство

$$|f(t, r^2) - f(t, r^1)| \leq L|r^2 - r^1|.$$

Обозначение: $f \in \mathrm{Lip}_r G$.

def: Функция $f : G \subset \mathbb{R}^{n+1}_t \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет **условию Липшица по r локально** на множестве G, если для любой точки $x \in G$ можно указать её окрестность $U(x)$, такую что $f \in \mathrm{Lip}_r(U(x) \cap G)$. Обозначение: $f \in \mathrm{Lip}_{r,\mathrm{loc}} G$.

Лемма (достаточное условие локальной липшицевости).

Пусть $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,r}$ - область, $f \in C(G \to \mathbb{R}^n)$, $f'_r \in \mathrm{Mat}_n(C(G))$. Тогда $f \in \mathrm{Lip}_{r,\mathrm{loc}} G$.

Доказательство.

Возьмём произвольную точку из области G и построим открытый шар $B \subset G$ с центром в этой точке. Пусть (t, r^1), $(t, r^2) \in B$. В силу выпуклости шара B будет $(t, r^1 + s(r^2 - r^1)) \in B$ при $s \in [0, 1]$. Положим

$$g(s) = f(t, r^1 + s(r^2 - r^1)).$$

Тогда

$$f(t, r^2) - f(t, r^1) = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(s)ds = \int_0^1 f'_r \cdot r'_s ds = \int_0^1 f'_r(t, r^1 + s(r^2 - r^1)) \cdot (r^2 - r^1)ds.$$

Принимая во внимание леммы, получаем

$$|f(t, r^2) - f(t, r^1)| \leq \int_0^1 n|f'_r(t, r^1 + s(r^2 - r^1))|\,|r^2 - r^1|ds \leq n \sup_{x \in \bar{B}} |f'_r(x)| \cdot |r^2 - r^1|.$$

Следовательно, $f \in \mathrm{Lip}_r B$. По определению будет $f \in \mathrm{Lip}_{r,\mathrm{loc}} G$.

Q.E.D.

Лемма (достаточное условие глобальной липшицевости).

Пусть область $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,r}$, $f \in C(G \to \mathbb{R}^n) \bigcap \mathrm{Lip}_{r,\mathrm{loc}}$, компакт $K \subset G$. Тогда $f \in \mathrm{Lip}_r K$.

Доказательство.

Докажем методом от противного. Пусть $f \notin \mathrm{Lip}_r K$. Тогда для любого $N \in \mathbb{N}$ найдётся пара точек (t_N, r^N), $(t_N, \tilde{r}^N) \in K$, для которых верно неравенство

$$|f(t_N, r^N) - f(t_N, \tilde{r}^N)| > N|r^N - \tilde{r}^N|.$$

Поскольку K - компакт, то из последовательности $\{(t_N, r^N)\}$ можно выбрать подпоследовательность с номерами $\{N_k\}$, сходящуюся к некоторой точке $(t, r) \in K$. Затем из последовательности $\{(t_{N_k}, \tilde{r}_{N_k})\}$ выберем подпоследовательность с номерами $\{N_{k_l}\}$, сходящуюся к $(t, \tilde{r})$. Пусть $\nu = \{N_{k_l} | l \in \mathbb{N}\}$.

Возможны два случая: $r = \tilde{r}$ и $r \neq \tilde{r}$. Рассмотрим сначала первый.

По условию $f \in \mathrm{Lip}_{r,\mathrm{loc}} G$, значит, найдётся окрестность U точки (t, r), в которой $f \in \mathrm{Lip}_r U$, то есть существует постоянная L, для которой

$$|f(\tau, \rho) - f(\tau, \tilde{\rho})| \leq L|\rho - \tilde{\rho}|$$

при любых (τ, ρ), $(\tau, \tilde{\rho}) \in U$. Выберем номер $N \in \nu$ так, чтобы $N > L$ и (t_N, r^N), $(t_N, \tilde{r}^N) \in U$, и положим $\tau = t_N$, $\rho = r^N$, $\tilde{\rho} = \tilde{r}^N$. Тогда из неравенства следует

$$|f(\tau, \rho) - f(\tau, \tilde{\rho})| > N|\rho - \tilde{\rho}| \geq L|\rho - \tilde{\rho}|,$$

что противоречит предыдущему неравенству.

Пусть теперь $r \neq \tilde{r}$. В неравенстве перейдём к пределу при $\nu \ni N \to \infty$. В силу непрерывности функции f получаем

$$|f(t, r) - f(t, \tilde{r})| \geq \infty,$$

что неверно.

Q.E.D.

<u>def:</u> Пусть $f : G \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$. Функция $\varphi : E \to \mathbb{R}^n$ - **<u>решение на E интегрального уравнения</u>**

$$r(t) = r^0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, r(\tau))d\tau,$$

если $E = \langle a, b \rangle$ и $\varphi(t) \equiv r^0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))d\tau$ на E, где интеграл понимается в смысле Римана.

<u>Лемма (о равносильном интегральном уравнении).</u>

Пусть $E = \langle a, b \rangle$, $t_0 \in E$, G - область в $\mathbb{R}^{n+1}$, $(t_0, r^0) \in G$, $f \in C(G \to \mathbb{R}^n)$. Тогда φ - решение на E задачи Коши

$$r' = f(t, r), \quad r(t_0) = r^0$$

если и только если φ - решение на E уравнения

$$r(t) = r^0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, r(\tau))d\tau$$

Доказательство:

Пусть φ - решение на E. Интегрируя равенство $\varphi'(\tau) = f(\tau, \varphi(\tau))$ от t_0 до $t \in E$, обе части которого - непрерывные функции, имеем

$$\varphi(t) - \varphi(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))d\tau.$$

Поскольку $\varphi(t_0) = r^0$, то функция φ - решение уравнения по определению.

Докажем обратное. Пусть φ - решение (3) на E. Тогда из равенства

$$\varphi(t) = r^0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))d\tau (4)$$

следует, что $\varphi \in C(E)$. Отсюда и из (4) вытекает дифференцируемость φ. Дифференцируя (4) по t, получаем: $\varphi'(t) \equiv f(t, \varphi(t))$. Кроме того, имеем $\varphi(t_0) = r^0$. Таким образом, φ - решение задачи по определению.

Q.E.D.

Лемма (о гладкой стыковке решений).

Пусть область $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,r}$, $f \in C(G \to \mathbb{R}^n)$, $(t_0, r^0) \in G$, уравнение $r' = f(t, r)$ имеет решения: φ_- на (a, t_0), φ_+ на (t_0, b). Кроме того, $\varphi_-(t_0-) = \varphi_+(t_0+) = r^0$. Тогда функция

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_-(t), & \text{если } t \in (a, t_0), \\ r^0, & \text{если } t = t_0, \\ \varphi_+(t), & \text{если } t \in (t_0, b) \end{cases}$$

является решением того же уравнения на (a, b).

Доказательство.

Пусть $t, t_- \in (a, t_0)$. По прошлой лемме

$$\varphi_-(t) = \varphi_-(t_-) + \int_{t_-}^{t} f(\tau, \varphi_-(\tau))d\tau.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $t_- \to t_0$ и замечая, что $\varphi_- = \varphi$ для точек из отрезка $\overline{t, t_-}$, получаем

$$\varphi(t) = r^0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))d\tau. (5)$$

Поступая аналогично для точек $t, t_+ \in (t_0, b)$, при $t_+ \to t_0$ приходим к равенству (5).

Таким образом, равенство (5) выполнено для всех $t \in (a, b)$. Остаётся применить прошлую лемму.

Q.E.D.

Лемма (Гронуолл).

Пусть $D = \langle a, b \rangle$, $\varphi \in C(D)$, $t_0 \in D$, $\lambda, \mu \geq 0$, при любом $t \in D$ верно двойное неравенство

$$0 \leq \varphi(t) \leq \lambda + \left| \mu \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)d\tau \right|.$$

Тогда для любого $t \in D$

$$\varphi(t) \leq \lambda e^{\mu|t-t_0|}.$$

Доказательство:

Рассмотрим случай $t \geq t_0$ (при $t < t_0$ доказательство аналогично). Предположим, что $\lambda > 0$, и определим функцию

$$v(t) = \lambda + \mu \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau) d\tau.$$

Имеем $v(t) > 0$, $v'(t) = \mu\varphi(t) \leq \mu v(t)$. Отсюда

$$\frac{v'(t)}{v(t)} \leq \mu.$$

Интегрируя это неравенство по отрезку $[t_0, t]$, получаем

$$v(t) \leq v(t_0) e^{\mu(t-t_0)}.$$

Следовательно,

$$\varphi(t) \leq v(t) \leq v(t_0) e^{\mu(t-t_0)} = \lambda e^{\mu(t-t_0)}.$$

Если же $\lambda = 0$, то при любом $\varepsilon > 0$ верно

$$\varphi(t) \leq \mu \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau) d\tau \leq \varepsilon + \mu \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau) d\tau.$$

По уже доказанному имеем

$$\varphi(t) \leq \varepsilon e^{\mu(t-t_0)}.$$

Переходя здесь к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем $\varphi(t) \leq 0$. Значит, лемма верна и при $\lambda = 0$.

Q.E.D.

7 Лекция 7.

7.1 Интегральное уравнение

def: Пусть $f : G \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$. Функция $\varphi : E \to \mathbb{R}^n$ - решение на E интегрального уравнения

$$r(t) = r^0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, r(\tau))\, d\tau,$$

если $E = \langle a, b \rangle$ и $\varphi(t) \equiv r^0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau$ на E, где интеграл понимается в смысле Римана.

Лемма (о равносильном интегральном уравнении).

Пусть $E = \langle a, b \rangle$, $t_0 \in E$, G - область в $\mathbb{R}^{n+1}$, $(t_0, r^0) \in G$, $f \in C(G \to \mathbb{R}^n)$. Тогда φ - решение на E задачи Коши

$$r' = f(t, r), \quad r(t_0) = r^0,$$

если и только если φ - решение на E уравнения

$$r(t) = r^0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, r(\tau))\, d\tau.$$

Доказательство:

Пусть φ - решение (1) на E. Интегрируя равенство $\varphi'(\tau) = f(\tau, \varphi(\tau))$ от t_0 до $t \in E$, обе части которого - непрерывные функции, имеем

$$\varphi(t) - \varphi(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau.$$

Поскольку $\varphi(t_0) = r^0$, то функция φ - решение уравнения (2) по определению.

Докажем обратное. Пусть φ - решение (2) на E. Тогда из равенства

$$\varphi(t) = r^0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau$$

следует, что $\varphi \in C(E)$. Отсюда и из (3) вытекает дифференцируемость φ. Дифференцируя (3) по t, получаем: $\varphi'(t) \equiv f(t, \varphi(t))$. Кроме того, из (3) имеем $\varphi(t_0) = r^0$. Таким образом, φ - решение задачи (1) по определению.

Q.E.D.

Лемма (о гладкой стыковке решений).

Пусть область $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,r}$, $f \in C(G \to \mathbb{R}^n)$, $(t_0, r^0) \in G$, уравнение $r' = f(t, r)$ имеет решения: φ_- на (a, t_0), φ_+ на (t_0, b). Кроме того, $\varphi_-(t_0-) = \varphi_+(t_0+) = r^0$. Тогда функция

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_-(t), & \text{если } t \in (a, t_0), \\ r^0, & \text{если } t = t_0, \\ \varphi_+(t), & \text{если } t \in (t_0, b) \end{cases}$$

является решением того же уравнения на (a, b).

Доказательство:

Пусть $t, t_- \in (a, t_0)$. По лемме о равносильном интегральном уравнении

$$\varphi_-(t) = \varphi_-(t_-) + \int_{t_-}^{t} f(\tau, \varphi_-(\tau))\, d\tau.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $t_- \to t_0-$ и замечая, что $\varphi_- = \varphi$ для точек из отрезка $\overline{t, t_-}$, получаем

$$\varphi(t) = r^0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau.$$

Поступая аналогично для точек $t, t_+ \in (t_0, b)$, при $t_+ \to t_0+$ приходим к равенству (4).

Таким образом, равенство (4) выполнено для всех $t \in (a, b)$. Остается применить лемму о равносильном интегральном уравнении.

Q.E.D.

Лемма (Гронуолл).

Пусть $D = \langle a, b \rangle$, $\varphi \in C(D)$, $t_0 \in D$, $\lambda, \mu \geq 0$, при любом $t \in D$ верно двойное неравенство

$$0 \leq \varphi(t) \leq \lambda + \mu \left| \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\, d\tau \right|.$$

Тогда для любого $t \in D$

$$\varphi(t) \leq \lambda e^{\mu |t - t_0|}.$$

Доказательство.

Рассмотрим случай $t \geq t_0$ (при $t < t_0$ доказательство аналогично). Положим

$$v(t) = \lambda + \mu \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\, d\tau.$$

Из данного в условии неравенства имеем $v'(t) = \mu\varphi(t) \leq \mu v(t)$. Умножая полученное неравенство на $e^{-\mu t}$, находим

$$v' e^{-\mu t} - \mu v e^{-\mu t} \leq 0,$$

то есть

$$(v e^{-\mu t})' \leq 0.$$

Следовательно, функция $v e^{-\mu t}$ убывает при $t \geq t_0$. Поэтому

$$v(t) e^{-\mu t} \leq v(t_0) e^{-\mu t_0}.$$

Отсюда

$$\varphi(t) \leq v(t) \leq v(t_0) e^{\mu(t - t_0)} = \lambda e^{\mu(t - t_0)}.$$

Q.E.D.

7.2 Теорема существования и единственности

def: Пусть область $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,r}$, $(t_0, r^0) \in G$,

$$\Pi := \{(t,r) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |t - t_0| \le a, |r - r^0| \le b\},$$

где числа $a, b > 0$ таковы, что $\Pi \subset G$.

Положим $M = \max\limits_{(t,r)\in\Pi} |f(t,r)|$, $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$ (если $M = 0$, то $h := a$).

Отрезок $[t_0 - h, t_0 + h]$ называется **отрезком Пеано**, соответствующим точке (t_0, r^0) (рис. 1).

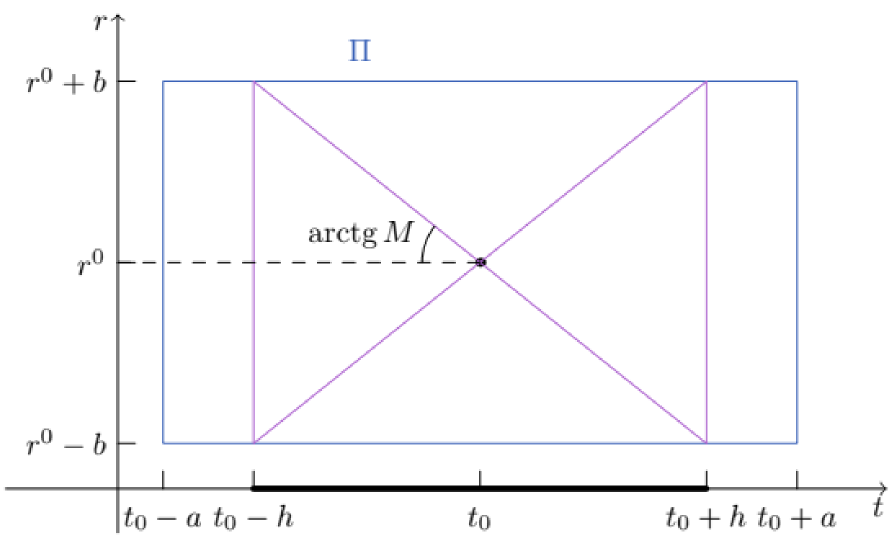


Рис. 1. Отрезок Пеано $[t_0 - h, t_0 + h]$

Теорема (Пикар, существование и единственность решения ЗК)

Пусть область $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,r}$, $f \in C(G \to \mathbb{R}^n) \cap Lip_{r,loc}$, $(t_0, r^0) \in G$. Тогда

(i) на отрезке Пеано существует решение задачи

$$r' = f(t,r), \quad r(t_0) = r^0;$$

(ii) если ψ_1 и ψ_2 - решения (5), то $\psi_1 \equiv \psi_2$ на $\operatorname{dom} \psi_1 \cap \operatorname{dom} \psi_2$.

Доказательство.

Будем считать, что $t_0 = 0, r^0 = 0$ (в противном случае перенесём начало координат в точку (t_0, r^0)). Достаточно установить существование решения на отрезке $[0, h]$ - правой половине отрезка Пеано (рассуждения на $[-h, 0]$ аналогичны, а на всём отрезке решение получается применением леммы о гладкой стыковке).

Пусть

$$\Pi := \{(t,r) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |t| \le a, |r| \le b\} \subset G, \quad M := \max_{\Pi} |f|, \quad h = \min\{a, b/M\}.$$

На отрезке $[0, h]$ зададим последовательность функций

$$\varphi_0(t) = 0,$$

$$\varphi_{k+1}(t) = \int_0^t f(\tau, \varphi_k(\tau))\, d\tau.$$

Дальнейшую часть доказательства разобьём на этапы:

1. Чтобы построить функцию φ_{k+1} должно быть $(t, \varphi_{k+1}(t)) \in G$ при всех $t \in [0, h]$. Докажем более сильное утверждение: $(t, \varphi_k(t)) \in \Pi$ при всех $t \in [0, h]$.
2. Докажем, что последовательность (φ_k) равномерно на $[0, h]$ сходится к некоторой функции φ.
3. Установим, что φ - решение интегрального уравнения, равносильного задаче (5). Тогда останется применить лемму о равносильном интегральном уравнении для завершения доказательства пункта (i).
4. Докажем единственность (пункт (ii)), применив лемму Гронуолла.

1. При $k = 0$, очевидно, $(t, \varphi_k(t)) \in \Pi$. Пусть это верно при некотором $k \in \mathbb{Z}_+$. Тогда функция φ_{k+1} определена на $[0, h]$ и

$$|\varphi_{k+1}(t)| \le \int_0^t |f(\tau, \varphi_k(\tau))|\, d\tau \le Mt \le Mh \le M\frac{b}{M} = b,$$

что влечёт включение $(t, \varphi_{k+1}(t)) \in \Pi$ при всех $t \in [0, h]$.

2. Воспользуемся критерием Коши: установим, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $N \in \mathbb{N}$, такое что при всех $m \ge N$, всех $k \in \mathbb{N}$ и всех $t \in [0, h]$

$$|\varphi_{m+k}(t) - \varphi_m(t)| \le \varepsilon.$$

По лемме ?? будет $f \in Lip_r\Pi$ с некоторой константой Липшица L. Индукцией по m докажем неравенство

$$|\varphi_{m+k}(t) - \varphi_m(t)| \le \frac{ML^m t^{m+1}}{(m+1)!}.$$

При $m = 0$ утверждение верно, так как

$$|\varphi_k(t) - \varphi_0(t)| \le \int_0^t |f(\tau, \varphi_{k-1}(\tau))|\, d\tau \le Mt.$$

Допуская его справедливость при некотором m, имеем

$$|\varphi_{m+1+k}(t) - \varphi_{m+1}(t)| \le \int_0^t |f(\tau, \varphi_{m+k}(\tau)) - f(\tau, \varphi_m(\tau))|\, d\tau$$

$$\le \int_0^t L|\varphi_{m+k}(\tau) - \varphi_m(\tau)|\, d\tau \le \int_0^t L\frac{ML^m \tau^{m+1}}{(m+1)!}\, d\tau = \frac{ML^{m+1}t^{m+2}}{(m+2)!}.$$

что и требовалось. Из (6) вытекает, что при любом $t \in [0, h]$

$$|\varphi_{m+k}(t) - \varphi_m(t)| \le \frac{ML^m h^{m+1}}{(m+1)!}.$$

Выражение в правой части не зависит от t и k и стремится к нулю при $m \to \infty$, поскольку является общим членом ряда Тейлора для экспоненты. Значит, последовательность (φ_m) удовлетворяет критерию Коши. Обозначим через φ её предел на $[0, h]$.

3. Переходя к пределу при $m \to \infty$ в равенстве

$$\varphi_{m+1}(t) = \int_0^t f(\tau, \varphi_m(\tau))\, d\tau,$$

получаем

$$\varphi(t) = \lim_{m\to\infty} \int_0^t f(\tau, \varphi_m(\tau))\, d\tau.$$

В пункте 1 было установлено, что $(t, \varphi_m(t)) \in \Pi$ при всех $t \in [0, h]$. Тогда при $m \to \infty$ будет $(t, \varphi(t)) \in \Pi$ при всех таких t. Следовательно,

$$|f(\tau, \varphi_m(\tau)) - f(\tau, \varphi(\tau))| \le L|\varphi_m(\tau) - \varphi(\tau)|.$$

Учитывая равномерную сходимость φ_m, из данного неравенства следует, что $f(t, \varphi_m(t)) \to f(t, \varphi(t))$ при $m \to \infty$ равномерно на $[0, h]$. Это позволяет внести знак предела под интеграл в (8). После этого по лемме о равносильном интегральном уравнении заключаем, что φ - решение задачи (5) на $[0, h]$.

4. Пусть ψ_1 и ψ_2 - решения (5), $E = \operatorname{dom} \psi_1 \cap \operatorname{dom} \psi_2$. По лемме о равносильном интегральном уравнении

$$\psi_k(t) = \int_0^t f(\tau, \psi_k(\tau))\, d\tau, \quad t \in E, \quad k \in \{1, 2\},$$

поэтому

$$|\psi_1(t) - \psi_2(t)| \le \int_0^t |f(\tau, \psi_1(\tau)) - f(\tau, \psi_2(\tau))|\, d\tau.$$

Рассмотрим произвольный отрезок $[\alpha, \beta] \subset E$, содержащий ноль. Графики функций ψ_1 и ψ_2 на $[\alpha, \beta]$ - компактные множества. По лемме ?? найдется постоянная $\tilde{L}$, такая что

$$|f(\tau, \psi_1(\tau)) - f(\tau, \psi_2(\tau))| \le \tilde{L}|\psi_1(\tau) - \psi_2(\tau)|$$

при всех $\tau \in [\alpha, \beta]$. Следовательно,

$$|\psi_1(t) - \psi_2(t)| \le \tilde{L} \int_0^t |\psi_1(\tau) - \psi_2(\tau)|\, d\tau.$$

По лемме Гронуолла будет $|\psi_1(t) - \psi_2(t)| = 0$ на $[\alpha, \beta]$, то есть ψ_1 и ψ_2 совпадают на $[\alpha, \beta]$. Поскольку отрезок $[\alpha, \beta]$ выбирался произвольно из E, то функции ψ_1 и ψ_2 совпадают и на всём промежутке E.

Q.E.D.

<u>**def:**</u> При доказательстве использовались последовательные приближения Пикара

$$\varphi_0(t) = r^0,\ \ \varphi_{k+1}(t) = r^0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi_k(\tau))\, d\tau.$$

Сформулируем как следствие теорему существования и единственности, условие которой сильнее, но в то же время проще, чем в теореме Пикара

Следствие

Пусть область $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,r}$, $f \in C(G \to \mathbb{R}^n)$, $f'_r \in \mathrm{Mat}_n(C(G))$, $(t_0, r^0) \in G$. Тогда на отрезке Пеано $[t_0 - h, t_0 + h]$ существует решение φ задачи Коши.

Следствие (теорема существования и единственности для уравнения высшего порядка).

Пусть область $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,y,y',\dots,y^{(n-1)}}$, $f, f'_y, f'_{y'}, \dots, f'_{y^{(n-1)}} \in C(G)$, $(t_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in G$. Тогда

(i) в некоторой окрестности точки t_0 существует решение задачи

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \\ y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}; \end{cases}$$

(ii) если ψ_1 и ψ_2 - решения (9), то $\psi_1 \equiv \psi_2$ на $\mathrm{dom}\ \psi_1 \cap \mathrm{dom}\ \psi_2$.

8 Лекция 8.

def: Решение φ уравнения $r' = f(t, r)$ продолжимо, если существует решение ψ того же уравнения, такое что $\operatorname{dom}\varphi \subseteq \operatorname{dom}\psi$ и $\psi|_{\operatorname{dom}\varphi} = \varphi$. Решение ψ называют **продолжением решения** φ.

def: Если для решения φ уравнения $r' = f(t, r)$ не существует продолжения, то функция φ — **максимальное решение** этого уравнения.

8.1 Теорема (критерий продолжимости).

Пусть область $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,r}$, $f \in C(G \to \mathbb{R}^n)$, φ — решение уравнения $r' = f(t, r)$ на промежутке $[a, b)$. Тогда решение φ продолжимо на отрезок $[a, c]$ при некотором $c > b$, если и только если $(b, \varphi(b-)) \in G$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть ψ — продолжение на $[a, c]$ решения φ. Тогда в силу непрерывности функции ψ

$$\varphi(b-) = \psi(b-) = \psi(b).$$

Поскольку $b \in [a, c]$, то из определения решения следует, что $(b, \psi(b)) \in G$.

Достаточность. По теореме Пикара существует решение χ задачи

$$r' = f(t, r),\ r(b) = \varphi(b-)$$

на некотором отрезке $[b, b + h]$. Положим

$$\psi(t) := \begin{cases} \varphi(t), & t \in [a, b), \\ \chi(t), & t \in [b, b + h]. \end{cases}$$

По лемме гладкой стыковки функция ψ — решение уравнения $r' = f(t, r)$ на $[a, b + h]$. Тогда ψ — продолжение решения φ на $[a, c]$, где $c = b + h$.

8.2 Теорема (существование и единственность максимального решения).

Пусть область $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,r}$, $f \in C(G \to \mathbb{R}^n) \cap \mathrm{Lip}_{r,loc}$, $(t_0, r_0) \in G$. Тогда

(i) существует максимальное решение ψ задачи Коши

$$r' = f(t, r), \quad r(t_0) = r_0;$$

(ii) любое решение задачи — сужение решения ψ.

Доказательство.

(i) Пусть S — множество всевозможных решений задачи , определённых на произвольных промежутках. По теореме Пикара это множество не пусто. Обозначим через a_φ и b_φ левый и правый конец промежутка $\operatorname{dom}\varphi$. Положим

$$a = \inf_{\varphi \in S} a_\varphi, \quad b = \sup_{\varphi \in S} b_\varphi.$$

Определим на (a, b) функцию ψ следующим образом. Пусть $t \in [t_0, b)$. Возьмём произвольное решение φ, для которого $t < b_\varphi$ (такое решение найдётся в силу определения числа b). Положим $\psi(t) = \varphi(t)$.

Если найдётся ещё одно решение φ_1, такое что $t < b_{\varphi_1}$, то $\varphi(t) = \varphi_1(t)$ по теореме Пикара. Тем самым, в точке t функция ψ определена однозначно.

Из определения функции ψ следует, что $\psi \equiv \varphi$ на $[t_0, b_\varphi)$.

Тогда ψ — решение на $[t_0, b_\varphi)$ задачи. Следовательно, $\psi'(t) = f(t, \psi(t))$. Так как t выбиралось произвольно из $[t_0, b)$, то последнее равенство верно на $[t_0, b)$.

Аналогично поступаем при $t \in (a, t_0]$. По лемме о гладкой стыковке функция ψ будет решением на (a, b).

Продолжимость решения ψ вправо за точку b противоречила бы определению числа b. Аналогично для точки a. Таким образом, ψ — максимальное решение.

(ii) Пусть $\varphi \in S$. По теореме Пикара будет $\psi \equiv \varphi$ на $\operatorname{dom}\psi \cap \operatorname{dom}\varphi = (a_\varphi, b_\varphi)$. Так как $(a_\varphi, b_\varphi) \subset (a, b)$, то φ — сужение функции ψ.

8.3 Теорема о выходе интегральной кривой за приделы компакта.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, область $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,r}$, $f \in C(G \to \mathbb{R}^n) \cap \mathrm{Lip}_{r,loc}$, φ — максимальное решение на (a, b) уравнения $r' = f(t, r)$, $K \subset G$ — компакт. Тогда найдётся $\Delta > 0$, такое что $\varphi(t) \notin K$ при всех $t \in (a, a + \Delta) \cup (b - \Delta, b)$.

Доказательство.

Заметим, что расстояние $\rho = \rho(K, \partial G)$ от компакта K до границы ∂G области G положительно (иначе можно было бы построить последовательность точек из K, сходящуюся к точке на границе, но $\partial G \cap K = \emptyset$). Если $\rho < +\infty$, положим $\rho := \rho/2$, иначе пусть $c := 1$.

Вокруг каждой точки $p' \in K$ построим внутри G параллелепипед

$$\Pi(p') = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |p - p'| \leq c\}$$

и рассмотрим множество

$$K_c := \bigcup_{p' \in K} \Pi(p').$$

Поскольку K — компакт, то норма каждого элемента из K ограничена некоторым числом d. Если p — произвольная точка из K_c, то для некоторой точки $p' \in K$ будет $p \in \Pi(p')$, поэтому

$$|(t, r)| \leq |(t, r) - (t', r')| + |(t', r')| \leq c + d.$$

Значит, множество K_c ограничено.

Докажем его замкнутость. Рассмотрим последовательность (p_m) точек из K_c. Для каждой такой точки найдётся параллелепипед $\Pi(p'_m)$, которому она принадлежит. Раз K — компакт, то существует подпоследовательность (p'_{m_k}), сходящаяся к некоторой точке $p' \in K$. Переходя к пределу в неравенствах

$$|p_{m_k} - p'_{m_k}| \leq c,$$

находим $|p - p'| \leq c$. Следовательно, $p \in K_c$.

Таким образом, K_c — компакт, и функция $|f|$ достигает на нём максимального значения

$$M := \max_{p \in K_c} |f(p)|.$$

Теперь предположим, что утверждение теоремы неверно. Пусть $\Delta = h/2$, где $h = \min\{c, c/M\}$. Тогда при некотором $t_0 \in (b - h/2, b)$ будет $(t_0, \varphi(t_0)) \in K$.

Рассмотрим задачу Коши $r' = f(t, r)$ с начальными данными $r(t_0) = \varphi(t_0)$. По теореме Пикара она имеет решение ψ на отрезке $[t_0, t_0 + h]$. Пусть

$$\tilde{\varphi}(t) := \begin{cases} \varphi(t), & \text{если } t \in (a, t_0), \\ \psi(t), & \text{если } t \in [t_0, t_0 + h]. \end{cases}$$

По лемме $\tilde{\varphi}$ — решение уравнения $r' = f(t, r)$ на $(a, t_0 + h)$. Функция $\tilde{\varphi}$ совпадает с φ на $(a, b) \cap (a, t_0 + h)$ по теореме Пикара. Но $t_0 + h > b - \frac{h}{2} + h = b + \frac{h}{2} > b$, то есть $\tilde{\varphi}$ — продолжение φ вправо за точку b. Так как φ по условию является максимальным решением, приходим к противоречию.

8.4 Теорема о системе, сравнимой с линейной.

Пусть $G = (a, b) \times \mathbb{R}^n_r$, $f \in C(G \to \mathbb{R}^n) \cap \mathrm{Lip}_{r,loc}$, функции $u, v \in C(a, b)$ таковы, что для любой точки $(t, r) \in G$

$$|f(t, r)| \leq u(t)|r| + v(t).$$

Тогда каждое максимальное решение уравнения $r' = f(t, r)$ определено на (a, b).

Доказательство.

По теореме о существование и единственности максимального решения любая задача Коши с начальными данными $(t_0, r_0) \in G$ имеет единственное максимальное решение φ, заданное на некотором интервале (α, β). Пусть, например, $\beta < b$. Применяя равносильное интегральное уравнение (лемма ??), при $t \in [t_0, \beta)$ находим

$$|\varphi(t)| = \left| r_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau \right| \leq |r_0| + \int_{t_0}^{t} |f(\tau, \varphi(\tau))| d\tau \leq |r_0| + \int_{t_0}^{t} (u(\tau)|\varphi(\tau)| + v(\tau)) d\tau.$$

Из непрерывности функций u и v вытекает их ограниченность на отрезке $[t_0, \beta]$. Следовательно, найдутся такие числа $\lambda \geq 0, \mu \geq 0$, что при $t \in [t_0, \beta)$

$$|\varphi(t)| \leq \lambda + \mu \int_{t_0}^{t} |\varphi(s)| ds.$$

Тогда по лемме Гронуолла

$$|\varphi(t)| \leq \lambda e^{\mu(t - t_0)} \leq L,$$

где $L = \lambda e^{\mu(\beta - t_0)}$. Отсюда следует, что график решения φ не покидает компакт

$$K = \{(t, r) \in G \mid t \in [t_0, \beta], |r| \leq L\} \subset G$$

при $t \in [t_0, \beta)$, что противоречит теореме о выходе интегральной кривой за пределы компакта

Следствие. Пусть $G = (a, b) \times \mathbb{R}^n_r$, $f \in C(G \to \mathbb{R}^n) \cap \mathrm{Lip}_r$. Тогда каждое максимальное решение уравнения $r' = f(t, r)$ определено на (a, b).

Доказательство.

Поскольку $f \in \mathrm{Lip}_r$, G, то найдётся такое число $L > 0$, что для любых пар точек $(t, r), (t, \tilde{r}) \in G$ верно
$$|f(t, r) - f(t, \tilde{r})| \leq L|r - \tilde{r}|.$$

Для произвольной точки $(t, r) \in G$ имеем
$$|f(t, r)| \leq |f(t, r) - f(t, 0)| + |f(t, 0)| \leq L|r| + |f(t, 0)|.$$

Полагая $u(t) = L, v(t) = |f(t, 0)|$ в условии теоремы О системе, сравнимой с линейной, получаем требуемое.

9 Лекция 9.

9.1 Линейная система и её решение

def: Линейной системой дифференциальных уравнений называют систему вида

$$r' = P(t)r + q(t).$$

9.1.1 Теорема о существовании и единственности максимального решения ЛС.

Пусть $P \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}((a,b) \to \mathbb{R}))$, $q \in \mathbb{C}((a,b) \to \mathbb{R}^n)$, $t_0 \in (a,b)$, $r^0 \in \mathbb{R}^n$. Тогда максимальное решение задачи Коши

$$r' = P(t)r + q(t), \quad r(t_0) = r^0$$

существует, единственно и определено на интервале (a,b).

Доказательство.

Заметим, что правая часть системы $f(t,r) = P(t)r + q(t)$ и её производная $f'_r = P(t)$ непрерывны в области $(a,b) \times \mathbb{R}^n$. Тогда по теореме существует единственное максимальное решение задачи. Имеем

$$|f(t,r)| \le |P(t)r| + |q(t)| \le n|P(t)| \cdot |r| + |q(t)|.$$

Так как функции $u(t) = n|P(t)|$ и $v(t) = |q(t)|$ непрерывны на (a,b), то по теореме решение задачи продолжимо на интервал (a,b).

9.1.2 Теорема о существовании и единственность максимального решения ЛС с комплексными коэффициентами

Пусть $P \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}(a,b))$, $q \in \mathbb{C}((a,b) \to \mathbb{C}^n)$, $t_0 \in (a,b)$, $r^0 \in \mathbb{C}^n$. Тогда максимальное решение задачи Коши

$$r' = P(t)r + q(t), \quad r(t_0) = r^0$$

существует, единственно и определено на интервале (a,b).

Доказательство. Пусть

$$P = A + iB, \quad q = \alpha + i\beta, \quad r = u + iv, \quad r^0 = u_0 + iv_0,$$

где $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}((a,b) \to \mathbb{R}))$, $\alpha, \beta, u, v \in \mathbb{C}((a,b) \to \mathbb{R}^n)$, $u_0, v_0 \in \mathbb{R}^n$.

Единственность. Пусть r - максимальное решение задачи . Тогда

$$u' + iv' = (A + iB)(u + iv) + \alpha + i\beta, \quad u(t_0) + iv(t_0) = u_0 + iv_0,$$

что равносильно

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u(t_0) \\ v(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}.$$

Значит, вектор $(u,v)^T$ - решение задачи с вещественными коэффициентами. По теореме задача не может иметь более одного максимального решения. Поэтому, если решение задачи существует, то оно единственно.

Существование. По теореме о существовании и единственности максимального решения ЛС задача имеет максимальное решение $(u, v)^T$, заданное на (a, b). Поскольку соотношения равносильны, получаем, что $r = u + iv$ - решение задачи на (a, b). Решение r непродолжимо, иначе решение $(u, v)^T$ задачи было бы продолжимо.

Замечание. В дальнейшем под решением линейной системы подразумевается максимальное решение.

9.2 Линейные однородные системы

def: Если $q \equiv 0$ на (a, b), то система, то есть

$$r' = P(t)r,$$

называется *однородной*, в противном случае - *неоднородной.*

def: *Определителем Вронского (вронскианом)* вектор-функций $(r^k)_{k=1}^n$, где $r^k : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$, называют определитель

$$W(t) := \det(r^1(t), r^2(t), \dots, r^n(t)).$$

9.2.1 Лемма (свойства вронскиана решений ЛОС).

Пусть $(r^k)_{k=1}^n$ - решения системы. Тогда следующие утверждения равносильны:

(i) $W(t_0) = 0$ в некоторой точке $t_0 \in (a, b)$;

(ii) $W \equiv 0$ на (a, b);

(iii) $(r^k)_{k=1}^n$ линейно зависимы на (a, b).

Доказательство.

Проведём доказательство по схеме: (ii) $\Rightarrow$ (i) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i) Это следствие очевидно.

(i) $\Rightarrow$ (iii) Пункт (i) означает, что векторы $(r^k(t_0))_{k=1}^n$ линейно зависимы. Значит, найдётся набор чисел $(c_k)_{k=1}^n$, такой что

$$\sum_{k=1}^n c_k r^k(t_0) = 0.$$

Положим $\varphi := c_1 r^1 + c_2 r^2 + \dots + c_n r^n$. Тогда φ - решение системы , удовлетворяющее условию $\varphi(t_0) = 0$. Но решением этой же задачи Коши является функция, тождественно равная нулю на (a, b). Следовательно, по теореме о существовании и единственность максимального решения ЛС с комплексными коэффициентами будет $\varphi \equiv 0$ на (a, b). Значит, вектор-функции $(r^k)_{k=1}^n$ линейно зависимы.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Линейная зависимость вектор-функций $(r^k)_{k=1}^n$ означает линейную зависимость столбцов матрицы $(r^1(t), r^2(t), \dots, r^n(t))$ при любом $t \in (a, b)$. Тогда её определитель, то есть вронскиан $W(t)$, тождественно равен нулю.

9.2.2 Теорема о критерии линейной независимости решений ЛОС.

Пусть $(r^k)_{k=1}^n$ - решения системы (6), W - вронскиан данного набора. Тогда

- набор $(r^k)_{k=1}^n$ линейно зависим, если и только если $W(t_0) = 0$ для некоторого $t_0 \in (a, b)$;
- набор $(r^k)_{k=1}^n$ линейно независим, если и только если $W(t_0) \neq 0$ для некоторого $t_0 \in (a, b)$.

9.2.3 Теорема (формула Остроградского–Лиувилля для решений ЛОС).

Пусть $t, t_0 \in (a, b)$, $P \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}(a, b))$, $r^1, r^2, \dots, r^n$ - решения системы. Тогда их вронскиан равен

$$W(t) = W(t_0) \exp \int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}\ P(\tau) d\tau.$$

Доказательство.

Пусть r - матрица со столбцами $r^1, r^2, \dots, r^n$, а r_k - её k-я строка. Используя формулу полного разложения определителя, нетрудно убедиться, что

$$W' = (\det r)' = \det \begin{bmatrix} r_1' \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2' \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix} + \dots + \det \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n' \end{bmatrix}.$$

Так как

$$r' = [r^{1'}, r^{2'}, \dots, r^{n'}] = [Pr^1, Pr^2, \dots, Pr^n] = Pr,$$

то k-я строка матрицы r' совпадает с k-й строкой матрицы Pr, то есть

$$r_k' = P_k r = \sum_{j=1}^{n} P_k^j r_j.$$

Подставляя выражения для r_k' при $k \in [1 : n]$ в формулу для W' и пользуясь тем, что определитель - линейная функция своих строк, находим

$$W' = P_1^1 \det \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix} + P_2^2 \det \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix} + \dots + P_n^n \det \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix} = W\ \mathrm{tr}\ P.$$

Решая полученное дифференциальное уравнение, приходим к требуемой формуле.

9.2.4 Теорема (общее решение ЛОС).

Пусть $P \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}(a, b))$. Тогда множество решений системы $r' = P(t)r$ образует n-мерное линейное пространство.

Доказательство.

Пусть $t_0 \in (a, b)$, $(a^k)_{k=1}^n$ - базис в $\mathbb{C}^n$. По теореме о существовании и единственности максимального решения ЛС с комплексными коэффициентами для любого $k \in [1 : n]$ существует r^k - решение задачи Коши $r' = P(t)r, r(t_0) = a^k$. Вронскиан этих решений $W(t_0) = \det(a^1, a^2, \dots, a^n) \neq 0$.

Тогда по теореме о критерии линейной независимости решений ЛОС функции $(r^k)_{k=1}^n$ линейно независимы.

Рассмотрим произвольное решение r системы $r' = P(t)r$. Пусть $(c_k)_{k=1}^n$ - координаты вектора $r(t_0)$ в базисе $(a^k)_{k=1}^n$. Положим

$$\varphi = c_1 r^1 + c_2 r^2 + \dots + c_n r^n.$$

Ясно, что φ - решение системы $r' = P(t)r$, при этом $\varphi(t_0) = r(t_0)$. Тогда $r \equiv \varphi$ в силу теоремы о существовании и единственности максимального решения ЛС с комплексными коэффициентами.

Таким образом, функции $(r^k)_{k=1}^n$ линейно независимы, и любое решение есть их линейная комбинация. Значит, $(r^k)_{k=1}^n$ - базис в пространстве решений.

def: *Фундаментальной системой решений* системы уравнений называется совокупность её n линейно независимых решений.

def: *Фундаментальная матрица системы* - матрица, столбцы которой образуют фундаментальную систему решений.

9.2.5 Лемма о множестве фундаментальных матриц.

Пусть Φ - фундаментальная матрица системы. Тогда $\{\Phi M \mid M \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}), \det M \neq 0\}$ - множество всех фундаментальных матриц этой системы.

Доказательство.

Пусть Ψ - фундаментальная матрица системы. Тогда каждый её столбец, будучи решением этой системы, является линейной комбинацией столбцов матрицы Φ. Записывая коэффициенты разложения в столбцы матрицы M, имеем $\Psi = \Phi M$. А так как $\det\Psi \neq 0$ и $\det\Phi \neq 0$, то и $\det M \neq 0$.

Обратно, пусть $M \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ - произвольная невырожденная матрица. Тогда матрица ΦM состоит из решений, а её определитель не обращается в ноль. Следовательно, по теореме о критерии линейной независимости решений ЛОС эти решения линейно независимы, поэтому ΦM - фундаментальная матрица.

9.2.6 Лемма об овеществлении.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\Phi = (r^1, r^2, r^3, \dots, r^n)$ - фундаментальная матрица системы, при этом $r^1 = \overline{r^2}$. Тогда

$$\Psi = (\mathrm{Re}\ r^1, \mathrm{Im}\ r^1, r^3, \dots, r^n)$$

- фундаментальная матрица той же системы.

Доказательство.

Так как

$$\mathrm{Re}\ r^1 = \frac{1}{2}(r^1 + \overline{r^1}) = \frac{1}{2}r^1 + \frac{1}{2}r^2,$$

$$\mathrm{Im}\ r^1 = \frac{1}{2i}(r^1 - \overline{r^1}) = \frac{1}{2i}r^1 - \frac{1}{2i}r^2,$$

то

$$\Psi = \Phi \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2i} & 0 \\ 0 & 0 & E_{n-2} \end{bmatrix},$$

где E_{n-2} - единичная матрица порядка $n-2$. По лемме о множестве фундаментальных матриц матрица Ψ является фундаментальной.

Пример.

Рассмотрим систему

$$x' = y, \quad y' = -x.$$

В качестве её фундаментальной матрицы можно взять

$$\Phi = \begin{bmatrix} e^{it} & e^{-it} \\ ie^{it} & -ie^{-it} \end{bmatrix}.$$

Столбцы матрицы Φ комплексно-сопряжены. По лемме об овеществлении матрица

$$\Psi = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix},$$

столбцы которой суть вещественная и мнимая части первого столбца матрицы Φ, также является фундаментальной.

10 Лекция 10.

10.1 Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами

def: *Линейной системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами* называют линейную систему вида
$$r' = Ar + q(t),$$
где $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$, $q \in C((a,b) \to \mathbb{C}^n)$.

Лемма

Пусть $n, k \in \mathbb{N}$, $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$, $h^1, h^2, \ldots, h^k$ - жорданова цепочка, соответствующая $\lambda \in \operatorname{spec} A$. Тогда функции

$$\begin{aligned}
&\varphi^1(t) = e^{\lambda t} h^1,\\
&\varphi^2(t) = e^{\lambda t} \left(\frac{t}{1!} h^1 + h^2 \right),\\
&\quad \ldots\\
&\varphi^k(t) = e^{\lambda t} \left(\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} h^1 + \cdots + \frac{t}{1!} h^{k-1} + h^k \right)
\end{aligned}$$

являются решениями системы $r' = Ar$.

Доказательство.

Принимая во внимание определение жордановой цепочки, при $j \in [1:k]$ имеем

$$\begin{aligned}
A\varphi^j &= e^{\lambda t} \sum_{m=1}^{j} \frac{t^{j-m}}{(j-m)!} A h^m = e^{\lambda t} \left(\frac{t^{j-1}}{(j-1)!} \lambda h^1 + \sum_{m=2}^{j} \frac{t^{j-m}}{(j-m)!} (\lambda h^m + h^{m-1}) \right) = \\
&= e^{\lambda t} \left(\lambda \sum_{m=1}^{j} \frac{t^{j-m}}{(j-m)!} h^m + \sum_{m=2}^{j} \frac{t^{j-m}}{(j-m)!} h^{m-1} \right).
\end{aligned}$$

Это же выражение получается при дифференцировании вектор-функции φ^j. Значит, $(\varphi^j)' = A\varphi^j$, что и требовалось.

Теорема(ФСР ЛОС с постоянными коэффициентами)

Пусть $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$, базис пространства $\mathbb{C}^n$ состоит из жордановых цепочек

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 \sim h^1, h^2, \ldots, h^k,\\
&\quad \ldots\\
&\lambda_d \sim u^1, u^2, \ldots, u^m,
\end{aligned}$$

соответствующих $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \operatorname{spec} A$. Тогда вектор-функции

$$\begin{aligned}
&\varphi^1(t) = e^{\lambda_1 t} h^1, \qquad \ldots, \qquad \varphi^k(t) = e^{\lambda_1 t} \left(\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} h^1 + \cdots + \frac{t}{1!} h^{k-1} + h^k \right),\\
&\qquad \ldots\\
&\psi^1(t) = e^{\lambda_d t} u^1, \qquad \ldots, \qquad \psi^m(t) = e^{\lambda_d t} \left(\frac{t^{m-1}}{(m-1)!} u^1 + \cdots + \frac{t}{1!} u^{m-1} + u^m \right)
\end{aligned}$$

образуют фундаментальную систему решений системы $r' = Ar$.

Доказательство.

По лемме каждая из вектор-функций

$$\varphi^1, \ldots, \varphi^k, \psi^1, \ldots, \psi^m$$

является решением. Их вронскиан

$$W(0) = \det[h^1, \ldots, h^k, u^1, \ldots, u^m] \neq 0.$$

Тогда по теореме о критерии линейной независимости решений ЛОС вектор-функции $\{\varphi^1, \ldots, \varphi^k, \psi^1, \ldots, \psi^m\}$ линейно независимы, а значит, образуют фундаментальную систему решений.

Пример(случай собственного базиса).

Найдём общее решение системы

$$\begin{cases} x' = y + z, \\ y' = x - z, \\ z' = x - y. \end{cases}$$

Матрица системы

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Её собственные числа: -2 (кратности 1) и 1 (кратности 2). Соответствующие им собственные векторы: $[-1, 1, 1]^T, [1, 1, 0]^T, [1, 0, 1]^T$. Тогда общее решение

$$r(t) = C_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_3 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Следствие

Пусть $\lambda \in \operatorname{spec} A$ имеет алгебраическую кратность m_a и геометрическую кратность m_g. Тогда система $r' = Ar$ имеет m_a линейно независимых решений вида

$$\varphi(t) = e^{\lambda t} Q^{m_a - m_g}(t),$$

где Q^s — вектор-многочлен степени не выше s.

Доказательство.

По теореме о ФСР ЛОС с постоянными коэффициентами числу λ соответствуют m_g групп решений размеров $k_1, k_2, \ldots, k_{m_g}$, причём $k_1 + k_2 + \cdots + k_{m_g} = m_a$. Все эти решения линейно независимы и имеют вид экспоненты, умноженной на некоторый вектор-многочлен. При этом в j-й группе степень многочленов, умножаемых на $e^{\lambda t}$, не превосходит $k_j - 1$.

Не умаляя общности, считаем $k_1 = \max_{j \in [1:m_g]} k_j$. Тогда степень многочленов не превосходит $k_1 - 1$. Так как

$$m_a = k_1 + \dots + k_{m_g} \geq k_1 + (m_g - 1),$$

то $k_1 - 1 \leq m_a - m_g$, что и требовалось.

На этом следствии основан *метод Эйлера* построения общего решения линейного однородного уравнения. Каждому собственному числу сопоставляется вектор-функция с неопределёнными коэффициентами. Они определяются подстановкой функции φ в систему уравнений. Среди коэффициентов всегда будет m независимых, где m — алгебраическая кратность собственного числа.

Если алгебраическая и геометрическая кратности совпадают, то метод Эйлера фактически сводится к поиску собственных векторов. Продемонстрируем данный метод на примере.

Пример

Решим систему

$$\begin{cases} x' = 2x + y + z, \\ y' = -z - 2x, \\ z' = y + 2x + 2z. \end{cases}$$

Матрица коэффициентов

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

имеет собственные числа $\lambda_1 = 2$, $\lambda_{2,3} = 1$.

Так как алгебраическая и геометрическая кратности числа λ_1 совпадают и равны 1, то найдём собственный вектор, отвечающий λ_1: $h^1 = [1, -2, 2]^T$. Тогда соответствующие решения

$$\varphi^1(t) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} e^{2t}.$$

Геометрическая кратность числа $\lambda_{2,3}$ равна

$$m_g = n - \operatorname{rank}(A - \lambda_{2,3}E) = 3 - 2 = 1.$$

Алгебраическая кратность $m_a = 2$. Поэтому многочлены в формуле имеют степень не выше $m_a - m_g = 2 - 1 = 1$. Следовательно, решения, отвечающие $\lambda_{2,3}$, ищем в виде

$$\varphi^{2,3}(t) = e^t(at + b),$$

где $a = [a_1, a_2, a_3]^T$, $b = [b_1, b_2, b_3]^T$. Подставляя $\varphi^{2,3}$ в систему, находим

$$e^t(at + b) + e^t a = e^t(tAa + Ab) \iff at + (a + b) = tAa + Ab.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, получаем систему

$$\begin{cases} Aa = a, \\ Ab = a + b. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим $a_1 = 0$, $a_2 = -C_2$, $a_3 = C_2$.

Подставляя во второе уравнение системы, получаем $b_1 = C_2$, $b_2 = -C_2 - C_3$, $b_3 = C_3$. Здесь C_2 и C_3 — произвольные параметры.

Тогда числу $\lambda_{2,3}$ соответствуют решения вида

$$\varphi^{2,3}(t) = e^t \left(t \begin{bmatrix} 0 \\ -C_2 \\ C_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_2 \\ -C_2 - C_3 \\ C_3 \end{bmatrix} \right) = C_2 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ -t-1 \\ t \end{bmatrix} + C_3 e^t \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Общее решение исходной системы — сумма φ^1 и $\varphi^{2,3}$:

$$r(t) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -t-1 \\ t \end{bmatrix} e^t + C_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t.$$

11 Лекция 11

12 Лекция 12.

12.1 ЛУ с постоянными коэффициентами

<u>**def:**</u> Уравнение с постоянными коэффициентами - такое дифференциальное уравнение:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = f(t)$$

Где $a_k \in \mathbb{C}, f \in \mathbb{C}(E)$

13 Информация о курсе.

Поток — y2024.
Группы M3138-M3139.
Преподаватель — Бабушкин Максим Владимирович.