Математический Анализ. Теор Опрос

Чепелин Вячеслав

Содержание

1 Определения
1.1 Первообразная, неопределенный интеграл
1.2 Теорема о существовании первообразной
1.3 Таблица первообразных
1.4 Площадь, аддитивность площади, ослабленная аддитивность
1.5 Определенный интеграл
1.6 Выпуклая функция
1.7 Выпуклое множество в R^m
1.8 Надграфик
1.9 Опорная прямая
1.10 Функция промежутка, аддитивная функция промежутка
1.11 Плотность аддитивной функции промежутка
1.12 Кусочно-непрерывная функция, интеграл от неё
1.13 Почти первообразная
1.14 Гладкий путь, вектор скорости, носитель пути
1.15 Длина гладкого пути
1.16 Вариация функции на промежутке
1.17 Теорема о функциях ограниченной вариации
1.18 Верхний и нижний пределы
1.19 Частичный предел
1.20 Вычисление длины пути в полярных координатах и длины графика
1.21 Дробление отрезка, ранг дробления, оснащение, интегральная сумма Римана
1.22 Кривая Пеано
1.23 Постоянная Эйлера
1.24 Несобственный интеграл, сходимость, расходимость
1.25 Критерий Больцано-Коши сходимости несобственного интеграла
1.26 Гамма функция Эйлера.
1.27 Абсолютно сходящийся интеграл, ряд
1.28 Числовой ряд, сумма ряда, сходимость, расходимость
1.29 n-й остаток ряда
1.30 Критерий Больцано-Коши сходимости числового ряда

2 Теоремы:
2.1 Лемма о трех хордах

2.2 Теорема об односторонней дифференцируемости выпуклой функции
2.3 Лемма о точках недифференцируемости выпуклой функции
2.4 Описание выпуклости с помощью касательных
2.5 Дифференциальный критерий выпуклости
2.6 Теорема о свойствах неопределенного интеграла
2.7 Интегрирование неравенств. Теорема о среднем
2.8 Теорема Барроу
2.9 Формула Ньютона-Лейбница, в том числе, для кусочно-непрерывных функций
2.10 Линейность определенного интеграла, интегрирование по частям, замена переменных
2.11 Неравенство Чебышева
2.12 Иррациональность числа пи
2.13 Правило Лопиталя
2.14 Пример неаналитической функции
2.15 Теорема Штольца
2.16 Теорема Гаусса
2.17 Теорема о вычислении аддитивной функции промежутка по плотности
2.18 Площадь криволинейного сектора: в полярных координатах и для параметрической кривой
2.19 Изопериметрическое неравенство
2.20 Обобщенная теорема о плотности
2.21 Объем фигур вращения
2.22 Вычисление длины гладкого пути
2.23 Свойства верхнего и нижнего пределов
2.24 Техническое описание верхнего предела
2.25 Теорема о существовании предела в терминах верхнего и нижнего пределов
2.26 Теорема о характеризации верхнего предела как частичного
2.27 Интеграл как предел интегральных сумм
2.28 Теорема об интегральных суммах центральных прямоугольников и трапеций
2.29 Формула Эйлера–Маклорена. Асимптотика степенных сумм
2.30 Асимптотика частичных сумм гармонического ряда
2.31 Формула Валлиса
2.32 Формула Стирлинга.
2.33 Простейшие свойства несобственного интеграла
2.34 Признаки сравнения сходимости несобственного интеграла
2.35 Изучение сходимости интеграла $\int_{10}^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$
2.36 Гамма функция Эйлера. Простейшие свойства. Интеграл Эйлера–Пуассона
2.37 Теорема об абсолютно сходящихся интегралах и рядах.
2.38 Изучение интеграла $\int_1^\infty \frac{\sin x\,dx}{x^p}$ на сходимость и абсолютную сходимость
2.39 Признак Абеля–Дирихле сходимости несобственного интеграла
2.40 Интеграл Дирихле.
2.41 Свойства рядов: линейность, свойства остатка, необх. условие сходимости, критерий Больцано–Коши
2.42 Признак сравнения сходимости положительных рядов
2.43 Признак Коши сходимости положительных рядов
2.44 Признак Даламбера сходимости положительных рядов
2.45 Признак Раабе сходимости положительных рядов
2.46 Интегральный признак Коши сходимости числовых рядов

2.47 Признак Лейбница . . . .
2.48 Признаки Дирихле и Абеля сходимости числового ряда . . . .

1 Определения

1.1 Первообразная, неопределенный интеграл

def: $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$. F называется **первообразной** функции f, если:

1. F дифференцируема на $\langle a, b\rangle$.
2. $\forall x \in \langle a, b\rangle : F'(x) = f(x)$.

Неопределенный интеграл f — это множество всех первообразных f.

1.2 Теорема о существовании первообразной

f - непрерывна на $\langle a, b\rangle$. Тогда f имеет первообразную на $\langle a, b\rangle$.

1.3 Таблица первообразных

Она переписывается из таблицы производных, просто в обратную сторону. Но есть две *загадочные* формулы:

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| + C$$

1.4 Площадь, аддитивность площади, ослабленная аддитивность

def: **Фигура** - это ограниченное подмножество в R^2. ε - множество всех возможных фигур.

$\sigma : \varepsilon \to [0, +\infty)$ — назовем **площадью**, если:

1. Аддитивно: $A_1, A_2 \in \varepsilon, A_1 \cap A_2 = \varnothing, \sigma(A_1 \cup A_2) = \sigma(A_1) + \sigma(A_2)$
2. Нормировка: $\sigma([a, b] \times [c, d]) = (b - a)(d - c)$.

def: $\sigma : \varepsilon \to [0, +\infty)$ — **ослабленная площадь**, если выполнено:

1. монотонна.
2. нормирована.
3. ослабленная аддитивность: Есть $E \in \varepsilon : l$ - вертик. прямая L^- - левая полуплоскость, L^+ - правая полуплоскость (замкнутая полуплоскость), тогда $E_1 = E\cap L^-, E_2 = E\cap L^+ : \sigma(E) = \sigma(E_1) + \sigma(E_2)$

1.5 Определенный интеграл

def: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f - непр., σ- осл. адд площадь, тогда **определенный интегралом** f по отрезку $[a, b]$ назовем:

$$\int\limits_a^b f = \int\limits_a^b f(x)dx = \sigma(\Pi\Gamma(f^+,[a, b])) - \sigma(\Pi\Gamma(f^-,[a, b]))$$

1.6 Выпуклая функция

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — **выпукла** на промежутке $\langle a, b\rangle$, если:

$$\forall x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle : \forall \alpha \in [0, 1] : f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \le \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$$

1.7 Выпуклое множество в R^m

Множество $A \subset R^m$ **выпукло**, если:

$$\forall x, y \in A, [x, y] \subset A : [x, y] = \{x + t(y - x), t \in [0, 1]\} = \{(1-t)x + ty, t \in [0, 1]\}$$

1.8 Надграфик

Надграфик $(f,\, \langle c, d\rangle) = \{(x, y) : x \in \langle c, d\rangle, y \ge f(x)\}$

1.9 Опорная прямая

def: Дано множество A выпуклое в R^2. Прямая L называется **опорной** к A в точке x_0, если L проходит через x_0 и множество A лежит в одной полуплоскости (замкнутой).

1.10 Функция промежутка, аддитивная функция промежутка

$\mathrm{Segm}([a, b])$ - множество всевозможных отрезков, лежащих в $[a, b]$

$\Phi : \mathrm{Segm}([a, b]) \to \mathbb{R}$ - **функция для промежутка**.

Введем **аддитивные функции для промежутка**:

$$\forall [p, q] \in \mathrm{Segm}[a, b] : \forall c \in (p, q) : \Phi([p, c]) + \Phi(c, q) = \Phi([p, q])$$

1.11 Плотность аддитивной функции промежутка

def: $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $\Phi : \mathrm{Segm}(\langle a, b\rangle) \to \mathbb{R}$ - а.ф.п:

f - **плотность** Φ: $\forall \Delta \in \mathrm{Segm}(\langle a, b\rangle)$:$inf_\Delta f \cdot len(\Delta) \le \Phi(\Delta) \le sup_\Delta f \cdot len(\Delta)$

1.12 Кусочно-непрерывная функция, интеграл от неё

def: $f : [a.b] \to \mathbb{R}$ **кусочно-непрерывной**, если:

$\exists A \;= \{x_1, \ldots, x_n\} \subset [a, b]$. Такая функция будет непрерывны на $[a, b]$, кроме этих точек, а в них происходят скачки.

f - кусочно-непрерывно на $[a, b]$. $x_0 = a, x_n = b$. Положим $\int\limits_a^b = \sum\limits_{i=1}^{n+1} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f\Big|_{[x_{i-1}, x_i]}$

1.13 Почти первообразная

def: $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ - **почти первообразная** функции f, если:

F - непр и $\exists A = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset [a, b]$. $\forall x \in [a, b] \backslash A : \exists F'(x) = f(x)$ и $\forall x \in A : \exists F'_+(x), F'_-(x)$

1.14 Гладкий путь, вектор скорости, носитель пути

Путь - $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$. То есть $t \to (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \ldots, \gamma_m(t)) = \gamma(t)$. Мы обычно думаем, что они непрерывны и дифференцируемы — **гладкие пути**.

$\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t), \ldots, \gamma_m'(t))$ - **вектор скорости**.

Носитель пути - траектория пути.

1.15 Длина гладкого пути

def: Функция l, заданная на множестве гладких путей (непрерывны, дифференцируемы) называется длиной пути, если выполняются следующие условия:

1. $l \geq 0$
2. аддитивна: $\forall [a, b]$, $\forall \gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ для любого $c \in [a, b] : l(\gamma) = l(\gamma\Big|_{[a,c]}) + l(\gamma\Big|_{[c,b]})$
3. $\gamma, \overline{\gamma}$ — два пути. $C_\gamma, C_{\overline{\gamma}}$ — носители пути.

   Если $\exists T : C_\gamma \to C_{\overline{\gamma}}$ — сжатие ($\forall M, N : \rho(T(M), T(N)) \leq \rho(M, N)$), то $l(\overline{\gamma}) \leq l(\gamma)$
4. γ - линейный путь, то $l(\gamma) = \rho(A, B)$, где A - начало, B - конец.

Примеры ниже

1.16 Вариация функции на промежутке

def: Пусть f - любая из $[a, b] \to \mathbb{R}$. Тогда **вариация функции** на $[a, b]$:

$$\mathrm{Var}_a^b f = \sup(\sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})|)$$

где $\tau = \{t_0, \ldots, t_n\}$ — дробление отрезка

1.17 Теорема о функциях ограниченной вариации

Если для f выполнено: $\mathrm{Var}_a^b f < +\infty$, то она называется **ограниченной** вариации.

Я не знаю что тут надо

1.18 Верхний и нижний пределы

def: x_n - вещ. последовательность. Рассмотрим $y_n = \sup(x_n, x_{n+1}, \ldots), z_n = \inf(x_n, x_{n+1}, \ldots)$. y_n - **верхне огибающая**, z_n - **нижне огибающая**.

y_n - не возрастает, z_n - не убывает. $\forall n : z_n \leq x_n \leq y_n$

Если изменить конечное число членов последовательности, то y_n, z_n изменятся конечное число раз.

Верхний предел последовательности— $\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim y_n \in \overline{R}$

Нижний предел последовательности— $\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim z_n \in \overline{R}$

1.19 Частичный предел

def: (x_n) - вещ. последовательность $L \in \mathbb{R}$ - **частичный предел** $x_n : \exists (n_k) : n_1 < n_2 < \ldots :$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = L$.

1.20 Вычисление длины пути в полярных координатах и длины графика

Примеры:

1. В $\mathbb{R}^2 : \gamma(t) = (x(t), y(t))$ - обычные декартовы.

$$l = \int\limits_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

2. $\mathbb{R}^2$, полярные координаты $r(t)$,$\varphi(t)$

$$l = \int\limits_a^b \sqrt{((r(t)\cos\varphi(t))')^2 + ((r(t)\sin\varphi(t))')^2} = \int\limits_a^b \sqrt{r(t)^2 + r'(t)^2} dt$$

3. Длина графика $x(t) = t, y(t) = f(t)$.

$$l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

1.21 Дробление отрезка, ранг дробления, оснащение, интегральная сумма Римана

def: $[a, b]$ **дробление** отрезка $[a, b]$ (на n частей):

$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$.

Ранг дробления(мелкость) - $\max |x_k - x_{k-1}|$

Оснащение дробления - $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\} : \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$

Пусть задана $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Тогда **Риманова сумма**: $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$.

1.22 Кривая Пеано

Кривая Пеано - это путь в $\mathbb{R}^2$, такой, что я сначала разбиваю отрезок $[0, 1]$ на 4 равных части так, что отображение первой части отрезка находится в части 1(см рисунок), второй части отрезка в части 2 и так далее. Потом повторяю то же самое в каждом квадратике. Потом повторяю то же самое в каждом квадратике квадратика и так далее. Изображение внизу описывает это построение поэтапно.

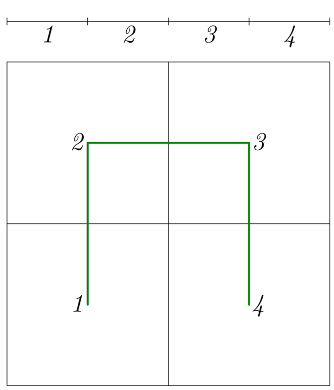


Fig. 1.

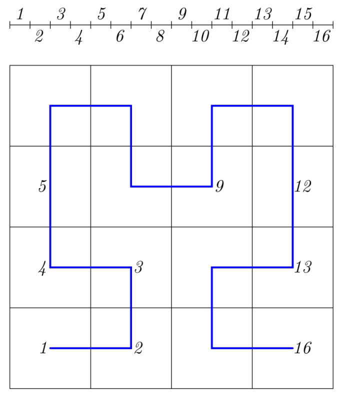


Fig. 2.

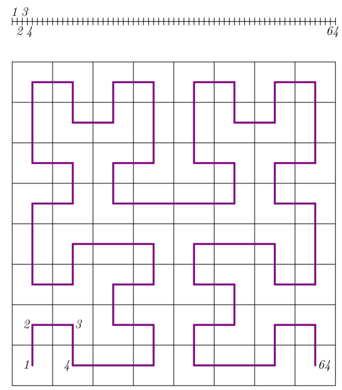
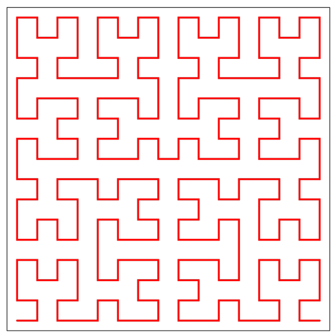
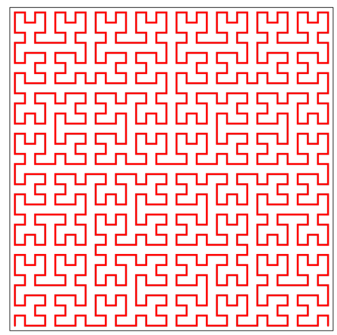
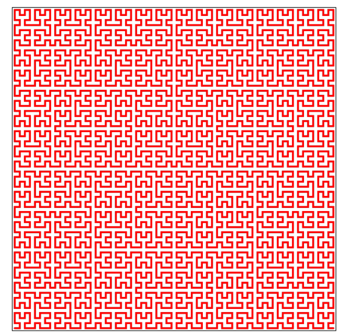


Fig. 3.







1.23 Постоянная Эйлера

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}=\ln n+\gamma+o(1)$. Причем $\gamma \in [\frac{1}{2}, \frac{5}{8}]$ - **Постоянная Эйлера**

1.24 Несобственный интеграл, сходимость, расходимость

def: $\varPhi(A) := \int\limits_a^A f(x)dx$

Если $\exists \lim\limits_{A \to b-0} \varPhi(A) \in \overline{R}$ - этот предел называется **несобственным интегралом**

Если этот предел конечен, то говорят, что несобственный интеграл сходится, иначе - расходится.

1.25 Критерий Больцано-Коши сходимости несобственного интеграла

Критерий Больцана-Коши (сходимости несобственного интеграла):

$\int\limits_a^b f(x)dx$ — сходящаяся $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists \Delta \in (a,b) : \forall A, B \in (a,b), |\int\limits_A^B f| < \varepsilon$

1.26 Гамма функция Эйлера.

Гамма функция Эйлера — $\Gamma(t) = \int\limits_0^{+\infty} x^{t-1}e^{-x}dx, t \in (0, +\infty)$

1.27 Абсолютно сходящийся интеграл, ряд

def: f допустима на $[a, b)$ $\int\limits_a^b f$ - **абсолютно сходится**, если:

1. $\int\limits_a^b f$ сходится.
2. $\int\limits_a^b |f|$ сходится.

1.28 Числовой ряд, сумма ряда, сходимость, расходимость

def: Пусть дана вещ. последовательность (a_n).

Выражение вида $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n$ — **частичная сумма ряда**.

Если $\exists \lim\limits_{N\to+\infty} S_n = L \in \overline{\mathbb{R}}$, то говорят, что L - **сумма ряда** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

В случае L конечного будем называть ряд **сходящимся**. В случае $L = \infty$ или не существования предела реда, будем называть ряд **расходящимся**.

1.29 n-й остаток ряда

$\sum\limits_{n=k}^{+\infty} a_n$ - k-ый остаток ряда.

1.30 Критерий Больцано-Коши сходимости числового ряда

не смотрел еще

2 Теоремы:

2.1 Лемма о трех хордах

f - выпукла на $\langle a, b\rangle \Leftrightarrow \forall x_1 < x_2 < x_3 \in \langle a, b\rangle$ выполнено:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

2.2 Теорема об односторонней дифференцируемости выпуклой функции

f - выпукла на $\langle a, b\rangle$. Тогда $\forall x \in (a, b) : \exists f'_+(x), f'_-(x)$ (конечные), а также

$\forall x_1 < x_2 \in \langle a, b\rangle$ выполнено:

$$f'_-(x_1) \leq f'_+(x_1) \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq f'_-(x_2)$$

2.3 Лемма о точках недифференцируемости выпуклой функции

f - выпукла на $\langle a, b\rangle \Rightarrow f$ не дифф. на (a, b) в не более чем счетном множестве (множество точек разрыва НБЧС).

(вообще это было следствие)

2.4 Описание выпуклости с помощью касательных

Теорема (выпуклость в терминах касательных)

f - дифф. на $\langle a, b\rangle$. Тогда

f - вып. вниз $\Leftrightarrow$ График f лежит не ниже любой касательной:

$$\forall x_0, x \in \langle a, b\rangle : f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

2.5 Дифференциальный критерий выпуклости

Теорема (дифф. критерий выпуклости)

1) f - дифф на (a, b), непр на $\langle a, b\rangle$. Тогда f - выпукло на $\langle a, b\rangle \Leftrightarrow f'$ возрастает на (a, b).

2) f непр на $\langle a, b\rangle$, f - дважды дифф на (a, b). Тогда f - вып. $\Leftrightarrow f'' \geq 0$ на (a, b).

2.6 Теорема о свойствах неопределенного интеграла

Теорема (о св-вах неопределенного интервала)

Пусть f, g - имеют первообразные F, G на $\langle a, b\rangle$. Тогда:

1. $\displaystyle\int (f+g) = \int f + \int g$

2. $\forall a \in \mathbb{R} : \int (af) = a \int f$
3. $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \left(\int f(x)dx\right)\Big|_{x=\varphi(t)} = F(\varphi(t)) + C$
4. частный случай. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \int f(\alpha x + \beta) = \frac{1}{\alpha} F(\alpha x + \beta) + C$
5. f, g - дифф. на $\langle a, b \rangle$. Пусть $f'g$ и fg' имеют первообразную:

   Тогда: $\int fg' = fg - \int f'g$

2.7 Интегрирование неравенств. Теорема о среднем

$f \leq g$ - непр., то $\int\limits_a^b f(x) \leq \int\limits_a^b g(x)$.

Говорят: Проинтегрируем неравенство $f \leq g$, на отрезке $[a, b]$.

Теорема о среднем

Функция $f \in C([a, b])$. Тогда $\exists c \in [a, b]$, что:

$$\int\limits_a^b f = f(c)(b - a)$$

.

2.8 Теорема Барроу

Интеграл с переменным верхним пределом - $\Phi : [a, b] \to R : \Phi(x) = \int\limits_a^x f$

Интеграл с переменным нижним пределом - $\psi : [a, b] \to R : \psi(x) = \int\limits_x^b f$

для $f \in C([a, b])$.

Теорема (Барроу)

В усл. определений. Доказать, что Φ дифф на $[a, b]$, $\Phi'(x) = f(x)$

2.9 Формула Ньютона-Лейбница, в том числе, для кусочно-непрерывных функций

Теорема (формула Ньютона-Лейбница)

$f \in C([a, b])$, F - первообразная f на $[a, b]$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

2.10 Линейность определенного интеграла, интегрирование по частям, замена переменных

Микротеорема (Линейность интеграла)

Для $f, g \in C([a,b])$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, выполнено:

$$\int\limits_a^b \alpha f + \beta g = \alpha \int\limits_a^b f + \beta \int\limits_a^b g$$

Теорема (Интегрирование по частям)

$f, g \in C^1([a,b])$. Тогда $\int\limits_a^b fg' = fg\Big|_a^b - \int\limits_a^b f'g$

Теорема (о замене переменных)

$f \in C(\langle a, b\rangle),\ \varphi\langle\alpha,\beta\rangle \to \langle a, b\rangle,\ \varphi \in C^1,\ [p,q] \subset \langle\alpha,\beta\rangle$. Тогда:

$$\int\limits_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int\limits_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x)dx$$

2.11 Неравенство Чебышева

Теорема (Неравенство Чебышёва)

$f, g \in C([a,b])$ обе возрастают. Тогда $I_f \cdot I_g \leq I_{fg}$, то есть

$$\int\limits_a^b f \cdot \int\limits_a^b g \leq (b-a)\int\limits_a^b fg$$

2.12 Иррациональность числа пи

Теорема (Пи иррационально)

π - иррационально. Проверим, что π^2 иррационально.

2.13 Правило Лопиталя

Теорема(пр. Лопиталя)

$f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$, дифф $g' \neq 0$ на (a,b)

$\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow{x\to a+0} A \in \overline{\mathbb{R}}$. Пусть $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ - неопределенность $\left(\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}\right)$

Тогда: $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

2.14 Пример неаналитической функции

Неаналитическая - та, которую нельзя представить в виде разложение тейлора для бесконечности.

Пример:

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x}}, x > 0 \\ 0, x \le 0 \end{cases}$$

2.15 Теорема Штольца

Теорема (Штольца)

x_n, y_n - вещ. последовательности, $x_n \to 0, y_n \to 0$. y_n монотонный, начиная с какого-то места

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = a \in \overline{\mathbb{R}} \cup \{0\}^*$. Тогда: $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = a$.

Для случая $a = 0$ - считаем, что x_n, y_n монотонны (строго) с какого-то момента.

(Поэтому там стоит *)

2.16 Теорема Гаусса

Теорема (Гаусса)

Хотим доказать сумму $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

2.17 Теорема о вычислении аддитивной функции промежутка по плотности

Дана плотность $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $\varPhi : \mathrm{Segm}(\langle a, b\rangle)$ - а.ф.п., f - непр.

Тогда $\forall \Delta \in \mathrm{Segm}(\langle a, b\rangle)$, $\varPhi(\Delta) = \int\limits_{\Delta} f$

2.18 Площадь криволинейного сектора: в полярных координатах и для параметрической кривой

$[a, b] \subset [0, 2\pi)$

$\rho : [a, b] \to \mathbb{R}, \rho > 0$

$\varphi \in [a,b] \to (\varphi, \rho(\varphi))$

Введем определение: **Сектор** $[\alpha,\beta] = \{(\varphi, r) \subset R^2 : \varphi \in [\alpha, b], 0 \le r \le p(\varphi)\}$

$\Phi : \Delta = \sigma(\text{Сектора}),\ \Delta \in \mathrm{Segm}([a,b])$

В указанных условия, а также $\rho : [a,b] \to \mathbb{R}, \rho > 0$ и непрерывна. $[\alpha,\beta] \in \mathrm{Segm}([a,b])$. Тогда выполнено:

$$\Phi([\alpha,\beta]) = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\, d\varphi$$

2.19 Изопериметрическое неравенство

$G \subset \mathbb{R}^2$ - выпукло, замкнуто, ограниченно.

Пусть $diam(G) = \sup\limits_{a,b\in G}(\rho(a,b))$ - диаметр. $diam(G) = d$. Тогда: $\sigma(G) \le \dfrac{\pi}{4}d^2$

2.20 Обобщенная теорема о плотности

Теорема (обобщ. теорема о плотности)

$\Phi : Segm(\langle a,b\rangle) \to \mathbb{R}$ - а.ф.п. $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ - непрерывно.

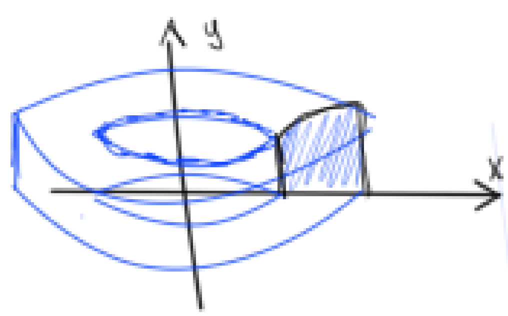
Пусть $\forall \Delta \in Segm(\langle a,b\rangle)$ заданы m_Δ, M_Δ - функции от сегмента:

1. $m_\Delta \cdot l(\Delta) \le \Phi(\Delta) \le M_\Delta \cdot l(\Delta)$
2. $\forall x \in \Delta : m_\Delta \le f(x) \le M_\Delta$
3. $\forall$ фикс. $x \in \langle a,b\rangle$, $M_\Delta - m_\Delta \to 0$, при $l(\Delta) \to 0$ и $x \in \Delta$

Тогда f - плотность Φ.

2.21 Объем фигур вращения

Пример (Объем вращения фигур)



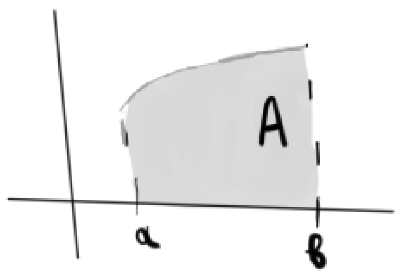
$a > 0, b > 0, f > 0$. Вращаем ПГ$(f[a,b])$ вокруг оси Oy. Получается вот что-то такое(см рисунок). Хочу найти объем этой фигуры

$\Phi([a, b]) = Vol(\{(x, y, z) : a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2, 0 \leq z \leq f(\sqrt{x^2 + y^2})\})$. Тогда выполнено:

$$\Phi([a, b]) = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

2.22 Вычисление длины гладкого пути

$\sigma(\Pi\Gamma(f, [a, b])) = \int_a^b f\,dx$, где $f \geq 0, f$ - непрерывно. $\gamma(t) = \begin{pmatrix} x = x(t) \\ y(x) = y(t) \end{pmatrix}$, $\gamma : [p, q] \to R^2$.



Замечание от Славы: вообще $x(t)$ должно монотонно возрастать, иначе странные загагулины будут давать одну и ту же площадь, но КПК про это ничего не сказал.

Причем γ - гладкое изображение (дифференцируема столько раз сколько надо).

Получилась какая-то кривая (как на рисуночке сверху), и я хочу смотреть подграфики такой кривой. Тогда:

$$\sigma A = \int_a^b "y(x)" dx = \begin{bmatrix} x = x(t) \\ y = y(t) \end{bmatrix} = \int_p^q y(t) x'(t) dt$$

Теперь мы умеем вычислять интегралы не только в декартовых координатах.

2.23 Свойства верхнего и нижнего пределов

Теорема (о свойствах верхнего и нижнего предела)

$(x_n), (\overline{x_n})$ — произвольные вещ последовательности

1. $\underline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} x_n$
2. Если $\forall n : x_n \leq \overline{x_n}$, то $\overline{\lim} x_n \leq \overline{\lim}\overline{x_n}$ и $\underline{\lim} x_n \leq \underline{\lim}\overline{x_n}$

   Замечание от Славы: На самом деле здесь можно сказать, что $\exists N$ начиная с которого выполнено $x_n \leq \overline{x_n}$, но КПК почему-то решил так ввести это свойство.
3. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0$. Тогда $\overline{\lim} \lambda x_n = \lambda \overline{\lim} x_n$ и $\underline{\lim} \lambda x_n = \lambda \underline{\lim} x_n$. (Считаем $0 \cdot \infty = 0$)
4. $\overline{\lim}(-x_n) = -\underline{\lim} x_n$
5. $\overline{\lim}(x_n + \overline{x}_n) \leq \overline{\lim} x_n + \overline{\lim}\overline{x}_n$

6. Пусть $t_n \to l \in \mathbb{R}$. Тогда $\overline{\lim}(x_n + t_n) = \overline{\lim}(x_n) + l$ и $\underline{\lim}(x_n + t_n) = \underline{\lim}(x_n) + l$
7. $t_m \to l > 0 (l \in \mathbb{R})$. Тогда $\overline{\lim}(t_n x_n) = l\overline{\lim}(x_n)$ и $\underline{\lim}(t_n x_n) = l\underline{\lim}(x_n)$

2.24 Техническое описание верхнего предела

Теорема (техническое определение верхнего предела).

(x_n) - произвольная вещ. последовательность.

1. $\overline{\lim} x_n = +\infty \Leftrightarrow x_n$ - не ограничено сверху
2. $\overline{\lim} x_n = -\infty \Leftrightarrow x_n \to -\infty$.
3. $\overline{\lim} x_n = l \Leftrightarrow$
   (a) $\forall \varepsilon > 0 : \exists : \forall n > N : x_n < l + \varepsilon$
   (b) $\forall \varepsilon > 0$ неравенство $l - \varepsilon \leq x_n$ выполнено для бесконечного множества x-ов

2.25 Теорема о существовании предела в терминах верхнего и нижнего пределов

Теорема

$\exists \lim(x_n) = L \in \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n = L$.

2.26 Теорема о характеризации верхнего предела как частичного

(x_n) - вещ последовательность. Тогда:

1. Если $l \in \overline{\mathbb{R}}-$ частичный предел x_m, то $\underline{\lim} x_n \leq l \leq \overline{\lim} x_n$
2. $\exists n_k, m_k : x_{n_k} \to \overline{\lim} x_n, x_{m_k} \to \underline{\lim} x_n$

2.27 Интеграл как предел интегральных сумм

Теорема(об интеграле, как о пределе частичных сумм)

$f \in C([a, b])$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall$ дробления $(x_0, \ldots, x_m)$ ранга $< \delta$. Тогда $\forall$ оснащ.:

$$\left| \int\limits_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon$$

2.28 Теорема об интегральных суммах центральных прямоугольников и трапеций

Теорема (об интегральной сумме центральных прямоугольников)

$f \in C^2([a, b])$, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, $\delta = max(x_i - x_{i-1}), \xi_i = \dfrac{(x_{i-1} + x_i)}{2}$.

Тогда:

$$\left|\sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{\delta^2}{8}\int\limits_a^b |f''(x)|dx$$

Теорема (формула трапеций)

в тех же условиях:

$$\left|\sum_{i=1}^{n}(\frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2}(x_i - x_{i-1})) - \int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{\delta^2}{8}\int\limits_a^b |f''(x)|dx$$

2.29 Формула Эйлера–Маклорена. Асимптотика степенных сумм

Формула Эйлера - Маклорена (простейшая)

$f \in C^2([m,n])$, $m, n \in \mathbb{R}$. Тогда:

$\sum\limits_{i=m}^{n} f(i) - \frac{1}{2}f(m) - \frac{1}{2}f(n) = \int\limits_m^n f(x)dx + \frac{1}{2}\int\limits_m^n f''(x)\{x\}(1-\{x\})dx$

2.30 Асимптотика частичных сумм гармонического ряда

$f(x) = x^p$ $(p > -1)$

$$1^p + 2^p + \ldots + n^p = \int\limits_1^n x^p dx + \frac{1}{2}(n^p+1) + \frac{1}{2}\int\limits_1^n p(p-1)x^{p-2}\{x\}(1-\{x\}) =$$

$$= \frac{n^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \frac{1}{2} + O(\max(1, n^{p-1}) = \frac{n^{p+!}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + O(max(1, n^{p-1}))$$

Торжественный момент, применим формулу для $p = 1$:

$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + 0$ — Мы доказали теорему Гаусса.

Применим формулу для $p = -1$:

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \ln n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + \int\limits_1^n \frac{1}{x^3}\{x\}(1-\{x\})dx$

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + o(1)$. Причем $\gamma \in [\frac{1}{2}, \frac{5}{8}]$ - **Постоянная Эйлера**

2.31 Формула Валлиса

Формула Валлиса

$$I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2}, n - \text{четная} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, n - \text{неч} \end{cases}$$

КПК: Используйте формулу интегрирования по частям. Двойной факториал - одной четности

$x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$\sin^{2k+1} x \leq \sin^{2k} x \leq \sin^{2k-1} x$ - очевидное неравенство. Проинтегрируем по $0, \dfrac{\pi}{2}$, получим:

$$\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \leq \frac{(2k-1)!!}{2k!!} \cdot \frac{\pi}{2} \leq \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}$$

$$\left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2 \frac{1}{2k+1} \leq \frac{\pi}{2} \leq \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2 \frac{1}{2k}$$

Правая часть - левая часть $\left(\dfrac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2 (\dfrac{1}{2k} \cdot \dfrac{1}{2k+1}) \leq \dfrac{\pi}{2} \cdot \dfrac{1}{2k} \to 0$

Получили, что левая и правые величины стремятся к $\frac{\pi}{2}$.

$\lim\limits_{k\to\infty} \left(\dfrac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2 \dfrac{1}{k} = \pi$ — **Формула Валлиса**

2.32 Формула Стирлинга.

Формула Стирлинга

Воспользуемся формулой Эйлера - Маклорена для $f(x) = \ln x$:

$$\ln 1 + \ln 2 + \ldots + \ln n = \int\limits_1^n \ln x dx + \frac{\ln n}{2} - \frac{1}{2}\int\limits_1^n \frac{1}{x^2}\{x\}(1-\{x\})dx =$$

$$n \ln n - n + 1 + \frac{\ln n}{2} - \frac{1}{2}\int\limits_1^n \frac{1}{x^2}\{x\}(1-\{x\})dx = n\ln n - n + \frac{\ln 2}{2} + C_1 + o(1)$$

А давайте теперь возьмем экспоненту от правой и левой части:

$$n! = e^{n\ln n} e^{-n} e^{\frac{\ln n}{2}} e^{C_i + o(1)}$$

Получили, что $n! \sim \dfrac{n^n}{e^n}\sqrt{n} \cdot c$, где $c = e^{C_1}$.

А теперь давайте сочетать и найдем эту c.

$(2k)!! = k! \cdot 2^k, (2k-1)!! = \dfrac{(2k)!}{k! \cdot 2^k}$. С учетом этого воспользуемся формулой Валлиса:

$$\sqrt{\pi} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)\frac{1}{\sqrt{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k)!}\frac{1}{\sqrt{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{2^{2k}k^{2k}e^{-2k}k \cdot c^2}{(2k)^{2k}e^{-2k}\sqrt{2k}\cdot c}\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{c}{\sqrt{2}}$$

Откуда $c = \sqrt{2\pi}$

$n! \sim \frac{n^n}{e^n}\sqrt{n} \cdot \sqrt{2\pi}$ — **Формула Стирлинга**

2.33 Простейшие свойства несобственного интеграла

Свойства:

1. **Критерий Больцана-Коши** (сходимости несобственного интеграла):

   $\int\limits_a^b f(x)dx$ — сходящаяся $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists \Delta \in (a, b) : \forall A, B \in \Delta, |\int\limits_A^B f| < \varepsilon$

   Следствие: Если $\exists A_n, B_n \to b - 0 : \int\limits_{A_n}^{B_n} f \not\to 0$, то $\int\limits_a f$ - расходится.

2. Аддитивность на промежутке:

   f - допустима на $[a, b)$, $c \in (a, b)$. Тогда $\int\limits_a^c, \int\limits_c^b$ сходятся или расходятся одновременно и в случаях сходимости $\int\limits_a^b f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f$

   Если $\int\limits_a^b f$ сходится, то $\int\limits_c^b f \to 0$, при $c \to b - 0$.

3. f, g - доп на $[a.b)$, $\int\limits_a^b f, \int\limits_a^b g$ - сходятся, $\lambda \in \mathbb{R}$:

   Тогда $\int\limits_a^b f + g = \int\limits_a^b f + \int\limits_a^b g, \int\limits_a^b \lambda f = \lambda \int\limits_a^b f$

4. f, g допустимы на $[a, b)$: $\int\limits_a^b g, \int\limits_a^b f$ - существует в $\mathbb{R}$, $f \le g$. Тогда $\int\limits_a^b f \le \int\limits_a^b g$.

5. f, g - дифф. на $[a, b)$, f', g' - допустимы, тогда:

   $$\int\limits_a^b fg' = fg\Big|_a^b - \int\limits_a^b f'g$$

   (если существуют два предела из трех)

6. $\varphi : [\alpha, \beta) \to \langle A, B \rangle, \varphi \in C$. Пусть $\exists \varphi(\beta - 0) \in \overline{\mathbb{R}}, f \in C(\langle A, B \rangle)$. Тогда:

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi)\varphi' dt = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(b-0)} f(x)dx$$

2.34 Признаки сравнения сходимости несобственного интеграла

Лемма:

Пусть f допустима на $[a, b), f \geq 0, \varPhi(A) = \int\limits_a^A f$. Тогда $\int\limits_a^b$ - сходящаяся, то $\varPhi$ ограниченная.

Признак сравнения.

$g \geq 0, f \geq 0$ допустимы на $[a, b)$

1. $f \leq g$, если g сходится, то f очевидно сходится и если f расходится, то g тоже расходится.
2. $\lim\limits_{x \to b-0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = e \in (0, +\infty)$, то $\int\limits_a^b f, \int\limits_a^b g$ сходятся и расходятся одновременно.
3. $\lim\limits_{x \to b-0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, то выполнен пункт 1, если предел бесконечность, то поменяйте f, g местами.

2.35 Изучение сходимости интеграла $\int_{10}^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}(\ln x)^{\beta}}$

не думаю, что это будет

2.36 Гамма функция Эйлера. Простейшие свойства. Интеграл Эйлера–Пуассона

Гамма функция Эйлера — $\Gamma(t) = \int\limits_0^{+\infty} x^{t-1}e^{-x}dx, t \in (0, +\infty)$

1) При $t > 0$ интеграл сходится.

2) $\Gamma(t)$ непрерывна, потому что $\Gamma(t)$ - выпуклая функция. А почему она выпуклая? Посмотрим на функцию $t \to x^{t-1}e^{-x}$. Вторая производная (по t) больше нуля, откуда она выпуклая. Тогда и $\Gamma(t)$ выпуклая, а отсюда непрерывная. Мы просто пишем неравенство выпуклой функции и интегрируем его.

3) $\forall t > 0 : \Gamma(t + 1) = t\Gamma(t)$, в частности $\Gamma(n + 1) = n(n - 1) \dots 1 = n!$

$$\Gamma(t+1) = \int\limits_0^{+\infty} x^t e^{-x} dx = x^t(-e^{-x})\Big|_0^{+\infty} + t\int\limits_0^{+\infty} x^{t-1}e^{-x}dx = t\Gamma(T)$$

4) $t\Gamma(t) \sim 1$, $\Gamma(t) \sim \dfrac{1}{t}$ при $t \to 0$

5) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ - **Интеграл Эйлера - Пуассона**. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ — точнее вот он.

2.37 Теорема об абсолютно сходящихся интегралах и рядах.

Теорема.

f - допустима на $[a, b)$. Тогда эквивалетно:

1. $\int\limits_a^b f$ - абсолютно сходится.
2. $\int\limits_a^b |f|$ - сходится
3. $\int\limits_a^b f^+, \int\limits_a^b f^-$ - оба сходятся.

Теорема.

a_n — любого знака. Тогда эквивалентно:

1. $\sum a_n$ - абсолютная сходимость.
2. $\sum |a_n|$ - сходится.
3. $\sum a_n^+, \sum a_n^-$ - оба сходятся. Где $a_n^+ = \max(a_n, 0), a_n^- = \max(-a_n, 0)$

2.38 Изучение интеграла $\int_1^\infty \frac{\sin x\, dx}{x^p}$ на сходимость и абсолютную сходимость

не думаю, что это будет

2.39 Признак Абеля–Дирихле сходимости несобственного интеграла

Теорема (Признак Абеля-Дирихле)

1. f - допустима на $[a, b)$. $F(A) = \int\limits_a^A f(x)dx$ - ограничена на $[a, b)$. $\exists k : \forall A \in [a, b) : |\int\limits_a^A f(x)| \leq K$

   Пусть есть $g \in C^1([a, b))$, g - монотонна и $g(x) \to 0$ при $x \to b$. Тогда $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx$ - сходится.

2. f - допустима на $[a,b)$, $\int\limits_a^b f(x)dx$ - сходится. $g \in C^1([a,b))$, g - монотонна и ограничена на $[a,b)$. Тогда $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx$ - сходится.

2.40 Интеграл Дирихле.

Пример (Интеграл Дирихле)

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

2.41 Свойства рядов: линейность, свойства остатка, необх. условие сходимости, критерий Больцано–Коши

Свойства рядов:

1. $\sum a_n, \sum b_n$ - сх. $c_n = a_n + b_n$.
   Тогда $\sum c_n$ - сходится и $\sum c_n = \sum a_n + \sum b_n$
2. $\sum a_n$ - сходится $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \sum \lambda a_n$ - сходится и $\sum \lambda a_n = \lambda \sum a_n$.
3. $\sum a_n$ - сходится, то любой остаток ряда сходится
4. Если какой-нибудь остаток ряда сходится, то ряд сходится
5. Ряд сходится $\Leftrightarrow r_n \to 0$.

Теорема (грабли) (необходимое условие сходимости)

$\sum a_n$ - сходится. Тогда $a_n \to 0$

Замечание. В ОБРАТНУЮ СТОРОНУ НЕ РАБОТАЕТ!!!

Теорема (критерий Больцано-Коши)

$\sum a_n$ - сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n > N : \forall k \in \mathbb{N} : |\sum\limits_{i=n+1}^{n+k} a_n| < \varepsilon$

2.42 Признак сравнения сходимости положительных рядов

Теорема (Признак сравнения)

Есть $a_k \geq 0, b_k \geq 0$

1. $\forall n : a_n \leq b_n$. Тогда, если b сходится $\Rightarrow a$ сходится. Если a расходится, то b расходится.
2. $\frac{a_n}{b_n} \to l$. Если $l \in (0, +\infty)$, тогда a,b сходятся расходятся одновременно. Если $l = 0$, то выполнено утв. из пункта 1. Если $l = +\infty$, то выполнено утв. из пункта 1 наоборот
3. Начиная с некоторого места $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$, то см утв. пункт 1.

2.43 Признак Коши сходимости положительных рядов

Теорема (Признак Коши)

$\sum a_n, a_n \geq 0, K_n = \sqrt[n]{a_n}$

light:

1. $\exists q \in (0, 1)$, $K_n \leq q$. Тогда $\sum a_n$ - сходится
2. $K_n \geq 1$ для бесконечного множества номеров. Тогда $\sum a_n$ - расходится

pro:

$K = \overline{\lim} K_n$

1. $K > 1$ ряд расходится.
2. $K < 1$ ряд сходится

Замечание $K = 1$ - признак не работает.

2.44 Признак Даламбера сходимости положительных рядов

Теорема (Признак Даламбера)

$a_n > 0 : D_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

light:

1. $\exists q \in (0, 1) : D_n \leq q$ НСНМ. Тогда $\sum a_n$ - сходится
2. $D_n \geq 1$ НСНМ. Тогда $\sum a_n$ - расходится.

pro: $D := \lim D_n$

1. $D > 1$: Ряд расходится
2. $D < 1$: Ряд сходится

2.45 Признак Раабе сходимости положительных рядов

Признак (Раабе)

$a_n > 0$. $R_n := n(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1)$

light:

1. $\exists r > 1 :$ НСНМ $R_n \geq r \Rightarrow$ Ряд $\sum a_n$ сходится
2. $R_n \leq 1$ НСНМ $\Rightarrow$ Ряд $\sum a_n$ расходится

pro:

$R := \lim R^n$

1. $R > 1$: ряд сходится
2. $R < 1$: расходится.

2.46 Интегральный признак Коши сходимости числовых рядов

Теорема (Интегральный признак Коши)

Пусть у вас есть функция f - непрерывная на $[1, +\infty)$, монотонна, $f \geq 0$. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$ и $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ сходятся и расходятся одновременно.

2.47 Признак Лейбница

Теорема (Признак Лейбница)

$c_1 \geq c_2 \geq \ldots \geq 0$ (т.е монотонность). Пусть $c_n \to 0$. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} c_n$ - сходится.

2.48 Признаки Дирихле и Абеля сходимости числового ряда

Теорема (признак Абеля и Дирихле)

1. (a) Пусть частичные суммы последовательности a_n - ограниченны: $\exists C_A : \forall n : a_1 + \ldots + a_n \leq C_A$.

   (b) Пусть b_n - монотонна, $b_n \to 0$

   Тогда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ - сходится

2. (a) Ряд $\sum a_n$ - сходится.

   (b) b_n - монотонна и ограничена. $\exists C_B : \forall$

   Тогда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ - сходится.