Математический анализ. Практика.
Третий семестр

Автор: Вячеслав Чепелин

Содержание

1. Практика 1. Функции нескольких переменных.

$f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Как считать область определения f? - удобно рисовать картинки

Задача 1.
Найти области определения:

$$f = \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}$$

Решение:

Тут рисуется очевидно просто смотря на картинку.

Задача 2.
Найти области определения:

$$f = \ln(x^2 + y^2 - 1) \quad \text{и} \quad f = \ln(1 - x^2 - y^2)$$

Решение:

Тут тоже все понятно

Задача 3.
Найти области определения:

$$f = \ln(3x + y - 3) + \frac{\ln(3-x)}{\sqrt{3x - 2y + 6}}$$

Решение:

И тут тоже!

Определение. **Предел функции от нескольких переменных**
$f : U \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{U}$: $\lim\limits_{x \to a} f$ - стандартно.

Еще можно определять по Гейне: $\forall x_n \in U \underset{x_n \neq a}{\to} a$: $\lim\limits_{n \to a} f(x_n) = A$

Не путать определения двойных пределов и повторных пределов

Ищется он очень легко(буквально обычный предел)

2. Практика 2. Производные и дифференцируемость

Задача 1.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2+y^2\right)^{x^2y^2}$$

Решение:

Сведем все к экспоненте:

$$\lim e^{x^2y^2\ln(x^2+y^2)}$$

Поэтому теперь все, что нам надо - найти предел того, что в экспоненте.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2y^2\ln(x^2+y^2)$$

$$|x^2y^2\ln(x^2+y^2)| \le \left(x^2+y^2\right)^2\ |\ln(x^2+y^2)| = t^2\ |\ln t| \to 0$$

Откуда и получается, что нам надо.

Задача 2.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(1+xy^2\right)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$$

Решение:

Та же самая история, будем смотреть на:

$$\left|\frac{1}{x^2+y^2}\ln\left(1+xy^2\right)\right| \le 2\frac{|x|y^2}{x^2+y^2} \le |y|\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}$$

Причем первое неравенство выполнено в НО нуля.

Задача 3.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+xy)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$$

Решение:

Тут предела нет, нужно с двух сторон подойти к

$$\frac{1}{x^2+y^2}\ln(1+xy)$$

Определение. **Производная по направлению**
$f : a \in U \subset \mathbb{R}^n \to R$. Возьмем $h \in \mathbb{R}^n$, $|h| = 1$

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) := \lim_{t\to 0} f(a+th) - \frac{f(a)}{t}$$

Можно рассматривать частные производные, записывать их в вектор, получать градиент. Было на лекции.

Производную по направлению можно считать по-другому:

$$\frac{\partial f}{\partial h} = \nabla f(a)h$$

$$f(x+\Delta x) = f(x) + A\Delta x + o(|\Delta x|)$$

Задача 4.
Найти дифференциал:

$$f = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

в точке (0,1)

Решение:

Найдем частную производную по x:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x(x^2+y^2)-(x^2-y^2)2x}{x^2+y^2}\ |_{(0,1)} = 0$$

Найдем частную производную по y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2y(x^2+y^2)-(x^2-y^2)2y}{x^2+y^2}|_{(0,1)} = 0$$

Задача 5.
Найти дифференциал:

$$f = \sqrt{xy+\frac{x}{y}}$$

в точке (2,1)

Решение:

Аналогично

Задача 6.
Найти дифференциал:

$$f = \arctan\left(\frac{y}{1+x^2}\right)$$

в точке (1,-1)

Решение:

Найдем частную производную по x:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{1+\left(\frac{y}{1+x^2}\right)^2}\cdot\frac{y}{(1+x^2)^2}\cdot 2x\ |_{(1,-1)} = \frac{2}{5}$$

Найдем частную производную по y:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{1+\left(\frac{y}{1+x^2}\right)^2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\ |_{(1,-1)} = \frac{2}{5}$$

Задача 7.
Доказать, что функция недифф. в $(0,0)$

$$f = \sqrt{|xy|}$$

Решение:

Попробуем найти частную производную по x:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{\Delta x}}{\Delta x} = 0$$

Аналогично, обе ноль.

$$f(\Delta x, \Delta y) = f(0,0) + o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)$$

Тогда должно быть $\sqrt{|\Delta x \Delta y|} = o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)$. Но это не так, так как предела нет

Задача 8.
Доказать, что функция недифф. в $(0,0)$

$$f = \ln\left(3 + \sqrt[3]{x^2 y}\right)$$

Решение:

Тут частные производные 0 (Считайте их пределами).

ДЗ: Кудрявцев параграф 3: 21, 22, 25, 28, 30

3. Практика 4.

$\frac{df}{dv} = \nabla f \cdot v = 0 : \forall v \Rightarrow \nabla f = 0$ – Необходимое условие

Достаточное условие:

- Матрица $d^2 f > 0$, то минимум
- Матрица $d^2 f < 0$, то максимум
- Матрица $d^2 f$ не определена, то минимум

Задача 1.
Исследовать на экстремумы $u = x^2 + xy + y^2 - 12x - 3y$

Решение:

Найдем производную по x и по y:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + y - 12$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y + x - 3$$

Найдем, когда градиент равен нулю:

$$\{2x + y - 12 = 02y + x - 3 = 0$$

Получим $(x, y) = (7, -2)$

Найдем вторую производную: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Минимум

Задача 2.
Исследовать на экстремумы $u = 3(x^2 + y^2) - x^3 + 4y$

Решение:

Найдем производные по x, y:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 6x - 3x^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 6y + 4$$

Получим $x = 2$ или $x = 0$, y = −2/3

Найдем Матрицу Гессе

$$\begin{pmatrix} 6 - 6x & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Задача 3.

$$u = 2 \ln x + 3 \ln y + 5 \ln z + \ln(22 - x - y - z)$$

Решение

Найдем производные по всем 3 переменным

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2}{x} - \frac{1}{22 - x - y - z}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{3}{y} - \frac{1}{22 - x - y - z}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{5}{z} - \frac{1}{22 - x - y - z}$$

Найдем точки нули

$$\left\{ \frac{2}{x} - \frac{1}{22-x-y-z} = 0 \frac{3}{y} - \frac{1}{22-x-y-z} = 0 \frac{5}{z} - \frac{1}{22-x-y-z} = 0 \right.$$

Решением будет $(4, 6, 10)$

Матрица Гессе $\begin{pmatrix} -\frac{3}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{10} \end{pmatrix}$

Критерий Сильвестра

Задача 4.

$$u = x_1 \cdot x_2^2 \cdot ... x_n^n \left(1 - \sum_{k=1}^{n} k x_k\right)$$

Найдем

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = i \frac{x_1 \cdot ... \cdot x_n^n}{x_i} \left(1 - \sum_{k=1}^{n} k x_k\right) - x_1 \cdot ... \cdot x_n^n \cdot i$$

4. Практика 5. Экстремумы на многообразии

Ищем экстремум на многообразии M

Необходимые условия. Для того, чтобы точка x_0 являлась точкой условного экстремума функции $f(x), x = (x_1; ...; x_n)$, при уравнениях связи $\varphi_{i(x)} = 0$ необходимо, чтобы ее координаты удовлетворяли:

$$\begin{cases} \frac{\delta L(x^0)}{\delta x_k} = 0,\ \text{k} = 1,\ 2, ...,\ \text{n} \\ \varphi_i(x^0) = 0,\ \text{i} = 1,\ 2, ...,\ \text{m} \end{cases}$$

Где $L = f - \sum \lambda \varphi_i$, φ_i - гладкая

Достаточное условие. Пусть функция $f(x), \varphi_{i(x)}, i = 1, 2, ..., m, x \in \mathbb{R}^n$, дважды непрерывно дифференцируемы в окрестности точки x^0, и пусть в этой точке выполняются необходимые условия существования условного экстремума функции $f(x)$ при ограничениях. Тогда, если при выполнении условий:

$$\delta \varphi_{i(x^0)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta \varphi_i(x_0)}{\delta x_k} dx_k, \sum_{k=1}^{n} dx_k^2 > 0$$

и если второй дифференциал функции $L(x)$ - положительно определенная или отрицательно определенная, то победили

Задача 1.

Исследовать на условный экстремум:

1. $u = xy, g = x + y - 1$
2. $u = x^2 - y^2, g = 2x - y - 3$

Решение:

1. Проверим необходимо условие, возьмем производные в L

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ y - \lambda = 0 \\ x - \lambda = 0 \end{cases}$$

$\lambda = \frac{1}{2}$, Откуда $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$. Найдем кв. форму:

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ - вторая производная от L. Мы должны найти касательную плоскость в точке $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$.

$T_{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})} M : \frac{\partial g}{\partial x} v_1 + \frac{\partial g}{\partial y} v_2 = 0$. Имеет вид $v = (a, -a)^T$. Проверим, что $v^T a v$ - положительно определенная

2. Проверим необходимое условие в $L = x^2 - y^2 + \lambda(2x - y - 3)$:

$$\begin{cases} 2x + 2\lambda = 0 \\ 2y + \lambda = 0 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases}$$

$-2\lambda + \frac{\lambda}{2} = 3, -\frac{3\lambda}{2} = 3, \lambda = -2, x = 2, y = 1$

5. Практика 6.

6. Практика 7. Интегралы Лебега

7. Информация о курсе

Поток — y2024.

Группы M3238-M3239.

Преподаватель — Басков Игорь Сергеевич

БОЛЬ СТРАДАНИЯ БОЛЬ СТРАДАНИЯ