Математический анализ: III семестр

Лектор: Кохась Константин Петрович

_scarleteagle
imkochelorov
AberKadaber
asparagus_densiflorus
Kloppert
strumentovd
ds2bb
Stevesad

Оглавление

1. Напоминание

1.1. Скалярное произведение, евклидова норма и метрика в $\mathbb{R}^m$

$a = \sum_{k=1}^{m} e_k a_k$

$b = \sum_{k=1}^{m} e_k b_k$

$a, b \in \mathbb{R}^m$

Скалярное произведение:

$$\langle a, b \rangle = \sum_{k=1}^{m} a_k b_k$$

$$\langle a, b \rangle \in \mathbb{R}$$

Евклидова норма:

$$\|a\| = \sqrt{\langle a, a \rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} a_k^2}$$

$$\|a\| \in \mathbb{R}$$

Метрика:

$$\rho(a, b) = \|a - b\|$$

$$\rho(a, b) \in \mathbb{R}$$

Обозначение: отныне Евклидову норму будем обозначать одинарными палочками, а не двойными

1.2. Окрестность точки в $\mathbb{R}^m$, открытое множество

Окрестность:

$a \in \mathbb{R}^m$

$r \in \mathbb{R}$

Открытый шар с центром a и радиусом r –

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^m : |x - a| < r\}$$

1. В узком смысле окрестностью является открытый шар
2. В широком смысле окрестностью ялвяется множество, содержащее открытый шар

Открытое множество:

$E \subset \mathbb{R}^m$ – открытое

$$\forall x \in E \;\; \exists r : B(x, r) \subset E$$

1.3. Сходимость последовательности в $\mathbb{R}^m$, покоординатная сходимость

Сходимость последовательности:

$x_n \in \mathbb{R}^m$

$a \in \mathbb{R}^m$

$x_n \to a \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N : \forall n > N \quad |x_n - a| < \varepsilon$$

Покоординатная сходимость:

$x^{(n)} \in \mathbb{R}^m$

$x^{(n)} = \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, ..., x_m^{(n)}\right) \in \mathbb{R}^m$

$a \in \mathbb{R}^m$

$x^{(n)} \to a \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall k \in \{1, 2, ...\, m\} : \quad x_k^{(n)} \to a_k$$

1.4. Предельная точка, замкнутое множество, замыкание

$D \subset \mathbb{R}^m$

a – предельная точка $D \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \exists \left(x^{(n)}\right) : \forall n \;\; x^{(n)} \in D \setminus \{a\}, \quad x^{(n)} \to a$$

На языке окрестностей:

$$\forall U(a) \;\exists x \in D \setminus \{a\} : x \in \dot{U}(a)$$

Замкнутое множество:

$D \subset \mathbb{R}^m$ – замкнутое $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow D$ содержит все свои предельные точки

Замыкание:

$D \subset \mathbb{R}^m$

Замыкание D –

$$\mathrm{Cl}(D) = \bigcap_{\substack{E \subset \mathbb{R}^m \\ E \text{ замк} \\ E \supset D}} E$$

1.5. Компактность, секвенциальная компактность, принцип выбора Больцано-Вейерштрасса

K – компакт*(ное)* $\Leftrightarrow$

для любого открытого покрытия K существует конечное подпокрытие

Если $K \subset \mathbb{R}^m$, тогда K – компакт(ное) $\Leftrightarrow$

K замкнуто и ограничено

Секвенциальная компактность:

K – секвенциально компактно $\Leftrightarrow$

$$\forall (x_n), \; x_n \in K \; \exists n_k, \; \exists a \in K : x_{n_k} \to a$$

В метрическом пространстве: компактность $\Leftrightarrow$ секвенциальная компактность

Принцип выбора Больцано-Вейерштрасса:

(x_n) – ограниченная последовательность в $\mathbb{R}^m \Rightarrow$ у нее $\exists$ сходящаяся подпоследовательность.

1.6. Координатная функция

$f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$

$x = (x_1, ..., x_m)$

$$f(x) = f(x_1, ..., x_m) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, ..., x_m) \\ \vdots \\ f_l(x_1, ..., x_m) \end{pmatrix}$$

1.7. Двойной предел, повторный предел

X, Y – м.п.

$D_1 \subset X, \;\; a$ – предельная точка D_1

$D_2 \subset Y, \;\; b$ – предельная точка D_2

$D \supset (D_1 \setminus \{a\}) \times (D_2 \setminus \{b\})$

$f : D \to \mathbb{R}$

Повторный предел:

1. $\forall x \in (D_1 \setminus \{a\}) \quad \exists \lim\limits_{y \to b} f(x, y) = \varphi(x)$ – конечный

   Тогда **повторный предел** – это

$$\lim_{x \to a} \varphi(x)$$

2. $\forall y \in (D_2 \setminus \{b\}) \quad \exists \lim\limits_{x \to a} f(x, y) = \psi(y)$ – конечный

   Тогда это тоже **повторный предел**:

$$\lim_{y \to b} \psi(y)$$

Двойной предел:

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = A$ – **двойной предел:**

$$\forall U(A) \;\; \exists V(a), \; W(b) : \;\forall x \in \dot{V}(a) \cap D_1, \quad \forall y \in \dot{W}(b) \cap D_2 \;\; f(x, y) \in U(A)$$

1.8. Предел по направлению, предел вдоль пути

$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$

Предел по направлению:

$l \in \mathbb{R}^m$ – направление

$|l| = 1$

$$\lim_{\substack{x \to a \\ \text{по направлению } l}} f(x) = \lim_{t \to 0+0} f(a + tl)$$

Предел вдоль пути:

$\gamma : [-\alpha, \alpha] \to \mathbb{R}^m$ – непрерывное отображение

$a = \gamma(0)$

$$\lim_{\substack{x \to a \\ \text{вдоль пути } \gamma}} f(x) = \lim_{t \to 0} f(\gamma(t))$$

2. Дифференцируемость

2.1. Отображение бесконечно малое в точке

$\varphi : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ — бесконечно малое в точке a

a — внутренняя точка E

$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = 0_l$$

Замечание: определение работает для случая a — предельная точка E

2.2. $o(h)$ при $h \to 0$

$\varphi : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$

$0 \in \text{Int } E$

$\varphi = o(h)$ при $h \to 0 \Leftrightarrow$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\varphi(h)}{|h|} = 0$$

$$\text{т.е. } \frac{\varphi(h)}{|h|} - \text{б.м. в } 0$$

$$\text{или другими словами } \exists \text{ б.м. } \alpha(h) : \varphi(h) = |h| \cdot \alpha(h)$$

2.3. Отображение, дифференцируемое в точке

$F : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$

$a \in \text{Int } E$

F — дифференцируема в точке a, если $\exists$ линейный оператор $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$, $\exists$ б.м. $\alpha(h)$ при $h \to 0$:

$$F(a+h) = F(a) + Lh + \alpha(h) \cdot |h| \qquad (\alpha(0) = 0)$$

$$\underbrace{F(x)}_{\mathbb{R}^l} = \underbrace{F(a)}_{\mathbb{R}^l} + \underbrace{L\underbrace{(x-a)}_{\mathbb{R}^m}}_{\mathbb{R}^l} + \varphi(x) \cdot |x-a| \qquad (\varphi(a) = 0)$$

$$\varphi(x) - \text{б.м. при } x \to a$$

В случае, когда $l = 1$, имеет место следующая запись:

$$L = (\lambda_1, ..., \lambda_m)$$

$$F(a+h) = F(a) + \lambda_1 \cdot h_1 + ... + \lambda_m \cdot h_m + o(h)$$

2.4. Производный оператор, матрица Якоби, дифференциал

$F : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$

$a \in \text{Int } E$

F — дифференцируема в a

Производный оператор (производная):

Оператор L (из определения дифференцируемости) — *производный оператор (производная)* $= F'(a)$

Матрица Якоби:

Матрица оператора L называется *матрицей Якоби* и имеет размерность $l \times m$ (l строк m столбцов)

Дифференциал:

Все используют это слово по-разному, поэтому есть 2 определения:

Дифференциал отображения F в точке a —

1. То же, что $F'(a) = L$
2. Отображение, которое обозначается $\mathrm{d}F(a,h) = \mathrm{d}_a F(h)$

   $d_a F(h) : (\text{Int } E) \times (\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^l$

   $(a,h) \mapsto F'(a)h$

2.5. Единственность производной

$F : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$

$a \in \text{Int } E$

F — дифференцируема в $a \Rightarrow$

$$\Rightarrow F'(a) \text{ определена однозначно}$$

Доказательство:

Проверим, что $\forall u \in \mathbb{R}^m : F'(a)u$ задано однозначно

В определении $\sphericalangle\ h := tu \quad (t \in \mathbb{R})$:

$$F(a+tu) = F(a) + \underbrace{F'(a)(tu)}_{=tF'(a)u} + \alpha(tu)|t||u|$$

$$F'(a)u = \frac{F(a+tu) - F(a)}{t} \pm \alpha(tu)|u| = \lim_{t \to 0} \frac{F(a+tu) - F(a)}{t}$$

Т.к. предел единственный, то и $F'(a)u$ задано однозначно

2.6. Лемма о дифференцируемости отображения и его координатных функций

$F : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$

$a \in \text{Int } E$

$F = (f_1, f_2, ..., f_l)$

Тогда:

1. F дифференцируема в $a \Leftrightarrow$ все координатные функции дифференцируемы в a
2. Строки матрицы Якоби отображения F — матрицы Якоби координатных функций

Доказательство:

1. Докажем пункт 1 в правую сторону, а также пункт 2:

   Распишем определение дифференцируемости $F(x)$:

   $$F(x) = F(a) + L(x-a) + \varphi(x)|x-a|$$

   Рассмотрим покоординатное представление:

   $$\begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_l(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(a) \\ \vdots \\ f_l(a) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L_{11} & ... & L_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{l1} & ... & L_{lm} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \\ \vdots \\ x_m - a_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_l(x) \end{pmatrix} |x-a|$$

   В i-ой строке лежит определение производной i-ой координатной функции:

   $$f_i(x) = f_i(a) + (L_{i1}, ..., L_{im}) \times \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_m - a_m \end{pmatrix} + \varphi_i(x)|x-a|$$

   Отсюда же видно, что i-ая строка матрицы Якоби отображения — матрица Якоби $f_i(x)$
2. Для доказательства пунта 1 в левую сторону проведем рассуждения в обратную сторону (сделаем присвоение $L_{ij} := ...$)

2.7. Частные производные

$f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

$a \in \text{Int } E$

Для зафиксированного $k \in \{1...m\} \quad \sphericalangle\ \varphi_k(u) = f(a_1, a_2, ..., a_{k-1}, u, a_{k+1}, ..., a_m)$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\varphi_k(a_k + t) - \varphi_k(a_k)}{t} = \varphi_k'(a_k) -$$

— если этот предел существует и конечный, то он называется частной производной f по k-ой переменной (по x_k) в точке a

Обозначение: $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \dfrac{\partial}{\partial x_k} f(a) = f_k'(a) = f_{x_k}'(a) = D_k f(a)$

$$f_k'(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, ..., a_{k-1}, a_k + t, a_{k+1}, ..., a_m) - f(a_1, ..., a_m)}{t}$$

2.8. Необходимое условие дифференцируемости

$f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$,

$a \in \text{Int } E$,

f дифференцируема в a

Тогда:

1. $\exists f_{x_1}'(a), ..., f_{x_m}'(a)$
2. Матрица Якоби f в a равна $\left(f_{x_1}'(a), ..., f_{x_m}'(a)\right)$

Доказательство:

Подставим в определение $x = a + te_k$, где $e_k = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$

$$f(a + te_k) = f(a) + \lambda_1 0 + ... + \lambda_{k-1} 0 + \lambda_k t + \lambda_{k+1} 0 + ... + \lambda_m 0 + o(te_k)$$

$$f(..., a_{k-1}, a_k + t, a_{k+1}, ...) = f(a) + \lambda_k t + o(t) -$$

— это и есть определение частной произодной по x_k

$$f_{x_k}'(a) = \lambda_k$$

Здесь еще произошла замена $o(te_k)$ на $o(t)$, т.к. $|te_k| = |t| \cdot |e_k| = |t| \cdot 1 = |t|$

Теперь можем обобщить эту теорему на случай $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$, просто применив доказанный случай для координатных функций $(f_1, f_2, ..., f_l)$

2.9. Достаточное условие дифференцируемости

$f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

$a \in \text{Int } E$

$\exists r > 0 : B(a,r) \subset E$ и в нём $\exists f_1', f_2', ..., f_m'$ и все они непрерывны в a

Тогда

$$f \text{ дифференцируема в } a$$

Доказательство:

$$f(x_1, x_2) - f(a_1, a_2) = \underbrace{f(x_1, x_2) - f(a_1, x_2)} + \underbrace{f(a_1, x_2) - f(a_1, a_2)} \overset{\text{Т. Лагранжа}}{=}$$

$$= f_1'(\overline{x}_1, x_2)(x_1 - a_1) + f_2'(a_1, \overline{x}_2)(x_2 - a_2) =$$

$$= f_1'(a_1, a_2)(x_1 - a_1) + f_2'(a_1, a_2)(x_2 - a_2) + \underbrace{(f_1'(\overline{x}_1, x_2) - f_1'(a_1, a_2))(x_1 - a_1) + (f_2'(a_1, \overline{x}_2) - f_2'(a_1, a_2))(x_2 - a_2)}_{\text{проверим, является ли } o(|x-a|)\text{, чтобы получить определение}}$$

$$(f_1'(\overline{x}_1, x_2) - f_1'(a_1, a_2)) \underbrace{\frac{x_1 - a_1}{|x-a|}}_{\text{по модулю} <1} \xrightarrow[x \to a]{(\star)} 0$$

$(\star)$: т.к. каждая производная непрерывна в точке a, левый множитель стремится к 0, а правый ограничен

Аналогично поступаем с $(f_2'(a_1, \overline{x}_2) - f_2'(a_1, a_2))(x_2 - a_2)$, и получаем, что необходимая нам скобка действительно является $o(|x-a|)$

2.10. Дифференцирование композиции

$F : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$

$G : I \subset \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^n$

$F(E) \subset I$

$a \in \text{Int } E,\ F$ дифф в a

$F(a) \in \text{Int } I,\ G$ дифф в $F(a)$

Тогда:

$$G \circ F - \text{дифф в } a \text{ и } (G \circ F)'(a) = G'(F(a))F'(a)$$

Доказательство:

$F(a+h) = F(a) + F'(a)h + \alpha(h)|h|$

$G(F(a) + k) = G(F(a)) + G'(F(a))k + \beta(k)|k|$

$$G(F(a+h)) = G\left(F(a) + \underbrace{F'(a)h + \alpha(h)|h|}_{\text{обозначим за } k}\right) =$$

$$= G(F(a)) + G'(F(a))(F'(a)h + \alpha(h)|h|) + \beta(k)|F'(a)h + \alpha(h)|h|| =$$

$$= G(F(a)) + G'(F(a))F'(a)h + \underbrace{G'(F(a))\alpha(h)|h|}_{I} + \underbrace{\beta(k)|F'(a)h + \alpha(h)|h||}_{II}$$

При $h \to 0$:

$|I| \overset{(\star)}{\le} \underbrace{C_{G'(F(a))}}_{\text{const}} \cdot \underbrace{|\alpha(h)|}_{\text{б.м.}}|h| = o(h)$

$|II| \le |\beta(k)| \cdot (|F'(a)h| + |\alpha(h)||h|) \overset{(\star)}{\le} \underbrace{|\beta(k)|}_{\text{б.м.}} \cdot \underbrace{\left(C_{F'(a)} + |\alpha(h)|\right)}_{\text{огр}}|h| = o(h)$

Значит $I + II = o(h)$ и то что написано в последней строчке длинного выражения — определение производной

$(\star)$: здесь мы применили оценку при помощи следующей леммы:

Лемма:

$A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ — линейное отображение

$A = \|a_{ij}\|$

Тогда

$$\forall x \in \mathbb{R}^m : |Ax| \le C_A \cdot |x|, \text{ причём } C_A = \sqrt{\sum_{ij} a_{ij}^2}$$

Доказательство: *(Опционально)*

$$|Ax|^2 = \sum_k \left(\sum_i a_{ki} x_i\right)^2 \overset{\text{КБШ}}{\le} \sum_k \left(\left(\sum_i a_{ki}^2\right) \cdot \left(\sum_i x_i^2\right)\right) = C_A^2 |x|^2$$

2.11. Дифференцирование "произведений"

$F, G : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$

$\lambda : E \to \mathbb{R}$

$a \in \text{Int } E$

F, G, λ дифференцируемы в a.

Тогда :

1. λF и $\langle F, G \rangle$ дифференцируемы в a
2. $(\lambda F)'(a) \cdot h = (\lambda'(a)h)F(a) + \lambda(a) \cdot F'(a)h$
3. $(\langle F, G \rangle)'(a)h = \langle F'(a)h, G(a) \rangle + \langle F(a), G'(a)h \rangle$

Доказательство:

1. Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ — координатная функция F.

   Доказав это равенство для нее, мы автоматически докажем его для F

   $$\lambda(a+h) \cdot f(a+h) - \lambda(a) \cdot f(a) = (\lambda(a) + \lambda'(a)h + \alpha(h)|h|) \cdot (f(a) + f'(a)h + \beta(h)|h|) - \lambda(a)f(a) =$$

   $$= \lambda'(a)hf(a) + \lambda(a)f'(a)h + \underbrace{\alpha(h)|h|f(a)}_{o(h)} + \underbrace{\lambda'(a)hf'(a)h}_{|\lambda'(a)h||f'(a)h| \le C_{\lambda'(a)} C_{f'(a)} |h|^2} + ...$$

2. Для начала поймем, что такое скалярное произведение функций:

   $$\langle F, G \rangle(a) \overset{\text{def}}{=} \left(\sum_{i=1}^{l} f_i(a) g_i(a)\right)$$

   $$\langle F, G \rangle'(a)h = \left(\sum_{i=1}^{l} f_i g_i\right)' \Bigg| \ h \overset{(\star)}{=} \sum_i ((f_i'(a)h)g_i(a) + f_i(a)(g_i'(a)h)) = \langle F'(a)h, G(a) \rangle + \langle F(a), G'(a)h \rangle$$

   $(\star)$: здесь мы воспользовались пунктом 1 нашей теоремы для $F := f_i,\ \lambda := g_i$. Это корректно т.к. дифференцируемость F влечет за собой дифференцируемость f_i, g_i, а также т.к. g_i — координатная функция, а значит $g_i : E \to \mathbb{R}$

2.12. Теорема Лагранжа для векторнозначных функций

$F : [a,b] \to \mathbb{R}^m$

F непрерывна на $[a,b]$

F дифференцируема на (a,b)

Тогда:

$$\exists c \in (a,b) : |F(a) - F(b)| \le |F'(c)|(b-a)$$

Доказательство:

$\sphericalangle\ \varphi(t) = \langle F(b) - F(a), F(t) - F(a) \rangle, \quad t \in [a,b]$

$\varphi(a) = 0$

$\varphi(b) = |F(b) - F(a)|^2$

$\varphi'(t) = \langle F(b) - F(a), F'(t) \rangle$ — по теореме о дифференцировании произведений

$|F(a) - F(b)|^2 = \varphi(b) - \varphi(a) \underset{\text{Лагранж}}{=\!=\!=} \varphi'(c)(b-a) = \langle F(b) - F(a), F'(c) \rangle (b-a) \underset{\text{КБШ}}{\le} |F(b) - F(a)| \cdot |F'(c)|(b-a)$

Сократим: $|F(a) - F(b)| \le |F'(c)|(b-a)$

3. Анализ функций действующих $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

3.1. Градиент

$f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

$a \in \operatorname{Int} E$

f – дифференцируема в a

Тогда:

1. $f(a+h) = f(a) + \langle L, h \rangle + o(h)$
2. L – *градиент* f в точке a
3. $L = \operatorname{grad} f(a) = \nabla f(a)$
4. $\nabla f(a) = \left(f'_{x_1}(a), f'_{x_2}(a), ..., {f'}_{x_m}(a)\right)$

3.2. Производная по направлению

$f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

$a \in \operatorname{Int} E$

u – направление ($u \in \mathbb{R}^m, |u| = 1$)

Производная по u в точке a:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tu) - f(a)}{t}$$

3.3. Экстремальное свойство градиента

$f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

$a \in \operatorname{Int} E$

f – дифференцируема в a

$\nabla f(a) \neq 0$

Тогда $\vec{l} = \dfrac{\nabla f(a)}{|\nabla f(a)|}$ – направление наискорейшего изменения f:

$$\forall u \in \mathbb{R}^m : |u| = 1$$

$$-|\nabla f(a)| \leq \frac{\partial f}{\partial u}(a) \leq |\nabla f(a)|$$

Равенство достигается при $u = \pm l$

Доказательство:

$$f(a+tu) = f(a) + \langle \nabla f(a), tu \rangle + o(t)$$

$$\frac{f(a+tu) - f(a)}{t} = \langle \nabla f(a), u \rangle + \frac{o(t)}{t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tu) - f(a)}{t} = \langle \nabla f(a), u \rangle$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial u}(a)\right| = |\langle \nabla f(a), u \rangle| \underset{\text{КБШ}}{\leq} |\nabla f(a)| \cdot \underbrace{|u|}_{=1} = |\nabla f(a)|$$

$$-|\nabla f(a)| \leq \frac{\partial f}{\partial u}(a) \leq |\nabla f(a)|$$

Равенство достигается тогда же, когда достигается равенство в КБШ, то есть в случае коллинеарности векторов $\nabla f(a)$ и u. В этом случае $u = \dfrac{\nabla f(a)}{|\nabla f(a)|}$.

3.4. Независимость частных производных от порядка дифференцирования

$f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$(x_0, y_0) \in \operatorname{Int} E$

В шаре $B((x_0, y_0), r) \subset E$ существуют обе производные f''_{xy}, f''_{yx} и обе непрерывны в (x_0, y_0)

Тогда:

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$$

Доказательство:

$\sphericalangle\ \Delta^2 f(h,k) = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0+k) + f(x_0, y_0)$

$\sphericalangle\ \alpha(h) = \Delta^2 f(h,k)$ при фиксированном k. Заметим, что $\alpha(0) = 0$

$$\Delta^2 f(h,k) = \alpha(h) - \alpha(0) \xlongequal[\text{Лагранж}]{} \alpha'\left(\overline{h}\right)h = \left(f'_x\left(x_0+\overline{h}, y_0+k\right) - f'_x\left(x_0+\overline{h}, y_0\right)\right)h \xlongequal[\text{Лагранж}]{} f''_{xy}\left(x_0+\overline{h}, y_0+\overline{k}\right)hk$$

Первый Лагранж – одномерный лагранж для функции α

Второй Лагранж – у функции f'_x первый параметр одинаковый, поэтому его можно "исключить" и принять за константу. Тогда функция станет только от "второй" переменной, т.е. одномерной, и мы применяем к ней обычного Лагранжа

$$\text{Аналогично } \Delta^2 f(h,k) = f''_{yx}\left(x_0+\tilde{h}, y_0+\tilde{k}\right)hk$$

Рассмотрим двойной предел: $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \dfrac{\Delta^2 f(h,k)}{hk}$:

$$\frac{\Delta^2 f(h,k)}{hk} = f''_{xy}\left(x_0+\overline{h}, y_0+\overline{k}\right) \underset{\substack{h\to 0\\ k\to 0}}{\longrightarrow} f''_{xy}(x_0, y_0)$$

$$\frac{\Delta^2 f(h,k)}{hk} = f''_{yx}\left(x_0+\tilde{h}, y_0+\tilde{k}\right) \underset{\substack{h\to 0\\ k\to 0}}{\longrightarrow} f''_{yx}(x_0, y_0)$$

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \frac{\Delta^2 f(h,k)}{hk} = f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$$

Общая формулировка теоремы:

$f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$,

$f \in C^r(E)$, т.е. существуют все частные производные f всех порядков до r включительно, и они непрерывны

Тогда $\forall a \in E,\ \forall 2 \leq k \leq r,\ \forall (i_1, ..., i_k),\ (j_1, ..., j_k)$ – наборы индексов из $\{1, ..., m\}$, отличающихся только перестановкой:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} ... \partial x_{i_1}}(a) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_k} \partial x_{j_{k-1}} ... \partial x_{j_1}}(a)$$

Доказательство:

То, что два набора отличаются только перестановкой, означает, что один можно переделать в другой при помощи транспозиций. А в предыдущем пункте мы докзали, что при транспозиции равенство сохраняется.

4. Формула Тейлора

4.1. Мультииндекс и обозначения с ним

$k_i \in \mathbb{Z}^+$

$k = (k_1, ..., k_m)$ — мультииндекс

1. $|k| = k_1 + ... + k_m$ — высота мультииндекса
2. $k! = k_1! k_2! ... k_m!$
3. $x \in \mathbb{R}^m,\ x^k = x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... \ x_m^{k_m}$
4. $f_{x^k}^{|k|} = f^{(k)}(a) = \dfrac{\partial^{|k|} f(a)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} ... \partial x_m^{k_m}}$

4.2. Полиномиальная формула

$a_1, ..., a_m \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{N}$

$$(a_1 + a_2 + ... + a_m)^r = \sum_{n_1=1}^{m} \sum_{n_2=1}^{m} ... \sum_{n_r=1}^{m} a_{n_1} a_{n_2} ... a_{n_r} = \sum_{j, |j|=r} \frac{r!}{j!} a^j = \sum_{\substack{j_1+...+j_m=r \\ j_k \geq 0}} \frac{r!}{j_1! ... j_m!} a_1^{j_1} ... a_m^{j_m}$$

Доказательство:

Индукция по r.

$$(a_1 + ... + a_m)^{r+1} = (a_1 + ... + a_m) \sum \frac{r!}{j_1! ... j_m!} a_1^{j_1} ... a_m^{j_m} =$$

$$= \sum \frac{r!}{j_1! ... j_m!} a_1^{j_1+1} ... a_m^{j_m} + ... + \sum \frac{r!}{j_1! ... j_m!} a_1^{j_1} ... a_m^{j_m+1} =$$

$$= \sum_{\substack{k_1+...+k_m=r+1 \\ k_1 \geq 1,\ k_i \geq 0}} \frac{k_1 r!}{k_1! ... k_m!} a_1^{k_1} ... a_m^{k_m} + ... + \sum_{\substack{k_1+...+k_m=r+1 \\ k_m \geq 1,\ k_i \geq 0}} \frac{k_m r!}{k_1! ... k_m!} a_1^{k_1} ... a_m^{k_m} \overset{(\star)}{=}$$

$$\overset{(\star)}{=} \sum_{\substack{k_1+...+k_m=r+1 \\ k_i \geq 0}} \frac{k_1 r!}{k_1! ... k_m!} a_1^{k_1} ... a_m^{k_m} + ... + \sum_{\substack{k_1+...+k_m=r+1 \\ k_i \geq 0}} \frac{k_m r!}{k_1! ... k_m!} a_1^{k_1} ... a_m^{k_m} =$$

$$= \sum_{\substack{k_1+...+k_m=r+1 \\ k_i \geq 0}} \frac{(k_1 + ... + k_m) r!}{k_1! ... k_m!} a_1^{k_1} ... a_m^{k_m} = \sum_{\substack{k_1+...+k_m=r+1 \\ k_i \geq 0}} \frac{(r+1)!}{k_1! ... k_m!} a_1^{k_1} ... a_m^{k_m}$$

$(\star)$: Что произошло? Мы в j-ой сумме, вместо того чтобы считать её при $k_j \geq 1$ начали считать при $k_j \geq 0$. Мы так можем сделать, потому что в новой сумме те слагаемые, для которых $k_j \geq 1$, встречаются в изначальной сумме, а все оставшиеся слагаемые (т.е. те, у которых $k_j = 0$) имеют следующий вид:

$$\frac{k_j \cdot r!}{k_1! ... k_m!} a_1^{k_1} ... a_m^{k_m} = \frac{0 \cdot r!}{k_1! ... k_m!} a_1^{k_1} ... a_m^{k_m} = 0$$

Т.е. они равны 0, а значит не меняют сумму

4.3. Лемма о дифференцировании "сдвига"

$f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$,

$f \in C^r(E)$,

$a \in E,\ h \in \mathbb{R}^m$

Пусть, при $t \in [-1, 1] : a + th \in E$

$\vartriangleleft \varphi(t) := f(a + th)$

Тогда, при $k \leq r, \varphi^{(k)}(t) = \sum_{j, |j|=k} \frac{k!}{j!} h^j \frac{\partial^{|j|} f}{\partial x^j}(a + th)$

Доказательство:

$$\varphi^{(k)}(t) = \sum_{j_1=1}^{m} \sum_{j_2=1}^{m} ... \sum_{j_k=1}^{m} \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} ... \partial x_{j_k}}(a + th) h_{j_1} ... h_{j_k}$$

Заметим, что $\sum_{j_1=1}^{m} \sum_{j_2=1}^{m} ... \sum_{j_k=1}^{m} h_{j_1} ... h_{j_k} = \sum_{j, |j|=k} \frac{k!}{j!} h^j$ (полиномиальная формула)

а в нашем выражении рядом с $h_{j_1} ... h_{j_m}$ стоит множитель $\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} ... \partial x_{j_m}}(a + th)$,

Причём перед одинаковым набором j стоит одинаковый множитель (независимость ч.п. от порядка дифф-я)

$$\sum_{j_1=1}^{m} \sum_{j_2=1}^{m} ... \sum_{j_k=1}^{m} \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} ... \partial x_{j_m}}(a + th) h_{j_1} ... h_{j_k} = \sum_{j, |j|=k} \frac{k!}{j!} h^j \frac{\partial^{|j|} f}{\partial x^j}(a + th) = \varphi^{(k)}(t), \text{ ч.т.д.}$$

4.4. Формула Тейлора

$E \subset \mathbb{R}^m,\ f : E \to \mathbb{R},\ f \in C^{r+1}(E)$

Пусть $B(a, r) \subset E$ и $x \in B(a, r)$

Остаток в форме Лагранжа:

$\exists \Theta \in (0, 1)$:

$$f(x) = \sum_{j : |j| \leq r} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (x - a)^j + \sum_{j : |j| = r+1} \frac{f^{(j)}(a + \Theta(x - a))}{j!} (x - a)^j$$

Доказательство:

$f(a + h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} h + \frac{f''(a)}{2!} h^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} h^n + \frac{f^{(n+1)}(a + \Theta h)}{(n+1)!} h^{n+1}$ — обычная ф-ла Тейлора.

$$\varphi(t) := f(a + th),\ \text{где } h = x - a,\ \varphi(0) = f(a)$$

$$f(x) = \varphi(1) \underset{\text{ф.Тейлора}}{=} \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!} 1 + \frac{\varphi''(0)}{2!} 1^2 + ... + \frac{\varphi^{(r)}(0)}{r!} 1^r + \frac{\varphi^{(r+1)}(\Theta)}{(r+1)!} 1^{r+1} =$$

$$= \left[\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} = \sum_{|j|=k} \frac{\partial^{|j|} f}{\partial x^j}(a) \cdot \frac{1}{j!} (x - a)^j, \text{лемма о дифф-и “сдвига”} \right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{r} \sum_{|j|=k} \frac{\partial^{|j|} f}{\partial x^j}(a) \cdot \frac{1}{j!} (x - a)^j + \sum_{|j|=r+1} \frac{1}{j!} (x - a)^j \cdot \frac{\partial^{|j|} f}{\partial x^j}(a + \Theta(x - a)) =$$

$$= \sum_{j : |j| \leq r} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (x - a)^j + \sum_{j : |j| = r+1} \frac{f^{(j)}(a + \Theta(x - a))}{j!} (x - a)^j$$

Остаток в форме Пеано:

$$f(x) = \sum_{j : |j| \leq r} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (x - a)^j + o(|x - a|^r)$$

Доказательство:

Рассмотрим формулу с остатком в форме Лагранжа, и докажем что последняя сумма является $o(|x - a|^r)$

Заметим, что $\frac{f^{(j)}(a + \Theta(x - a))}{j!}$ — ограниченно, т.к. можно перебрать все $j : |j| = r + 1$ и взять максимум получившегося множества значений этой штуки.

$\sqsupset \forall j : |j| = r + 1 : \frac{f^{(j)}(a + \Theta(x - a))}{j!} < C$

Осталось доказать, что $\sum_{j : |j| = r+1} (x - a)^j = o(|x - a|^r)$

Если мы докажем что $\forall j : (x - a)^j \overset{(\star)}{=} o(|x - a|^r)$, то $\sum_{j : |j| = r+1} (x - a)^j$ — сумма конечного числа $o(|x - a|^r)$, поэтому она тоже является $o(|x - a|^r)$

Доказательство $(\star)$:

Мы знаем, что $j_1 + ... + j_m = r + 1$

Докажем, что

$$(x - a)^j = (x_1 - a_1)^{j_1} \cdot ... \cdot (x_m - a_m)^{j_m} = o(|x - a|^r), \quad x \to a$$

$$h_1^{j_1} \cdot ... \cdot h_m^{j_m} = o(|h|^r) \quad h \to 0$$

$$\frac{h_1^{j_1} \cdot ... \cdot h_m^{j_m}}{|h|^{j_1 + ... + j_m}} \cdot |h| = \underbrace{\left(\frac{h_1}{|h|} \right)}_{<1}^{j_1} \cdot \underbrace{\left(\frac{h_2}{|h|} \right)}_{<1}^{j_2} \cdot ... \cdot \underbrace{\left(\frac{h_m}{|h|} \right)}_{<1}^{j_m} \cdot |h| \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

5. Линейные отображения

5.1. Норма линейного оператора

$\mathrm{Lin}(X, Y)$ — множество линейных отображений $X \to Y$

$\mathrm{Lin}(X, Y)$ — линейное пространство.

$\sphericalangle\ A \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$

$\|A\|_{m,n} = \sup\limits_{|x|=1} |Ax|$

5.2. Лемма об условиях, эквивалентных непрерывности линейного оператора

X, Y — нормированные, линейные пространства.

$A \in \mathrm{Lin}(X, Y)$

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. A — ограничен, т.е $\|A\| < +\infty$
2. A — непрерывен в $0 \in X$
3. A — непрерывен всюду на X
4. A — равномерно неперерывен: $(\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x_1, x_2 : |x_1 - x_2| < \delta \quad |Ax_1 - Ax_2| < \varepsilon)$

Доказательство:

$4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2:$

Зафиксируем в пункте 4 некотрый x_2, и получим определение обычной непрерывности в x_2. Выбирая любой $x_2 \in X$ мы докажем пункты 3 и 2

$2 \Rightarrow 1:$

Определение непрерывности в 0: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_0 : \forall x \in B(0, \delta_0) : |Ax| < \varepsilon$

Выберем в качестве $\varepsilon := 1$, а в качестве $\delta := \dfrac{\delta_0}{2}$, чтобы x можно было брать из $\overline{B(0, \delta)}$

$\varepsilon = 1, \exists \delta : \forall x \in \overline{B(0, \delta)} : \quad |Ax| < 1 \overset{\div\delta}{\Rightarrow} \left|A\dfrac{x}{\delta}\right| < \dfrac{1}{\delta}$

В частности: $\forall x : |x| = \delta : \quad \left|A\dfrac{x}{\delta}\right| < \dfrac{1}{\delta}$

$\|A\| = \sup\limits_{|x|=1} |Ax| = \sup\limits_{|x|=\delta} \left|A\dfrac{x}{\delta}\right| < \dfrac{1}{\delta}$

$1 \Rightarrow 4:$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta := \dfrac{\varepsilon}{\|A\|}\ \forall x_1, x_2 : |x_1 - x_2| < \delta : |Ax_1 - Ax_2| = |A(x_1 - x_2)| \le \|A\| \cdot |x_1 - x_2| < \varepsilon$

5.3. Теорема Лагранжа для отображений

$F : \underset{\text{открытое}}{D} \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ — дифференцируемо на D

$[a, b] = \{a + t \cdot (b - a), \quad t \in [0, 1]\} \subset D$

Тогда

$$\exists c \in (a, b) \quad (\Leftrightarrow \exists \Theta \in (0, 1) : c = a + \Theta(b - a)) :$$

$$|F(b) - F(a)| \le \|F'(c)\| \cdot |b - a|$$

Доказательство:

$\sphericalangle\ f(t) = F(a + t(b - a)),\ t \in [0, 1]$

$f'(t) = F'(a + t(b - a)) \cdot (b - a)$

По т. Лагранжа для векторнозначных функций:

$$|f(1) - f(0)| \le |f'(\Theta)| \cdot (1 - 0) = |F'(a + \Theta(b - a)) \cdot (b - a)|$$

$$|F(b) - F(a)| = |f(1) - f(0)| \le \left|F'\left(\underbrace{a + \Theta(b - a)}_{=c}\right) \cdot (b - a)\right| \le \|F'(c)\| \cdot |b - a|$$

5.4. Теорема об обратимости линейного отображения, близкого к обратимому

Обозначение:

$$B \in \Omega_m \Leftrightarrow \begin{cases} B \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m) \\ B - \text{обратим} \end{cases}$$

Лемма:

$B \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$

$\exists c > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^m : \quad |Bx| \ge c|x|$

Тогда:

$$B - \text{обратим и } \left\|B^{-1}\right\| \le \frac{1}{c}$$

Доказательство:

$\ker B = \{0\}$, т.к. $\forall x \ne 0 \quad |Bx| \ge c|x| > 0 \Rightarrow B$ инъективен, а значит обратим

$B^{-1}y = x \Leftrightarrow y = Bx$

$\left|B^{-1}y\right| = |x| \le \dfrac{1}{c}|Bx| = \dfrac{1}{c}|y|$

$\left\|B^{-1}\right\| = \sup\limits_{|y|=1} \left(\left|B^{-1}y\right|\right) \le \sup\limits_{|y|=1} \left(\dfrac{1}{c}|y|\right) = \dfrac{1}{c}$

Замечание: (фан-факт), используемое далее в теореме:

$A \in \Omega_m \quad \Rightarrow \quad |x| = \left|A^{-1}Ax\right| \le \left\|A^{-1}\right\| \cdot |Ax| \Rightarrow |Ax| \ge \dfrac{|x|}{\|A^{-1}\|}$

Теорема:

$L \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m), \quad L \in \Omega_m$

$\sqsupset M \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m) : \|L - M\| < \dfrac{1}{\|L^{-1}\|}$

Тогда:

1. $M \in \Omega_m$, что означает, что Ω_m — открыто
2. $\left\|M^{-1}\right\| \le \dfrac{1}{\left\|L^{-1}\right\|^{-1} - \|L - M\|}$
3. $\left\|M^{-1} - L^{-1}\right\| \le \dfrac{\left\|L^{-1}\right\|}{\left\|L^{-1}\right\|^{-1} - \|L - M\|} \cdot \|L - M\|$

Доказательство:

Пункты 1 и 2:

$Mx = Lx - (L - M)x$

$|Mx| = |Lx - (L - M)x| \ge |Lx| - |(L - M)x| \overset{(\star)}{\ge} \dfrac{1}{\|L^{-1}\|}|x| - \|L - M\||x| = \left(\dfrac{1}{\|L^{-1}\|} - \|L - M\|\right)|x|$

$(\star)$ — здесь мы по замечанию оценили $|Lx|$, т.к. L по условию обратим

Итого мы получили что $|Mx| \ge \left(\dfrac{1}{\|L^{-1}\|} - \|L - M\|\right)|x| \Rightarrow$ по лемме:

1. M — обратим (т.е. $M \in \Omega_m$)
2. $\left\|M^{-1}\right\| \le \dfrac{1}{\left\|L^{-1}\right\|^{-1} - \|L - M\|}$

Пункт 3:

$M^{-1} - L^{-1} = M^{-1}(L - M)L^{-1}$

Для доказательства раскроем скобки: $\left(M^{-1}L - E\right)L^{-1} = M^{-1}E - EL^{-1} = M^{-1} - L^{-1}$

$\left\|M^{-1} - L^{-1}\right\| \le \left\|M^{-1}\right\| \cdot \|L - M\| \cdot \left\|L^{-1}\right\|$ — то что и надо было, если применить оценку на первый множитель по свойству 2

5.5. Непрерывность вычисления обратного оператора

Отображение: $\Omega_m \to \Omega_m : L \mapsto L^{-1}$ — непрерывно на Ω_m

Доказательство:

$A \in \Omega_m$, ? непрерывность в точке A

Будем пытаться доказать по Гейне:

$B_k \to A, \quad B_k^{-1} \overset{(?)}{\to} A^{-1}$

По предыдущей теореме $\left\|B_k^{-1} - A^{-1}\right\| \le \underbrace{\dfrac{\left\|A^{-1}\right\|}{\left\|A^{-1}\right\|^{-1} - \underbrace{\|B_k - A\|}_{\to 0}}}_{\text{ограниченная}} \cdot \underbrace{\|B_k - A\|}_{\text{б.м.}} \to 0$

5.6. Теорема о непрерывно дифференцируемых отображениях

$F : \underset{\text{открытое}}{D} \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ — дифференцируемо на D

Тогда $(1) \Leftrightarrow (2)$

$(1) : F \in C^1(D)$, т.е. $\forall i \in \{1, ..., l\}\ \forall k \in \{1, ..., m\} \quad \exists \dfrac{\partial f_i}{\partial x_k}$ — непрерывны на D

(2) : Отображение $F' : D \to \mathrm{Lin}\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l\right)$, сопоставляющее точке множества производный оператор в этой точке

— непрерывно

Доказательство:

$(1) \Rightarrow (2):$

$$\|F'(y) - F'(x)\| \underset{\substack{\text{оценка} \\ \text{нормир.} \\ \text{лин. отоб.}}}{\le} \left(\sum_{i,k} \underbrace{\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(y) - \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x)\right)^2}_{\to 0 \text{ при } y \to x}\right)^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{ml\varepsilon^2} = \sqrt{ml} \cdot \varepsilon$$

$(2) \Rightarrow (1):$

$e_k \in \mathbb{R}^m : e_k = \left(0, ..., \underbrace{1}_{k}, ..., 0\right)$

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(y) - \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x)\right| \le \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(y) - \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x)\right)^2} = |(F'(y) - F'(x))e_k| \le \underbrace{\|F'(y) - F'(x)\|}_{\to 0 \text{ при } y \to x} \cdot \underbrace{|e_k|}_{=1}$$

— это и есть непрерывность частной производной $\Rightarrow$ победа

6. Экстремумы

6.1. Локальный максимум, минимум, экстремум

$f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, \quad x_0 \in D$

1. x_0 — точка локального максимума: $\exists U(x_0) \forall x \in \mathring{U}(x_0) \cap D : f(x_0) \geq f(x)$
2. x_0 — точка строгого локального максимума, если в последнем неравенстве заменить $\geq$ на $>$
3. x_0 — точка (строгого) локального минимума, если заменить знак на $\leq$ $(<)$
4. x_0 — экстремум, если выполнено хотя бы одно из пунктов $1 - 3$

6.2. Теорема Ферма. Необходимое условие экстремума. Теорема Ролля

Теорема Ферма:

$f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, \quad x_0 \in \mathrm{Int}(D)$

x_0 — локальный экстремум

f — дифф. в x_0

Тогда

$$\forall l \in \mathbb{R}^m, |l| = 1 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial l}(x_0) = 0$$

Доказательство:

$g(t) = f(x_0 + tl), \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$t = 0$ — локальный экстремум $g \xRightarrow[\text{теорема Ферма}]{\text{одномерная}} g'(0) = 0 = \dfrac{\partial f}{\partial l}(x_0)$

Следствие 1 (*Необходимое условие экстремума*)

$$x_0 - \text{экстремум} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) = 0, \ \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(x_0) = 0$$

Следствие 2 (*Теорема Ролля*)

$K \subset \mathbb{R}^m$ — компакт

$f : K \to \mathbb{R}$

f — непрерывна на K

f — дифференцируема в $\mathrm{Int}\ K$

$f \Big|_{\partial K} = \mathrm{const}$ — значения f на всех граничных точках K совпадают

Тогда:

$$\exists c \in \mathrm{Int}(K) : \mathrm{grad}\ f(c) = 0$$

Доказательство:

По теореме Вейрштрасса о непрерывном образе компакта: $f(K)$ — компакт

Т.к. $f : K \to \mathbb{R} \Rightarrow f(K)$ — отрезок, поэтому у него есть наименьшее и наибольшее значение.

Рассмотрим один из прообразов этого наименьшего или наибольшего значения, лежащий в $\mathrm{Int}(K)$.

Докажем, что такой найдётся. Пусть не так, и как наименьшее, так и наибольшее значения достигаются на границе, тогда $f = \mathrm{const}$ на всём K, стало быть в любой точке из внутренности достигается наименьшее значение, противоречие!

Найденная точка будет внутренней и будет точкой локального экстремума f

Во внутренней точке локального экстремума все частные производные равны 0, поэтому градиент тоже будет равен 0

6.3. Положительно-, отрицательно-, незнако- определенная квадратичная форма

1. $Q(h) = \sum\limits_{i,j=1}^{m} a_{ij} h_i h_j$ — квадратичная форма
2. $\forall h \neq 0 : Q(h) > 0$ — положительно опр. форма
3. $\forall h \neq 0 : Q(h) < 0$ — отрицательно опр. форма
4. $\exists h : Q(h) > 0, \ \exists \tilde{h} : Q(\tilde{h}) < 0$ — незнакоопределеная форма

[[Опционально]]

5. $\forall h : Q(h) \geq 0, \ \exists \tilde{h} \neq 0 : Q(\tilde{h}) = 0$ — положительно полуопр. форма / положительно опр. вырожденная
6. Аналогично отрицательная полуопр. / отрицательная опр. вырожденная

6.4. Лемма об оценке квадратичной формы и об эквивалентных нормах

1. Q — положительно определенная квадратичная форма

   Тогда:

$$\exists \gamma_Q > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^m : Q(x) \geq \gamma_Q \cdot |x|^2$$

2. $p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ — произвольная норма

   Тогда:

$$\exists C_1, C_2 : \forall x \in \mathbb{R}^m : C_1|x| \leq p(x) \leq C_2|x|$$

Доказательство:

1. $\gamma_Q := \min\limits_{|x|=1} Q(x) > 0$ — он достигается по т. Вейрштрасса (так как значения на компакте)

   $x \neq 0 : Q(x) = Q\left(|x| \cdot \dfrac{x}{|x|}\right) = |x|^2 Q\left(\dfrac{x}{|x|}\right) \geq |x|^2 \cdot \gamma_Q$, т.к. $\dfrac{x}{|x|}$ — единичный вектор

2. $C_1 := \min\limits_{|x|=1} p(x), \quad C_2 := \max\limits_{|x|=1} p(x)$ — существование также следует из т. Вейрштрасса, но надо доказать непрывность $p(x)$.

   Разложим по базису $\{e_i\}_{i=1}^m$:

$$|p(x) - p(y)| \leq p(x - y) = p\left(\sum_{k=1}^{m} (x_k - y_k) e_k\right) \leq \sum_{k=1}^{m} p((x_k - y_k) e_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} |x_k - y_k| p(e_k) \underset{\text{КБШ}}{\leq} |x - y| \sqrt{\sum_{k=1}^{m} p^2(e_k)} = |x - y| M$$

$p\left(|x| \cdot \dfrac{x}{|x|}\right) = |x| \cdot p\left(\dfrac{x}{|x|}\right)$, и дальше оцениваем $C_1 \leq p\left(\dfrac{x}{|x|}\right) \leq C_2$, т.к. $\dfrac{x}{|x|}$ — единичный вектор.

6.5. Достаточное условие экстремума

$f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, \ f \in C^2(D), \ D$ — открытое

$x_0 \in D : f'_{x_1}(x_0) = 0, \ldots, f'_{x_m}(x_0) = 0$

$Q(h) := \mathrm{d}^2 f(x_0, h)$

Тогда:

1. Если $Q(h)$ — положительна опр., то x_0 — локальный $\min$
2. Если $Q(h)$ — отрицательна опр., то x_0 — локальный $\max$
3. Если $Q(h)$ — неопр., то x_0 — не экстремум

[[Опционально]]

4. Если $Q(h)$ — положительно опр. вырожденная, то x_0 может быть и $\min$, и не экстремумом
5. Аналогично для отрицательно опр. вырожденной

Доказательство:

Пункт 1:

В определении экстремума необходимо неравенство в только в некоторой области, поэтому будем рассматривать при $h \to 0$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \underbrace{\mathrm{d}f(x_0, h)}_{=0} + \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f(x_0 + \Theta h, h) =$$

$$= f(x_0) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(x_0 + \Theta h) h_k^2 + \sum_{k<j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(x_0 + \Theta h) h_k h_j =$$

$$= f(x_0) + \frac{1}{2}Q(h) + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(x_0 + \Theta h) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(x_0)\right) h_k^2 + \underbrace{\sum_{k<j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(x_0 + \Theta h) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(x_0)\right) h_k h_j}_{\text{б.м. при } h \to 0 \quad h_j \cdot h_k \leq |h|^2}}_{|\ldots| \leq \text{ б.м. } \cdot |h|^2 \leq \frac{1}{4}\gamma_Q |h|^2 \text{ при достаточно малых } |h|} \geq$$

$$\geq f(x_0) + \frac{1}{2}\gamma_Q |h|^2 - \frac{1}{4}\gamma_Q |h|^2 \Rightarrow x_0 - \text{точка минимума}$$

Пункт 2 — аналогично

Пункт 3:

Рассмотрим $h_*, h^* : Q(h^*) > 0, \ Q(h_*) < 0$

Провернем то же рассуждение, что и в пункте 1 для $f(x_0 + t \cdot h^*)$ и будем устремлять t к 0. Получим, что вдоль направления $h^* : f(x_0) < f(x_0 + t \cdot h^*)$, а вдоль направления $h_* : f(x_0) > f(x_0 + t \cdot h_*)$, поэтому x_0 — не экстремум

7. Творческий кризис

7.1. Диффеоморфизм

$F : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, \quad O$ — область (открыто и связно)

Тогда F — диффеоморфизм, если:

1. F — обратимо
2. F — дифференцируемо
3. F^{-1} — дифференцируемо

7.2. Формулировка теоремы о гладкости обратного отображения

$T : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, \quad O$ — открыто

$T \in C^r(O)$

$r = 1, 2, ..., \infty$

T — обратимо

$\forall x \in O : \det T'(x) \neq 0$

Тогда:

1. $T^{-1} : T(O) \to \mathbb{R}^m, \quad T^{-1} \in C^r(T(O))$
2. $(T^{-1})'(y_0) = (T'(x_0))^{-1}, \quad$ где $y_0 = T(x_0)$

7.3. Лемма о приближенных значениях дифференцируемого отображения

1. $F : \underset{\text{откр}}{O} \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, \quad F$ — дифф. в $x \in O$

   Пусть $\det F'(x) \neq 0$ (т.е. $F'(x)$ — обратимый)

   Тогда:

$$\exists c, \delta > 0 : \quad \forall h : |h| < \delta : \quad |F(x+h) - F(x)| \geq c|h|$$

2. $F \in C^1(O), \quad x \in O$

   Тогда при достататочно маленьких $|h|$:

$$|F(x+h) - F(x) - F'(x)h| \leq M \cdot |h|, \quad \text{где } M := \sup_{z \in [x, x+h]} \|F'(z) - F'(x)\|$$

Доказательство:

1. Пусть F — линейное отображение

   $\forall h \in \mathbb{R}^m : |h| = |F^{-1}Fh| \leq \|F^{-1}\| \cdot |Fh| = \|F^{-1}\| \cdot |F(x+h) - F(x)|$

   То есть $|F(x+h) - F(x)| \geq \dfrac{1}{\|F^{-1}\|}|h|$, то есть $c = \dfrac{1}{\|F^{-1}\|}$

   В общем случае:

   $|F(x+h) - F(x)| \overset{(\star)}{=} |F'(x)h - \alpha(h)|h|| \geq |F'(x)h| - |\alpha(h)| \cdot |h| \overset{(\star\star)}{\geq} \dfrac{1}{\|(F'(x))^{-1}\|} \cdot |h| - \dfrac{1}{2\|(F'(x))^{-1}\|} \cdot |h|$

   $(\star)$: Вообще то в определении должно быть $+\alpha(h)|h|$, но т.к. $\alpha(h)$ — б.м., то мы можем заменить её на $-\alpha(h)$, и она все еще остаентся б.м. и определение будет корректным

   $(\star\star)$: выберем такое δ: при $|h| < \delta : \quad x + h \in O$ и $|\alpha(h)| < \dfrac{1}{2\|(F'(x))^{-1}\|}$

   Тогда наше $c := \dfrac{1}{2\|(F'(x))^{-1}\|}$

2. $z \in U(x) \subset O$

   $\sphericalangle\ T(z) := F(z) - F'(x) \cdot z$

   $T'(z) = F'(z) - F'(x)$

   $|F(x+h) - F(x) - F'(x) \cdot h| = |T(x+h) - T(x)| \overset{\text{Лагранж}}{\leq} \sup\limits_{z \in [x, x+h]} \Big\| \underbrace{F'(z) - F'(x)}_{\text{это } T'(z)} \Big\| \cdot |h|$

7.4. Теорема о сохранении области

$F : \underset{\text{откр.}}{O} \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$

F — дифф. на O

$\forall x \in O : \det F'(x) \neq 0$

Тогда:

$$F(O) \text{ — открытое мн-во}$$

Доказательство:

Берем $y_0 \in F(O)$ $y_0 = F(x_0) \quad ?y_0$ — внутренная т. $F(O)$

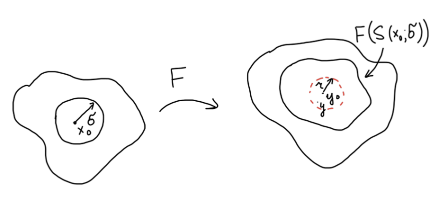
По Лемме $\exists c, \delta$: $\forall h, |h| \leq \delta \quad |F(x_0 + h) - F(x_0)| \geq c \cdot |h|$

В частности при $|h| = \delta \quad F(x_0 + h) \neq F(x_0)$

$$r := \frac{1}{2} \operatorname{dist} (y_0, F(S(x_0, \delta))) > 0$$

$$\operatorname{dist} := \inf \left(\rho(y_0, z), z \in \underbrace{F \Big(\underbrace{S(...)}_{\text{комп.}} \Big)}_{\text{компакт}} \right)$$

Причем min достигается по т. Вейрштрасса.



Теперь проверим, что $B(y_0, r) \subset F(O)$

Докажем, что $\forall y \in B(y_0, r)\ \exists x \in B(x_0, \delta) \quad y = F(x)$

Пусть $g(x) = |F(x) - y|^2$ — найдем min в замкнутом шаре $x \in \overline{B(x_0, \delta)}$ (min существует по т. Вейрештрасса) и покажем, что он достигается в открытом.

При $x \in S(x_0, \delta) : g(x) > r^2$, так как $|F(x) - y| \geq |F(x) - y_0| - |y_0 - y| > r$

А значит min находится внутри шара.

$$g(x) = \sum_{i=1}^{m} (F_i(x) - y_i)^2$$

Необходимое |условие экстремума:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x_1}(x) = 0 : \quad \sum\limits_{i=1}^{m} 2(F_i(x) - y_i) \dfrac{\partial F_i(x)}{\partial x_1} = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial g}{\partial x_m}(x) = 0 : \quad \sum\limits_{i=1}^{m} 2(F_i(x) - y_i) \dfrac{\partial F_i(x)}{\partial x_m} = 0 \end{cases}$$

$$F'(x) \cdot (2(F(x) - y)) = 0$$

А значит, так как $\det F' \neq 0 \Rightarrow F(x) = y$

7.5. Следствие о сохранении области для отображений в пространство меньшей размерности

$F : \underset{\text{откр.}}{O} \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$

$l < m$

$F \in C^1(O)$

$\operatorname{rang} F'(x) = l$

Тогда:

$$F(O) \text{ — открытое мн-во}$$

Доказательство:

Зафиксируем точку x_0. Пусть ранг матрицы реализуется на столбцах $x_1 ... x_l$, то есть определитель из столбцов $x_1 ... x_l \neq 0$:

$$\det \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x_0) \right)_{i,j=1...l} \neq 0$$

Для близких точек к x_0 тоже $\neq 0$

$$\tilde{F} : O \to \mathbb{R}^m \quad \tilde{F} = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \\ \vdots \\ F_{l(x)} \\ x_{l+1} \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

$$\tilde{F}'(x) = \left[\begin{array}{c:c} \multicolumn{2}{c}{F'(x)} \\ \hdashline 0 & E_{m-l} \end{array} \right]$$

$$\det \tilde{F}'(x) = \det \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1...l} \cdot \det E_{m-l} \neq 0 \text{ в окр. } x_0$$

Тогда в $U(x_0)$ $\tilde{F}$ удовлетворяет теореме $\Rightarrow \tilde{F}(U(x_0))$ — открыто в $\mathbb{R}^m \Rightarrow F(U(x_0)) = P_{\mathbb{R}^l}(\tilde{F}(U(x_0)))$ — открыто в $\mathbb{R}^l$

7.6. Теорема о локальной обратимости

$F : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$

$F \in C^1(O)$

$x_0 \in O$

$\det F'(x_0) \neq 0$

Тогда:

$$\exists U(x_0) : F \Big|_{U(x_0)} \text{ — диффеоморфизм.}$$

Доказательство:

Возьмём $U(x_0) \subset O$ так, чтобы:

- $\forall x \in U(x_0) : \det F'(x) \neq 0$
- $\|F'(x) - F'(x_0)\| \leq \dfrac{C}{4}, \quad C := \dfrac{1}{\|(F')^{-1}(x_0)\|}$

Найдем разность значений функции в двух близких точках немного странным способом:

$$F(x+h) - F(x) = (F(x+h) - F(x) - F'(x)h) + (F'(x)h - F'(x_0)h) + F'(x_0)h$$

Далее воспользуемся $|a + b + c| \geq |c| - |a| - |b|$:

$$|F(x+h) - F(x)| \geq |F'(x_0)h| - |F(x+h) - F(x) - F'(x)h| - |F'(x)h - F'(x_0)h| \geq$$

$$\geq C \cdot |h| - M \cdot |h| - \|F'(x) - F'(x_0)\| \cdot |h| \geq C|h| - M|h| - \frac{C}{4}|h|$$

Оценка на первое слагаемое следует из теоремы о приближенных значениях дифференцируемого отображения: $|F'(x_0)h| \geq \dfrac{1}{\|(F')^{-1}(x_0)\|}$, на второе слагаемое из той же теоремы 2 пункт, на третье - из выбора $U(x_0)$

$M := \sup\limits_{z \in [x, x+h]} \|F'(z) - F'(x)\| \leq \sup\limits_{z \in [x, x+h]} \|F'(z) - F'(x_0)\| + \sup\limits_{z \in [x, x+h]} \|F'(x_0) - F'(x)\| \leq \dfrac{C}{4} + \dfrac{C}{4} = \dfrac{C}{2}$ в силу неравенства треугольника.

Итоговая оценка: $|F(x+h) - F(x)| \geq \dfrac{C}{4}|h| > 0$

Следовательно, F — обратимо в $U(x_0)$, а значит в этой окрестности удовлетворяет теореме о гладкости обратного отображения $\Rightarrow F \Big|_{U(x_0)}$ — диффеоморфизм.

7.7. Формулировка теоремы о локальной обратимости в терминах систем уравнений

$f_i \in C^1$

$$\begin{cases} f_1(x_1 ... x_m) = y_1 \\ f_2(x_1 ... x_m) = y_2 \\ \vdots \\ f_m(x_1 ... x_m) = y_m \end{cases}$$

Пусть (x_0, y_0) — решение этой системы, $F = (f_1 ... f_m)$

$\det F'(x_0) \neq 0$. Тогда $\exists U(y_0)$: $\forall y \in U(y_0)$ система имеет решение, C^1 — гладко зависящее от y

Т.е. если $x_1(y_1, ..., y_m), ..., x_m(y_1, ..., y_m)$ - функции сопоставляющие игрекам какое-то решение системы, то тогда эти функции C^1 гладко зависят от y.

7.8. Теорема о неявном отображении

$F : O \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$

$F \in C^r$

$(a, b) \in O, F(a, b) = 0$

$\det F'_y(a, b) \neq 0$

Тогда:

- $\exists P \subset \mathbb{R}^m$ — откр. $a \in P$
- $\exists Q \subset \mathbb{R}^n$ — откр. $b \in Q$
- $\exists!\ \varphi : P \to Q, \varphi \in C^r : \forall x \in P : F(x, \varphi(x)) = 0$

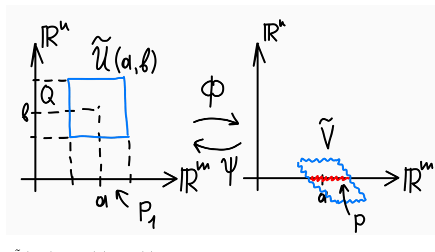
И ещё $\varphi'(x) = -(F'_y(x, \varphi(x)))^{-1} \times F'_x(x, \varphi(x))$

Доказательство

Пусть $\Phi : O \to \mathbb{R}^{m+n}, \ \Phi(x, y) = (x, F(x, y)) \in C^r, \ \Phi' = \left[\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline F'_x & F'_y \end{array} \right]$

$\det \Phi'(x, y) = \det E \cdot \det F'_y(x, y)$

Выберем $\tilde{U}(a, b)$ так, чтобы внутри неё $\det \Phi' \neq 0, \ \Phi \Big|_{\tilde{U}(a,b)}$ - удовлетворяет теореме о локальной обратимости $\Rightarrow \Phi \Big|_{\tilde{U}(a,b)}$ — диффеоморфизм.



1. Можно считать, что $\tilde{U}(a, b) = P_1(a) \times Q(b)$
2. $\tilde{V} := \Phi(\tilde{U}(a, b))$
3. $\exists \Psi = \Phi^{-1}$, так как Φ — диффеоморфизм. $\Psi : \tilde{V} \to \tilde{U}, \Psi \in C^r$
4. Ψ сохраняет первые m координат, т. е. $\Psi(u, v) = (u, H(u, v)), H \in C^r$
5. $P := \tilde{V} \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}) \subset \mathbb{R}^m$
6. $\varphi : P \to Q, \varphi = H(x, 0), \varphi \in C^r$ покажем, что φ подходит : $F(x, \varphi(x)) = F(x, H(x, 0)) = F(\Psi(x, 0)) = 0$

Докажем единственность:

$x \in P, \ y \in Q, \ F(x, y) = 0 :$

$(x, y) = \Psi(\Phi(x, y)) = \Psi(x, 0) = (x, H(x, 0)) = (x, \varphi(x)) \Rightarrow y = \varphi(x)$

Пункт 4:

$F(x, \varphi(x)) = 0$, по теореме о дифференцировании композиции:

$(F(x, \varphi(x)))' = \left[F'_x(x, \varphi(x)) \,\Big|\, F'_y(x, \varphi(x)) \right] \times \left[\dfrac{E_{m \times m}}{\varphi'(x)} \right] = F'_x(x, \varphi(x)) + F'_y(x, \varphi(x)) \times \varphi'(x) = 0$

$\varphi'(x) = -(F'_y(x, \varphi(x)))^{-1} \times F'_x(x, \varphi(x))$

7.9. Формулировка теоремы о неявном отображении в терминах систем уравнений

Дана система из n уравнений, $f_i \in C^r$

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, ..., x_m, y_1, ..., y_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_m, y_1, ..., y_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_m, y_1, ..., y_n) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

Пусть $(a, b) = (a_1, ... a_m, b_1 ... b_n)$ — решение системы и $\det \left(\dfrac{\partial F}{\partial y}(a, b) \right) \neq 0$. Тогда $\exists U(a) \subset \mathbb{R}^m$ и $\exists! \Phi \in C^r$, такие, что $\forall x \in U(a) \quad (x, \Phi(x))$ — тоже решение системы.

7.10. Простое k-мерное гладкое многообразие в $\mathbb{R}^m$

$M \subset \mathbb{R}^m$ — простое k —мерное C^r- гладкое многообразие в $\mathbb{R}^m$, если:

- $\exists \Phi : \underset{\text{область}}{O} \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ (гомеоморфизм)
- $\Phi(O) = M$ (биекция)
- $\Phi \in C^r$
- $\forall x \in O \quad \operatorname{rang} \Phi'(x) = k$ $(1 \leq k < m)$

Пример:

Отркытая полусфера в $\mathbb{R}^3$ с положительным z

$\Phi : B(0, R) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$\Phi(x, y) = \left(x, y, \sqrt[2]{R^2 - x^2 - y^2}\right)$

В одну сторону очевидно непрерывно, а обратно потому что проекция.

Матрица Якоби = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{x}{\sqrt[2]{\cdots}} & -\frac{y}{\sqrt[2]{\cdots}} \end{pmatrix}$ (очевидно ранг 2)

Гомеоморфизм, чтобы исключить приколы, типа иррациональной обмотки тора.

7.11. Теорема о задании гладкого многообразия системой уравнений

$M \subset \mathbb{R}^m \quad 1 \leq k < m \quad 1 \leq r \leq \infty$

Тогда $\forall p \in M$ эквивалентно:

1) $\exists U(p) \subset \mathbb{R}^m \quad M \cap U(p)$ - простое k-мерное C^r-гладкое многообразие.

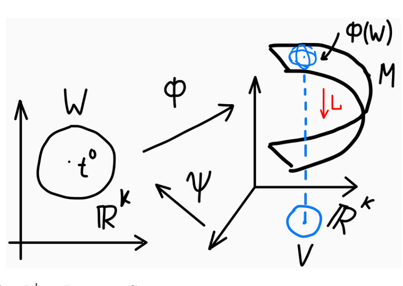
2) $\exists \tilde{U}(p) \subset \mathbb{R}^m \quad \exists\ F_1, ... F_{m-k} : \tilde{U}(p) \to \mathbb{R}, \ F_i \in C^r$

$$x \in M \cap \tilde{U} \Leftrightarrow F_1(x) = 0, \ F_2(x) = 0, ..., F_{m-k}(x) = 0$$

и при этом $\nabla F_1(p), ..., \nabla F_{m-k}(p)$ - ЛНЗ.

Доказательство:

$1 \Rightarrow 2$



Φ - параметризация. : $O \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m, \ \Phi \in C^r$

$\Phi' = \left(\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{i=1..m, \\ j=1..k}}$

Для определенности можно считать, что rank Φ' реализуется на первых k строках:

$\det \left(\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(t_0) \right)_{i,j=1..k} \neq 0$

Пусть $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ - проекция: $(x_1, ... x_m) \overset{L}{\mapsto} (x_1, ..., x_k)$

Отображение $L \circ \Phi \in C^r$ и $\det((L \circ \Phi)'(t_0)) \neq 0$, т.к. $(L \circ \Phi)'(t_0) = \left(\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(t_0) \right)_{i,j=1..k}$

Тогда $\exists W(t_0)$ $V \subset \mathbb{R}^k$ -окрестность точки L(p) : $L \circ \Phi$ -диффеоморфизм между ними $\exists \psi = (L \circ \Phi)^{-1}$

Тогда $\exists H : V \to \mathbb{R}^{m-k}$. При $x' \in V \quad (x', H(x')) = \Phi(\psi(x')), \ H \in C^r$,

Отображение H по смыслу "досочиняет" координаты точки в M.

Φ - гомеоморфизм на $M \Rightarrow \Phi(W)$ - открытое множество в M

$\exists$ откр. $\overline{U} \subset \mathbb{R}^m \quad \Phi(W) = \overline{U} \cap M$

При этом можно считать, что $\overline{U} \subset V \times \mathbb{R}^{m-k}$

Обозначим $F_j : \overline{U} \to \mathbb{R}, \ j = 1..m - k$

$F_j(x) = H_j(L(x)) - x_{k+j}$

Все $F_j(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \Phi(W) = \overline{U} \cap M$

$F_j(x) = H_j(x_1, ..., x_k) - x_{k+j}$

$$\nabla F_1 = \Big(\underbrace{\cdot, \ \cdot, \ ... \ , \ \cdot}_{k}, -1, 0, 0, ... \Big)$$

$$\nabla F_2 = \Big(\underbrace{\cdot, \ \cdot, \ ... \ , \ \cdot}_{k}, 0, -1, 0, ... \Big)$$

$$\nabla F_{m-k} = \Big(\underbrace{\cdot, \ \cdot, \ ... \ , \ \cdot}_{k}, 0, ..., 0, -1 \Big)$$

Слепим матрицу из этих градиентов, и видим, что есть ненулевой минор $(m - k) \times (m - k)$, значит эти векторы ЛНЗ.

$2 \Rightarrow 1$

Рассмотрим $F : \overline{U}(p) \to \mathbb{R}^{m-k}$

$F(x) = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \\ ... \\ F_{m-k}(x) \end{pmatrix}$

$F' = \begin{pmatrix} \nabla F_1 \\ \nabla F_2 \\ ... \\ \nabla F_{m-k} \end{pmatrix}$ - матрица $(m - k) \times m$

Строки матрицы ЛНЗ $\Rightarrow \exists\ m - k$ столбцов определяющих ненулевой минор, пусть это последние ст.

$$F' = \left(\begin{array}{ccc:ccc} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_k} & \frac{\partial F_1}{\partial x_{k+1}} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_{m-k}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_{m-k}}{\partial x_k} & \frac{\partial F_{m-k}}{\partial x_{k+1}} & \cdots & \frac{\partial F_{m-k}}{\partial x_m} \end{array} \right)$$

По тореме о неявном отображении $(F'_x \mid F'_y)$ $\det F'_y \neq 0$

$\exists P = U(p_1, ..., p_k)$ - откр. в $\mathbb{R}^k$

$\exists Q = V(p_{k+1}, ..., p_m)$ - откр. в $\mathbb{R}^{m-k}$

$\exists H : P \to Q$

$x \in M \cap \overline{U}, \ F(x) = 0 \Leftrightarrow x = (x', H(x')), \ x' \in P, H(x') \in Q$

Тогда $U = P \times Q$

$\Phi : P \to \mathbb{R}^m$

$\Phi(u) = (u, H(u))$

$H \in C^r, H$ - инъекция по теореме о неявном отображении.

Φ^{-1} - проекция на $\mathbb{R}^k$, Тогда Φ - гомеоморфизм.

$\Phi(x_1, x_2, ..., x_k) = (x_1, x_2, ..., x_k, H_1(x_1, ..., x_k), ..., H_{m-k}(x_1, x_2, ..., x_k))$

$\Phi' = \begin{pmatrix} E \\ H' \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rk} \Phi = k$, отсюда $M \cap U$ - простое k-мерное C^r гладкое многообразие.

7.12. Следствие о двух параметризациях

Определение: $M \subset \mathbb{R}^m$ - C^r гладкое k-мерное многообразие, если

$\forall p \in M\ \exists U(p)$ - открытое в $\mathbb{R}^m$, такое, что $U(p) \cap M$ - **простое** C^r гладкое k-мерное многообразие.

Теорема:

$M \subset \mathbb{R}^m$ - C^r гладкое k-мерное многообразие

$p \in M \quad U(p)$ - открыто в $\mathbb{R}^m$

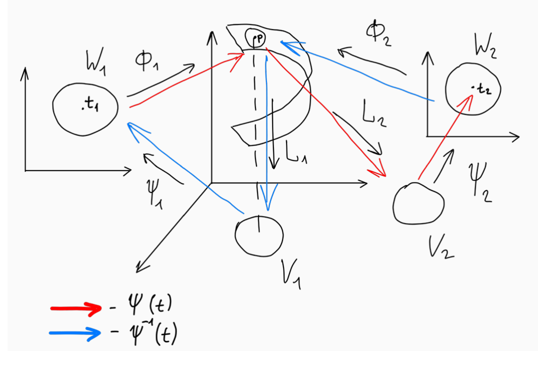
$\left. \begin{array}{l} \Phi_1 : O_1 \subset \mathbb{R}^k \to U(p) \\ \Phi_2 : O_2 \subset \mathbb{R}^k \to U(p) \end{array} \right]$ 2 параметризации.

Тогда

$$\exists \text{ диффеоморфизм } \psi : O_1 \to O_2$$

$$\Phi_1 = \Phi_2 \circ \psi$$

Доказательство:



$\psi(t) := \Phi_2^{-1}(\Phi_1(t))$ - биекция, т.к. Φ_1, Φ_2 - биекции.

Верно ли, что ψ - гладкое?

Давайте докажем гладкость в точке p.

Проведем те же рассуждения, что в прошлой тореме, каждый раз подрезая окрестности.

Тогда в какой-нибудь окрестности точки p:

$\psi(t) = \psi_2(L_2(\Phi_1(t)))$

$\psi^{-1}(t) = \psi_1(L_1(\Phi_2(t)))$

Это уже композиции гладких отображений, поэтому ψ - гладкое в этой окрестности.

Значит ψ - диффеоморфизм.

8. Продолжение творческого кризиса

8.1. Касательное пространство к k-мерному многообразию в $\mathbb{R}^m$

$\Phi : O \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$

$\Phi - C^r$ гладкая параметризация k-мерного многообразия $M \cap U(p)$, где $p \in M$

$\Phi(t_0) = p$

Тогда: образ линейного отображения $\Phi'(t_0) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m - k$ мерное линейное под-во в $\mathbb{R}^m$, не зависящее от Φ

И при этом $\Phi'(t_0)$ — **касательное пространство** к M в точке p, обозначается, как $\boldsymbol{T_p M}$

При этом $p + T_p M$ — аффиное касательное пространство. *То что в школе называлось касательной прямой к графику.*

8.2. Лемма о корректности определения касательного пространства

$\Phi : O \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$

$\Phi - C^r$ гладкая параметризация k-мерного многообразия $M \cap U(p)$, где $p \in M$

$\Phi(t_0) = p$

Тогда: образ линейного отображения $\Phi'(t_0) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m - k$ мерное линейное под-во в $\mathbb{R}^m$, не зависящее от Φ

Доказательство:

$\Phi'(t_0)\left(\mathbb{R}^k\right) - k$-мерное, потому что $rg(\Phi'(t_0)) = k$ (Столбцы линейно-независимы, а образ любого вектора - это линейная комбинация столбцов)

Докажем независимость от Φ:

По следствию о двух параметризациях:

$$\Phi_2 = \Phi \circ \Psi$$

$$\Phi_2' = \Phi' \Psi'$$

А так как Ψ — диффеоморфизм, то $\Psi'(t_0)$ — невырожденный оператор $\Rightarrow$ образ $\Phi_2' = \Phi'$

8.3. Касательное пространство в терминах векторов скорости гладких путей

1. $\forall v \in T_p M$

   $\exists$ путь $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \xrightarrow[\text{гладкий}]{} M : \gamma(0) = p, \gamma'(0) = v$

   Доказательство:

   Φ — параметризация, $\Phi(t_0) = p$

   $u := (\Phi'(t_0))^{-1}(v)$

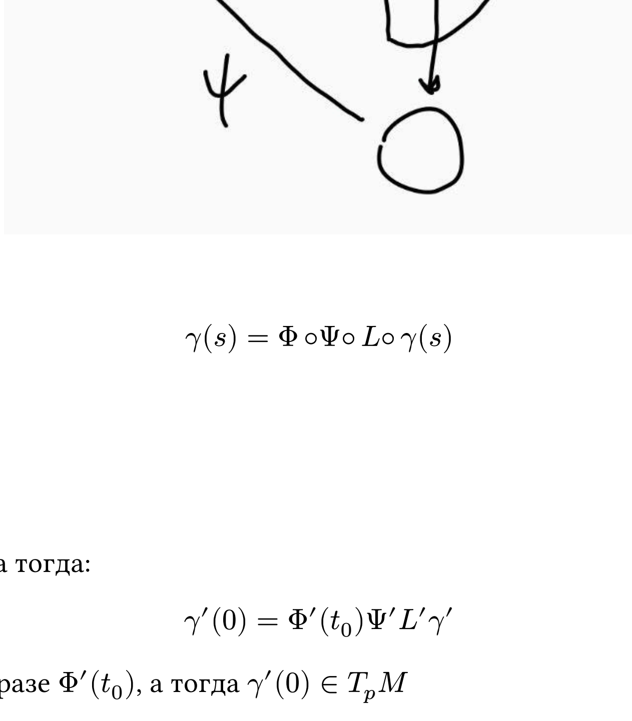
   Теперь предъявим путь в O: $\tilde{\gamma}(s) = t_0 + su, s \in [-\varepsilon, \varepsilon] \Rightarrow \tilde{\gamma}' \equiv u$

   Ну а тогда: $\gamma := \Phi \circ \tilde{\gamma} \Rightarrow \gamma'(0) = \Phi'(\tilde{\gamma}(0)) \cdot \tilde{\gamma}'(0) = \Phi'(t_0) \cdot u = v$

2. $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \to M$ — произвольный гладкий путь. $\gamma(0) = p$

   Тогда $\gamma'(0) \in T_p M$

   Доказательство:



   По картинке получаем, что

$$\gamma(s) = \Phi \circ \Psi \circ L \circ \gamma(s)$$

   $(\Phi(t_0) = p)$

   Просто прошли по кругу, ну а тогда:

$$\gamma'(0) = \Phi'(t_0) \Psi' L' \gamma'$$

   Получаем, что все лежит в образе $\Phi'(t_0)$, а тогда $\gamma'(0) \in T_p M$

8.4. Касательное пространство к графику функции и к поверхности уровня

К графику:

$f : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R},\ f \in C^1$

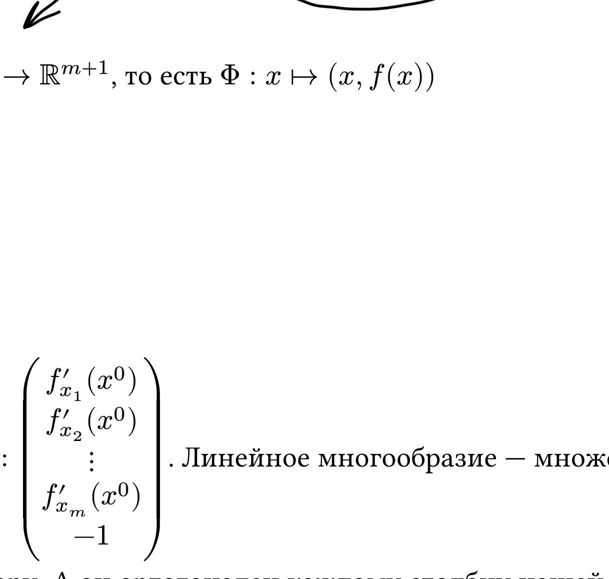
$y = f(x)$ — задает поверхность в $\mathbb{R}^{m+1}$

Точка $f(x^0) = y^0$

Тогда, аффинное касательное пр-во задается так:

$$y - y^0 = \sum_{i=1}^{m} f'_{x_i}(x^0)(x_i - x_i^0)$$

Доказательство:



$\sqsupset$ параметризация $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m+1}$, то есть $\Phi : x \mapsto (x, f(x))$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ f'_{x_1} & f'_{x_2} & f'_{x_3} & \dots & f'_{x_m} \end{pmatrix}$$

Соберем нормаль из уравнения: $\begin{pmatrix} f'_{x_1}(x^0) \\ f'_{x_2}(x^0) \\ \vdots \\ f'_{x_m}(x^0) \\ -1 \end{pmatrix}$. Линейное многообразие — множество векторов перпендикулярных этому вектору. А он ортогонален каждому столбцу нашей матрицы, столбцы же образуют базис касательного пространства.

К уровню:

TODO

Опр. Поверхность уровня для функции $f : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, f \in C^1$ - это $\{x \in O : f(x) = C\}$ обозначим как M_C

Пусть $p \in M_C, \nabla f(p) \neq 0$ тогда, не умаляя общности, будем считать, что $f'_{x_m}(p) \neq 0$ и по теореме о неявном отображении $\exists \varphi : U(p) \subset \mathbb{R}^{m-1} \to \mathbb{R},\ \varphi \in C^1, \varphi(x_1, ..., x_{m-1}) = x_m$

$\Phi : U(p) \to \mathbb{R}^m, x \mapsto (x, \varphi(x))$ - параметризация M_C, частные производные φ находим по теореме о неявном отображении.

8.5. Локальный относительный экстремум

$f : E \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$

$\Phi : E \to \mathbb{R}^n$

$M_\Phi = \left\{ \underset{x \in E}{x \in \mathbb{R}^{m+n}}; \Phi(x) = 0 \right\}$

$x_0 \in M_\Phi$ — точка локального относительного (условного) максимума, если:

$$\exists U(x_0) \subset \mathbb{R}^{m+n}\ \forall x \in U(x_0) \cap M_\Phi\ f(x) \leq f(x_0)$$

По аналогии можно собрать строгий минимум, строгий максимум и не строгий минимум.

Уравнения $\Phi(x) = 0$ — уравнения связи.

8.6. Необходимое условие относительного локального экстремума

$f : E \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$

$\Phi : E \to \mathbb{R}^n$

$f, \Phi \in C^1$

$a \in E,\ \Phi(a) = 0$ — точка лок. относительного экстремума.

$rg\Phi'(a) = n$ — максимально возможный ранг

Тогда $\exists \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ (вектор-строка)

$$\begin{cases} f'(a) - \lambda \Phi'(a) = 0 \\ \Phi(a) = 0 \end{cases}$$

Доказательство:

Второе условие автоматически доказывается из условия

В нашей системе $(n + m + n)$ — строк, а неизвестные у нас $a_1, ..., a_{n+m}, \lambda_1, ..., \lambda_n$ — а значит решение есть

Пусть ранг $\Phi'(a)$ реализуется на последних столбцах, на $x_{m+1}, ..., x_{n+m}$. И пусть $x = (x_1, ..., x_m), y = (x_{m+1}, ..., x_{n+m})$ по аналогии $a = \left(a_x, a_y\right)$

$\det \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} \neq 0 \Rightarrow$ по теореме о неявном отображении $\exists! \varphi : U(a_x) \to V\left(a_y\right), \varphi \in C^1 \quad \forall x \in U(a_x)\ \underbrace{\Phi(x, \varphi(x)) = 0}_{(\star)}$

Тогда для $g(x) = f(x, \varphi(x))\ a_x$ — точка экстремума. А тогда по необходимому свойству экстремума:

$$\left(f'_x + f'_y \cdot \varphi'\right)(a_x) = 0$$

Можете самостоятельно убедиться в валидности записи, расписав матричное произведение:

$$\frac{\partial g}{\partial x_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_{j=m+1}^{m+n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}$$

Не забудем про $(\star)$ и продифференцируем:

$$\Phi'_x + \Phi'_y \cdot \varphi' = 0$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^n \text{ (вектор-строка)} \quad \lambda \Phi'_x + \lambda \Phi'_y \cdot \varphi' = 0$$

Теперь вычтем одно из другого:

$$f'_x - \lambda \Phi'_x + \left(f'_y - \lambda \Phi'_y\right)\varphi' = 0$$

Пусть $\lambda := f'_y \cdot \left(\Phi'_y(a)\right)^{-1}$

А тогда $f'_y - \lambda \Phi'_y = 0 \Rightarrow f'_x - \lambda \Phi'_x = 0$. Ну а это то что мы хотели получить.

8.7. Формулировка достаточного условия относительного экстремума

$f : E \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$

$\Phi : E \to \mathbb{R}^n$

$f, \Phi \in C^1$

$a \in E,\ \Phi(a) = 0$

$rg\Phi'(a) = n$ — максимально возможный ранг

$h \in \mathbb{R}^{m+n} = \left(h_x, h_y\right)$. Если $\Phi'(a)h = 0$, то можно выразить $h_y = \Psi(h_x)$

G — функция Лагранжа от (x, y) : взяв λ из теоремы получим:

$$G(x, y) := f(x, y) - \lambda \Phi(x, y)$$

Рассмотрим квадратичную форму $Q(h_x) = \mathrm{d}^2 G(a, (h_x, \Psi(h_x)))$:

1. Если $Q(h_x)$ — положительно определена, то a — точка лок. относительного минимума.
2. Если $Q(h_x)$ — отрицательно определена, то a — точка лок. относительного максимума.
3. Если $Q(h_x)$ — не определена, то a — не точка экстремума.
4. Если $Q(h_x)$ — полуопределена, то недостаточно информации.

8.8. Вычисление нормы линейного оператора с помощью собственных чисел

$A \in Lin(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$

Тогда

$$\|A\| = \max\left\{\sqrt{\lambda}, \lambda - \text{соб. число } A^T A\right\}$$

Доказательство:

$$\lambda |x|^2 = \langle A^T A x, x \rangle = \langle Ax, Ax \rangle = |Ax|^2$$

$$\|A\|^2 = \max_{x \in S^{m-1}} |Ax|^2 = \max_{x \in S^{m-1}} \langle A^T A x, x \rangle = \max \lambda$$

9. Векторные поля и криволинейный интеграл

Далее везде под буквой O будет пониматься область (определние тут)

9.1. Векторное поле

$V : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ (непрерывное) — векторное поле

По смыслу, у нас есть пространство, и каждой точке этого пространства сопоставлен какой-то вектор (аля магнитное поле)

9.2. Интеграл векторного поля по кусочно-гладкому пути

Кусочно-гладки путь:

$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ — непрерывна

$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \\ \vdots \\ \gamma_m'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_m'(t) \end{pmatrix}$ — для удобства обозначений координатные функции будут x_i вместо γ_i

Тогда γ — кусочно гладкая, если существует дробление

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = b : \ \forall t \in \{1, ..., n\} : \ \gamma\big|_{[t_{k-1}, t_k]} \text{ — гладкая}$$

Интеграл:

$O \in \mathbb{R}^m$ — область

γ — кусочно-гладкий путь $[a, b] \to O$

$\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_m(t))^T$

$V : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ непрерывное — векторное поле

$V = (V_1, V_2, ..., V_m)^T$

Тогда интеграл векторного поля V вдоль пути γ равен:

$$I(V, \gamma) = \int_\gamma V_1 \,\mathrm{d}x_1 + V_2 \,\mathrm{d}x_2 + ... + V_m \,\mathrm{d}x_m := \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \,\mathrm{d}t \overset{(\star)}{=}$$

$$\overset{(\star)}{=} \int_a^b V_1(x_1(t), x_2(t), ...x_m(t))x_1'(t) + V_2(x_1(t), ...x_m(t))x_2' + ... + V_m(...)x_m' \,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_a^b \sum_{k=1}^m V_k(x_1(t), ..., x_m(t)) \,\mathrm{d}x_k(t)$$

$(\star)$: просто расписали покоординатно V и γ

Свойства:

1. Линейность по полю

$$I(\alpha V_1 + \beta V_2, \gamma) = \alpha I(V_1, \gamma) + \beta I(V_2, \gamma)$$

2. Аддитивность интеграла при дроблении пути

   $\gamma : [a, b] \to O$

   $c \in (a, b)$,

   Тогда:

$$I(V, \gamma) = I\Big(V, \gamma_{[a,c]}\Big) + I\Big(V, \gamma_{[c,b]}\Big)$$

3. Замена параметра

   $\varphi : [p, q] \to [a, b] \in C^1$

   $\varphi(p) = a, \ \varphi(q) = b$

   $\gamma : [a, b] \to O, \quad \tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$

   Тогда

$$I(V, \gamma) = I(V, \tilde{\gamma})$$

   Доказательство:

$$\int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \,\mathrm{d}t = \begin{bmatrix} t := \varphi(\tau) \\ \mathrm{d}t = \varphi'(\tau) d\tau \end{bmatrix} = \int_p^q \langle V(\gamma(\varphi(\tau))), \gamma'(\varphi(\tau)) \rangle \varphi'(\tau) \,\mathrm{d}\tau =$$

$$= \int_p^q \langle V(\tilde{\gamma}(\tau)), \gamma'(\varphi(\tau)) \cdot \varphi'(\tau) \rangle \,\mathrm{d}\tau = \int_p^q \langle V(\tilde{\gamma}(\tau)), \tilde{\gamma}'(\tau) \rangle \,\mathrm{d}\tau = I(V, \tilde{\gamma})$$

4. Объединение носителей

   $\gamma_1 : [a, b] \to O$

   $\gamma_2 : [c, d] \to O$

   $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$ — т.е. конец первого пути начинается с началом второго

   Определим "произведение" путей:

   $\gamma := \gamma_2\gamma_1$, если:

$$\gamma : [a, b + d - c] \to O : \ \gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a, b] \\ \gamma_2(t - b + c), & t \in [b, b + d - c] \end{cases}$$

   Тогда наше свойство имеет вид:

$$I(V, \gamma) = I(V, \gamma_1) + I(V, \gamma_2)$$

5. Противоположный путь

   $\gamma : [a, b] \to O$ — путь

   Тогда противположный путь к γ (обозначается γ^-):

$$\gamma^- : [a, b] \to O, \quad \gamma^-(t) := \gamma(a + b - t)$$

   Тогда интегралы по противоположным путям равны:

$$I(V, \gamma^-) = -I(V, \gamma)$$

6. Оценка интеграла по пути

   $|I(V, \gamma)| \le \max\limits_{t \in [a,b]} |V(\gamma(t))| \cdot l(\gamma(t))$

   Доказательство:

   Длина пути: $l(\gamma(t)) := \int_a^b |\gamma'(t)| \,\mathrm{d}t$

   $M := \max\limits_{t \in [a,b]} |V(\gamma(t))|$

$$|I(V, \gamma)| = \left| \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \,\mathrm{d}t \right| \le \int_a^b |\langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle| \,\mathrm{d}t \underset{\text{КБШ}}{\le} \int_a^b |V(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)| \,\mathrm{d}t \le$$

$$\le \int_a^b M \cdot |\gamma'(t)| \,\mathrm{d}t = M \int_a^b |\gamma'(t)| = M \cdot l(\gamma(t))$$

9.3. Потенциал, потенциальное векторное поле

$V : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — потенциальное в.п. если,

$$\exists f : O \to \mathbb{R} \in C^1(O) : \ \forall x \in O : \ \nabla f(x) = V(x)$$

f называется потенциалом V

Загадка. Верно ли, что разные потенциалы одного поля равны (отличаются на константу).

На лекции он оставил вопрос открытым.

Отгадка: да, это верно

Доказательство:

У одного векторного поля несколько потенциалов $\Rightarrow$ градиенты этих потенциалов равны векторному полю $\Rightarrow$ градиенты потенциалов равны между собой $\Rightarrow$ потенциалы различаются между собой на константу

9.4. Обобщенная формула Ньютона-Лейбница

$V : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$

$f : O \to \mathbb{R}$ — потенциал V

$\gamma : [a, b] \to O : \begin{cases} \gamma(a) = A \\ \gamma(b) = B \end{cases}$ — кусочно гладкий

Тогда

$$\int_\gamma \sum_{k=1}^m V_k \,\mathrm{d}x_k = f(B) - f(A)$$

Доказательство:

1. γ — гладкий путь.

$$\int_\gamma \sum_{k=1}^m V_k \,\mathrm{d}x_k = \int_a^b V_1(x_1(t), ..., x_m(t))x_1'(t) + V_2x_2'(t) + ... + V_mx_m'(t) \,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_a^b \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1(t), ..., x_m(t)) \cdot x_i'(t) \,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_a^b (f(x_1(t), ..., x_m(t)))_t' \,\mathrm{d}t = f(x) \Big|_{x = \gamma(a)}^{x = \gamma(b)} = f(B) - f(A)$$

2. γ — кусочно-гладкий $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$

$$I(V, \gamma) = \sum_{i=1}^n I(V, \gamma\big|_{[t_{k-1}, t_k]}) = \sum_{i=1}^n f(\gamma(t_i)) - f(\gamma(t_{i-1})) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = f(B) - f(A)$$

9.5. Характеризация потенциальных векторных полей в терминах интегралов

$V : O \to \mathbb{R}^m$ — векторное поле

Тогда эквивалентны:

1. V — потенциально в O
2. $\int_\gamma \sum V_k \,\mathrm{d}x_k$ — не зависит от пути в O.
3. $\forall \gamma$ — кусочно-гладкий замкнутый путь в $O : \int_\gamma \sum V_k \,\mathrm{d}x_k = 0$

Доказательство:

$1 \Rightarrow 2 :$

Обобщенная формула Ньютона-Лейбница

$2 \Rightarrow 3 :$

Пусть нам дали путь $\gamma : [a, b] \to O, \ \gamma(a) = \gamma(b)$.

Тогда $\sphericalangle \ \gamma_0 : [a, b] \to O \quad \gamma_0 \equiv \gamma(a) = \gamma(b)$ — путь который стоит на месте.

Тогда $\gamma_0'(\_) = 0 \Rightarrow I(V, \gamma_0) = 0$.

Но по второму пункту $I(V, \gamma) = I(V, \gamma_0) = 0$, что и требовалось доказать.

$3 \Rightarrow 2 :$

Пусть даны пути $\gamma_1 : [a, b] \to O \quad \gamma_2 : [a, b] \to O \quad \gamma_1(a) = \gamma_2(a) \quad \gamma_1(b) = \gamma_2(b)$

$\sphericalangle \ \gamma = \gamma_2^-\gamma_1$ — замкнутый

$0 = I(V, \gamma) = I(V, \gamma_2^-) + I(V, \gamma_1) = -I(V, \gamma_2) + I(V, \gamma_1) \Rightarrow I(V, \gamma_1) = I(V, \gamma_2)$ — ровно то, что и хотели

$2 \Rightarrow 1 :$

Фиксируем $A \in O$

$\forall x \in O$ возьмем путь γ_x из A в x

$\sphericalangle \ f(x) := \int_{\gamma_x} \sum V_k \,\mathrm{d}x_k$ — является ли потенциалом?

Достаточно проверить, что $\frac{\partial f}{\partial x_1} = V_1(x)$ при $x \in O$.

$$\frac{f(x + he_1) - f(x)}{h} \overset{(\star)}{=} \frac{1}{h}(I(V, \gamma_x\gamma_0) - I(V, \gamma_x)) = \{\text{свойство объединения носителей}\} =$$

$$= \frac{1}{h} I(V, \gamma_0) = \frac{1}{h} \int_0^1 \langle V(x + the_1), he_1 \rangle = \int_0^1 V_1(x + the_1) \overset{(\star\star)}{=} V_1(x + \tilde{t}he_1) \xrightarrow[h \to 0]{} V_1(x)$$

$(\star)$: здесь мы дополнительно рассмотрели прямолинейный путь γ_0 из в x в $x + he_1$

Формальное его оприсание:

$$\gamma_0 : [0, 1] \to O, \quad \gamma_0(t) = x + the_1 \quad \gamma_0' = he_1$$

$(\star\star)$: здесь применили теорему о среднем, поэтому $\tilde{t}$ — какая-то точка между 0 и 1, а множитель $(b - a)$ из формулировки теоремы с википедии равен $1 - 0 = 1$

9.6. Необходимое условие потенциальности гладкого поля. Лемма Пуанкаре.

Необходимое условие (дифференциальный критерий потенциальности):

$V : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — векторное поле

$V \in C^1(O)$

V — потенциально

Тогда

$$\forall k, l \in \{1, ..., m\} : \ \frac{\partial V_k}{\partial x_l} = \frac{\partial V_l}{\partial x_k} \ \text{ в } \ O$$

Доказательство:

Пусть f — потенциал, тогда:

$$\frac{\partial V_k}{\partial x_l} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{\partial V_l}{\partial x_k}$$

Лемма Пуанкаре (лемма выше в обратную сторону)

$O \subset \mathbb{R}^m$ — *выпуклая* область (на самом деле хватит звездно-выпуклой)

$V : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — векторное поле

$V \in C^1(O)$

V удовлетворяет дифференциальному критерию потенциальности

Тогда

$$V \text{ — потенциально}$$

Доказательство:

$A \in O$

$\sphericalangle \ \gamma_x(t)$ — прямолинейный путь из A в x.

Формальное описание:

$$\gamma : [0, 1] \to O : \ \gamma_x(t) = A + t(x - A) \ \Rightarrow \ \gamma' = x - A$$

Рассмотрим следующую функцию, и проверим, что она потенциал:

$$f(x) := \int_{\gamma_x} \sum V_k \,\mathrm{d}x_k = \int_0^1 \langle V, \gamma' \rangle \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \underbrace{\sum_{k=1}^m V_k(A + t(x - A))}_{(2^\star)} \underbrace{(x_k - A_k)}_{(1^\star)} \,\mathrm{d}t$$

Чтобы проверить является ли f потенциалом, найдем частные производные:

$$\frac{\partial f}{\partial x_l}(x) \overset{(1)}{=} \int_0^1 V_l(A + t(x - A)) + \sum_{k=1}^m (V_k)_l'(A + t(x - A)) \cdot t(x_k - A_k) \,\mathrm{d}t \overset{(2)}{=}$$

$$\overset{(2)}{=} \int_0^1 V_l(...) + \sum (V_l)_k'(...) \cdot t(x_k - A_k) \,\mathrm{d}t \overset{(3)}{=} \int_0^1 (tV_l(A + t(x - A)))_t' \,\mathrm{d}t = tV_l(A + t(x - A)) \Big|_{t=1}^{t=0} = V_l(x)$$

(1): *Почему можем дифференцировать по функции внутри интеграла?* Нужно, чтобы функция была непрерывна вместе со своей производной, тогда мы сможем использовать формулу Лейбница - (о производной интеграла по параметру). Но только концы интеграла не зависят от переменной. А тогда мы просто воспользуемся правилом дифференцирования произведений и продифференцируем сначала $(1^\star)$, а потом $(2^\star)$

(2): По условию $(V_k)_l' = (V_l)_k'$

(3): Заметим, что $(tV_l(A + t(x - A)))_t' = V_l(A + t(x - a)) + t \cdot \sum (V_l)_k'(A + t(x - a))(x_k - A_k)$

Следствие: Дифференциальный критерий потенциальности влечет локальную потенциальность поля.

9.7. Локально потенциальное векторное поле

$V : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — векторное поле

Тогда V — локально потенциальное в.п. в O, если

$$\forall x \in O \ \ \exists U(x) \ \ \exists p : U(x) \to \mathbb{R} : \quad p \text{ — потенциал } V \text{ в } U(x)$$

.

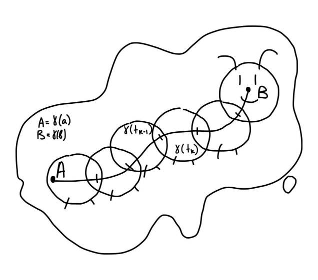
9.8. Лемма о гусенице

$\gamma : [a, b] \to O \subset \mathbb{R}^m$ — непрерывный

Тогда

1. $\exists$ дробление $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$
2. $\exists$ шары $B_1, B_2, ..., B_n \subset O$, такие, что $\gamma([t_{k-1}, t_k]) \subset B_k$

Доказательство:



Добудем из компактности

$\forall c \in [a, b]$ возьмем $B_c = B(\gamma(c), r_c) \subset O$, где r_c — произвольный (но такой чтобы $B_c \in O$)

Рассмотрим следующие величины, как подготовительные:

$$\tilde{\alpha}_c := \inf(t \in [a, c] : \gamma([t, c]) \subset B_c)$$

$$\tilde{\beta}_c := \sup(t \in [c, b] : \gamma([c, t]) \subset B_c)$$

Из того что путь непрерывен и шар открыт следует что $\tilde{\alpha}_c < c < \tilde{\beta}_c$.

Замечание: там есть точки a и b для которых одно из этих значений не определено, но это не страшно, заменим $\tilde{\alpha}_a := a, \ \tilde{\beta}_b := b$. Далее везде также нужно разбирать этот случай, но посчитаем это очевидным

Теперь немного сожмем каждый из интервалов вокруг с, чтобы его образ целиком содержался в шаре B_c

$$\sphericalangle \ \alpha_c, \beta_c : \ \tilde{\alpha}_c < \alpha_c < c < \beta_c < \tilde{\beta}_c$$

Тогда интервалы (α_c, β_c) образуют покрытие $[a, b]$

Отрезок компактен, а значит существует конечное подпокрытие:

$$[a, b] \subset \bigcup_{\text{кон.}} \Big(\alpha_{c_k}, \beta_{c_k}\Big)$$

Прочистим наше конечное покрытие: будем выкидывать по одному отрезку, пока существуют отрезки, при удалении которых каждая точка $[a, b]$ остается покрытой.

После совершения такой операции:

$$\forall \Big(\alpha_{c_k}, \beta_{c_k}\Big) \ \exists d_k \in [a, b] : d_k \notin \bigcup_{i \ne k} \Big(\alpha_{c_i}, \beta_{c_i}\Big)$$

Для определенности можно считать, что $d_1 < d_2 < ... < d_n$

1. Кусок отрезка $[a, d_1]$ лежит в интервале $\Big(\alpha_{c_1}, \beta_{c_1}\Big)$, т.к. это первый интервал, значит он должен содержать a
2. Окрестность точки d_2 лежит в интервале $\Big(\alpha_{c_2}, \beta_{c_2}\Big)$, все точки на интервале (d_1, d_2) лежат в каких-то интервалах из покрытия, при чем могут лежать только в $\Big(\alpha_{c_1}, \beta_{c_1}\Big)$ и $\Big(\alpha_{c_2}, \beta_{c_2}\Big)$, иначе была бы точка d_3 где-то между d_1 и d_2.

   Из того, что интервалы пересекаются, делаем вывод, что между d_1 и d_2 есть точка лежащая и в $\Big(\alpha_{c_1}, \beta_{c_1}\Big)$ и в $\Big(\alpha_{c_2}, \beta_{c_2}\Big)$, назначим её t_1, то есть $t_1 \in \Big(\alpha_{c_1}, \beta_{c_1}\Big) \cap \Big(\alpha_{c_2}, \beta_{c_2}\Big)$
3. Аналогичным образом назначаем $t_2, t_3, ...$

Получаем нужную конструкцию (получили дробление, а шарами будут исходные шары соответствующие точкам c соответствующих интервалов).

9.9. Лемма о равенстве интегралов по похожим путям

Немного определений:

***V*-гусеница**:

V-гусеница — гусеница из предыдущей леммы где шары выбираются таким образом, что в каждом шаре есть потенциал

Объяснение: в доказательстве леммы о гусенице шары вокруг каждой точки выбирались произвольно, а теперь, зная что поле V локально-потенциально, будем выбирать эти шары так, чтобы в нем был потенциал. Очевидно что доказательство леммы от этого не сломается

Похожие пути

$\gamma, \tilde{\gamma} : [a, b] \to O$ — *похожие пути*, если

1. $\gamma(a) = \tilde{\gamma}(a), \quad \gamma(b) = \tilde{\gamma}(b)$
2. $\exists t_k$ — дробление, $\exists B_k$ — шары
3. $\forall k \quad \gamma([t_{k-1}, t_k]) \subset B_k \quad \tilde{\gamma}([t_{k-1}, t_k]) \subset B_k$

По смыслу: у путей есть общая гусеница

***V*-похожие пути** — то же самое, только общая V-гусеница.

Лемма:

V — локально потенциальное векторное поле

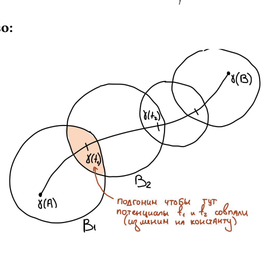
$\gamma, \tilde{\gamma}$ — кусочно-гладкие V-похожие пути

$\gamma(a) = \tilde{\gamma}(a), \gamma(b) = \tilde{\gamma}(b)$

Тогда

$$\int_\gamma \sum V_k \,\mathrm{d}x_k = \int_{\tilde{\gamma}} \sum V_k \,\mathrm{d}x_k$$

Доказательство:



Берем общую V-гусеницу. В каждом шаре B_k есть некотороый потенциал f_k, но они могут отличаться на константу. Поэтому подгоним потенциалы в соседних шарах, чтобы выполнялось:

$$f_k(\gamma(t_k)) = f_{k+1}(\gamma(t_k))$$

Здесь мы "склеили" потенциалы в точке $\gamma(t_k)$ при помощи констант

Тогда

$$\int_\gamma \sum V_k \,\mathrm{d}x_k = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}} \sum V_k \,\mathrm{d}x_k = \sum_{i=1}^n f_i(\gamma(t_i)) - f_i(\gamma(t_{i-1})) \overset{(\star)}{=} f_n(\gamma(t_n)) - f_1(\gamma(t_0)) =$$

$$= f_n(\tilde{\gamma}(t_n)) - f_1(\tilde{\gamma}(t_0)) = ... = \int_{\tilde{\gamma}} \sum V_k \,\mathrm{d}x_k$$

$(\star)$: это телескопическая сумма, т.к. мы специально подогнали так потенциалы, чтобы соседние сокращались

9.10. Лемма о похожести путей, близких к данному

δ-близки пути:

$\gamma, \tilde{\gamma} : [a, b] \to O$ — непрерывные

Эти пути называются *δ-близкими*, если:

$$\forall t \in [a, b] : \ |\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)| < \delta$$

Лемма *(a.k.a Лемма 3)*

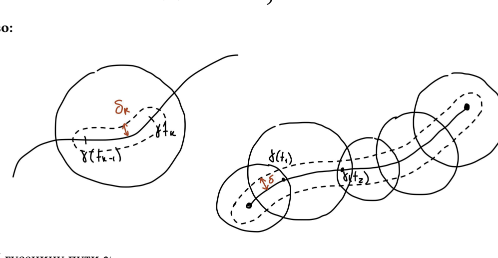
V — локально потенциальное векторное поле

$\gamma : [a, b] \xrightarrow[\text{непр.}]{} O$

Тогда $\exists \ \delta > 0$, для которого выполняется свойство:

$$\forall \tilde{\gamma}, \hat{\gamma} : \ \left.\begin{matrix} \gamma, \tilde{\gamma} \text{ — } \delta\text{-близкие} \\ \gamma, \hat{\gamma} \text{ — } \delta\text{-близкие} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \gamma, \hat{\gamma}, \tilde{\gamma} \text{ — похожие}$$

Доказательство:



Берем любую V-гусеницу пути γ

Рассмотрим множество $\gamma([t_{k-1}, t_k])$ — компакт (т.к. непрерывный образ компакта), а также лежит в B_k

Тогда $\exists \delta_k : \delta_k$-окрестность$\Big(\gamma\Big([t_{k_1}, t_k]\Big)\Big) \subset B_k$

Например подойдет:

$$\delta_k := \frac{\mathrm{dist}(S_k, \gamma([t_{k-1}, t_k]))}{2}$$

Т.к. таких δ_k — конечно, то можено взять минимум: $\delta := \min\limits_k \delta_k$ - это будет нашей δ из условия леммы.

Теперь поймем, что это ровно то, что было нужно:

$\gamma(t_k) \in B_k$, тогда все точки отстоящие от $\gamma(t_k)$ меньше чем на δ тоже будут лежать в B_k. Получается, что для всех путей δ-близких к γ, исходная гусеница так же будет и их гусеницей. Тогда мы нашли общую гусеницу у всех таких путей, что и хотели сделать.

(В предпоследнем предложении мы доказали что окрестности образов точек дробления принадлежат именно тем шарам, которым нужно, то есть что $\hat{\gamma}([t_{k-1}, t_k])$ действительно внутри B_k. см. определение похожих путей).

Замечание:

$$\forall \gamma(\text{непр.}), \delta : \ \exists \tilde{\gamma} \text{ — } \delta\text{-близкий кусочно-гладкий путь к } \gamma$$

*По смыслу: для каждого непрерывного пути можно найти любой δ-близкий **кусочно-гладкий** путь*

Доказательство:

Строим $\frac{\delta}{2}$-гусеницу пути γ — это гусеница, у которой размер каждого шара $< \frac{\delta}{2}$

Мы так очевидно можем сделать, выбирая на начальном этапе построения соотвествующие шары

$\tilde{B}_1, \tilde{B}_2, ..., \tilde{B}_n$ — шары этой гусеницы

$a = \tilde{t}_0 < \tilde{t}_1 < ... < \tilde{t}_n = b$ — дробление этой гусеницы

$\gamma([\tilde{t}_{k-1}, \tilde{t}_k]) \subset \tilde{B}_k$

Тогда возьмем $\tilde{\gamma}$ — ломанная $(\gamma(\tilde{t}_0), \gamma(\tilde{t}_1), ..., \gamma(\tilde{t}_n))$

Ломаная — это очевидно кусочно-гладкий путь

Докажем что они δ-близки:

$$\left(\forall t \in [\tilde{t}_{k-1}, \tilde{t}_k] : \ \gamma(t) \in \tilde{B}_k \text{ и } \tilde{\gamma}(t) \in \tilde{B}_k \ \right) \Rightarrow \ \left(\forall t \in [a, b] : \quad |\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)| \overset{(\star)}{<} 2 \cdot \frac{\delta}{2} = \delta\right)$$

$(\star)$: т.к. расстояние между точками в откртом шаре меньше двух радиусов

А это и означает, что $\gamma, \tilde{\gamma}$ - δ-близкие

Интеграл локально потенциального векторного поля по непрерывному пути

$\gamma : [a, b] \to O$ — непрерывный путь

Берем δ и $\tilde{\gamma}$ — кусочно-гладкий, δ-близкий к γ из леммы 3

$\gamma(a) = \tilde{\gamma}(a)$

$\gamma(b) = \tilde{\gamma}(b)$

Тогда интеграл по непрерывному пути γ определяется:

$$I(V, \gamma) := I(V, \tilde{\gamma})$$

Корректность определения:

Если мы возьмем два разных $\tilde{\gamma}$ и $\hat{\gamma}$, то по лемме 3 они будут похожи, а по лемме 2, т.к. они кусочно-гладкие, то интегралы вдоль них будут равны, и соотвественно равны $I(V, \gamma)$

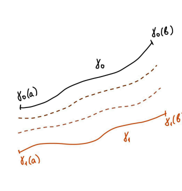
9.11. Гомотопия путей: связанная и петельная

$\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \to O$

1. Гомотопия

   $\Gamma : [a, b] \times [0, 1] \to O$, непрерывное

   $\forall t \in [a, b] \quad \Gamma(t, 0) = \gamma_0(t) \quad \Gamma(t, 1) = \gamma_1(t)$



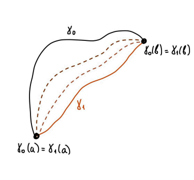
2. Связанная гомотопия

   Дополнительные начальные условия:

   $\gamma_0(a) = \gamma_1(a), \ \gamma_0(b) = \gamma_1(b)$

   Дополнительные условия на Γ :

   $\forall s \in [0, 1] \quad \Gamma(a, s) = \gamma_0(a) \quad \Gamma(b, s) = \gamma_0(b)$



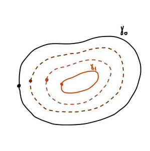
3. Петельная гомотопия

   Дополнительные начальные условия:

   $\gamma_0(a) = \gamma_0(b), \ \gamma_1(a) = \gamma_1(b)$

   Дополнительные условия на Γ :

   $\forall s \in [0, 1] \quad \Gamma(a, s) = \Gamma(b, s)$



9.12. Равенство интегралов по гомотопным путям

V — локально потенциальное векторное поле в O

γ_0, γ_1 — связанные гомотопные непрерывные пути в O

Тогда

$$I(V, \gamma_0) = I(V, \gamma_1)$$

Доказательство:

Общая идея: логично что если в начальном и конечном положении гомотопии интегралы совпадают, то и во всех промежуточных они должны совпадать. Тогда для каждой точки найдем некоторую окрестность, внутри которой интегралы совпадают, а дальше в силу компактности отезка $[0, 1]$ выберем конечное покрытие получившимися окрестностями. Получается конечное количество количество интервалов, внутри каждого из которых значения интеграла совпадают, значит и на всем отрезке они будут совпадать

Осталось доказать, что у каждой точки есть такая окрестность

Введем следующие обозначения:

Γ — гомотопия

$\gamma_s(t) = \Gamma(t, s)$, где $t \in [a, b], \ s \in [0, 1]$

$\varphi(s) := I(V, \gamma_s)$

Получается, нам надо проверить, что φ — локально постоянна, т.е.

$$\forall s_0 \in [0, 1] : \ \exists V(s_0) \ \forall s \in V(s_0) \cap [0, 1] \quad \varphi(s) = \varphi(s_0)$$

Из первого курса известно, что непрерывная функция на компакте — равномерно-непрерывна, потому

Γ — равномерно-непрерывна на компакте $[a, b] \times [0, 1]$

Распишем это по определению (только вместо близкого расстояния, будем говорить про близость координат):

$$\forall \delta > 0 \ \exists \sigma > 0 : \ \left.\begin{matrix} |t - t'| < \sigma \\ |s - s'| < \sigma \end{matrix}\right\} \Rightarrow |\Gamma(t, s) - \Gamma(t', s')| < \frac{\delta}{2}$$

Возьмем δ из леммы 3 для пути γ_{s_0}

Тогда $\exists \sigma > 0$ из определения выше

Дополнительно скажем, что $t = t'$, это не протеворечит определнию, заодно поможет нам потом:

$$\forall t \in [a, b] \ \ \forall s : \ |s - s_0| < \sigma : \quad |\Gamma(t, s) - \Gamma(t, s_0)| < \frac{\delta}{2}$$

Т.к. штука сверху выполнена для любых t, то это определние того, что пути γ_s, γ_{s_0} — $\frac{\delta}{2}$-близкие

По замечанию к лемме 3 подбираем кусочно-гладкие пути $\hat{\gamma}, \tilde{\gamma}$:

$$\hat{\gamma} \text{ — } \frac{\delta}{4}\text{-близкий к } \gamma_{s_0}, \ \tilde{\gamma} \text{ — } \frac{\delta}{4}\text{-близкий к } \gamma_s$$

По определению интеграла векторного поля по непрерывному пути:

$$I\Big(V, \gamma_{s_0}\Big) = I(V, \hat{\gamma}), \quad I(V, \gamma_s) = I(V, \tilde{\gamma})$$

Осталось написать оценки, чтобы воспользоваться леммой о похожести путей (т.к. "эталонный" путь у нас s_0, то будем искать расстояние до него:

$$\forall t : \ \Big|\tilde{\gamma}(t) - \gamma_{s_0}(t)\Big| \le |\tilde{\gamma}(t) - \gamma_s(t)| + \Big|\gamma_s(t) - \gamma_{s_0}(t)\Big| < \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{2} = \frac{3}{4}\delta$$

$$\forall t : \ \Big|\hat{\gamma}(t) - \gamma_{s_0}(t)\Big| < \frac{\delta}{4}$$

По лемме о похожести путей $\tilde{\gamma}$ и $\hat{\gamma}$ похожи, при этом они кусочно гладкие, значит:

$$I(V, \hat{\gamma}) = I(V, \tilde{\gamma}) \Rightarrow I\Big(V, \gamma_{s_0}\Big) = I(V, \gamma_s)$$

Получается, мы доказали, что

$$\forall s : |s - s_0| < \sigma \quad I(V, \gamma_s) = I\Big(V, \gamma_{s_0}\Big)$$

А это ровно, то что нам и нужно было, для окончания докзатаелства

9.13. Теорема Пуанкаре для односвязной области

Стягиваимая петля

Петля γ называется *стягиваемой*, если она гомотопна постоянному пути — пути стоящем на одном месте

Односвязная область

$O \subset \mathbb{R}^m$ — односвязная, если любая петля в O — стягиваемая

Пример — выпуклое множество

Теорема

$O \subset \mathbb{R}^m$ — односвязная область

V — локально потенциальное векторное поле в O

Тогда

$$\text{V — потенциально}$$

Доказательство:

V — потенциально $\Leftrightarrow$ интеграл по любой кусочно-гладкой петле равен 0. (пруф)

γ — петля в $O \Rightarrow$ гомотопна постоянному пути γ_0

Интегралы гомотопных путей равны, а интеграл постоянного пути равен 0:

$$I(V, \gamma) = I(V, \gamma_0) = 0 \Rightarrow V \text{ — потенциально}$$

Следствие:

Лемма Пуанкаре верна в односвязной области

Доказательство:

Обычная лемма Пуанкаре (следствие) говорит о том, что дифференциальный критерий в области влечет локальную потенциальность. А локальная потенциальность влечет обычную, если область ещё и односвязна.

В чем смысл:

Мы смогли ослабиит область действия — была (звездно) выпуклая область, стала односвязная область

10. Плоские векторные поля

10.1. Теорема о веревочке

$O = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$\gamma : [0, 2\pi] \to O: \ t \mapsto (\cos t, \sin t)$

Тогда γ — нестягиваемая в O

Доказательство:

Рассмотрим векторное поле:

$$V(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

Поверим условие локальной потенциальности $\left(\frac{\partial V_1}{\partial y} \overset{?}{=} \frac{\partial V_2}{\partial x} \right)$:

$$\frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Это верно, значит V — локально потенциальное векторное поле

Теперь предположим противное: пусть γ — стягиваема

Значит по теореме интегралы гомотопных путей равны, а значит если γ стягиваема, то интеграл вдоль нее равен 0 (по лемме):

$$I(V, \gamma) = \int_0^{2\pi} \frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \cdot (-\sin t) + \frac{\cos t}{\cos^2 x + \sin^2 t} \cdot (\cos t)\, \mathrm{d}t = 2\pi \neq 0$$

Замечание: Мы можем брать интеграл ,так как по условию путь — кусочно гладкий

Интеграл не равен 0, значит γ — не стягиваема

10.2. Внутренняя нормаль к границе плоского множества

Напоминание:

Точка a называется граничной точкой множества A, если

$$\forall \varepsilon > 0 : \text{в } B(a, \varepsilon) \text{ содержатся как точки из } A \text{, так и точки не из } A$$

Граница множества A — множество всех его граничных точек, обозначается ∂A

Нормали:

$A \subset \mathbb{R}^2$ — плоское множество

$z_0 \in \partial A$

$L = B(z_0, r) \cap \partial A$ — гладкая кривая

$\vec{\tau}$ — касательный вектор (γ', *где L — носитель пути γ, или же просто касательная прямая к A в точке z_0).*

$\vec{n} \perp \vec{\tau}$ — вектор нормали

1. Внутренняя нормаль: $\exists \varepsilon > 0 \ \forall t \in (0, \varepsilon) \ z_0 + t\vec{n} \in A$.
2. Внешняя нормаль: $\exists \varepsilon > 0 \ \forall t \in (0, \varepsilon) \ z_0 + t\vec{n} \notin A$.

10.3. Стандартный компакт в $\mathbb{R}^2$

$K \subset \mathbb{R}^2$ — стандартный компакт, если

K — компакт

$\exists$ конечное число $\gamma_1, ..., \gamma_n$ — кусочно-гладких путей, таких, что

1. Носители L_k не пересекаются. (L_k *— носитель* γ_k)
2. $\partial K = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} L_k$
3. $\forall z_0 \in \partial K$ за исключением конечного числа:

$$\exists U(z_0), \ F : U(z_0) \to \mathbb{R}, \ U(z_0) \cap K \overset{(\star)}{=} U(z_0)(F \le 0)$$

   $(\star)$: эта запись в нотации теории меры, по смыслу она означает, что $U(z_0) \cap K$ — это в точности множество всех точек $U(z_0)$, в которых $F \le 0$

4. $\forall k: \ \gamma_k'(t) \neq 0$ за исключением конечного числа точек

   При этом касательный вектор γ_k' после поворота на $\dfrac{\pi}{2}$ (против часовой стрелки-положительный поворот) становится вектором внутренней нормали.

Набор $(\gamma_1, ..., \gamma_n)$ — называется **правильной ориентированной** границей K. Обозначается $\partial^+ K$.

10.4. Теорема об интеграле по границе стандартного компакта

$V = (P, Q)$ — локально потенциальное векторное поле в $G \subset \mathbb{R}^2$

(P, Q — просто обозначение для координатных функций)

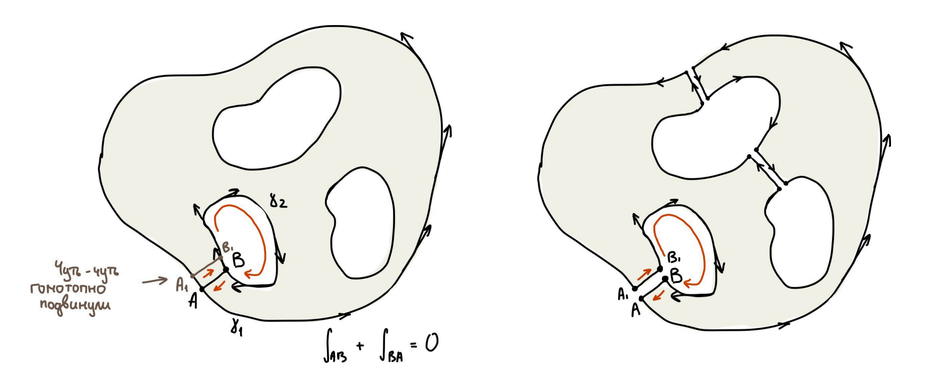
$K \subset G$ — стандартный компакт

Тогда

$$\int\limits_{\partial^+ K} P \,\mathrm{d}x + Q \,\mathrm{d}y = 0$$

Соглашение: Интеграл по набору путей — это сумма интегралов по этим путям

Доказательство:



Если не придираться то это очевидно. *(цитата).*

Доказать:

$$\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + ... + \int_{\gamma_n} = 0$$

Построим перемычку AB между компонентами границы γ_1, γ_2.

$$\int_{AB} + \int_{BA} = 0$$

Построим рядом A_1B_1 (немного подвинем AB гомотопно). Теперь можем обойти γ_1, γ_2, как бы склеили их, уменьшив количество компонент границы.

Строим такие пути, пока вся граница не объединится в один замкнутый путь.

$$\int_{\gamma_1} + ... + \int_{\gamma_n} = \int_{\gamma_1} + ... + \int_{\gamma_n} + \int_{AB} + \int_{B_1A_1} + ...$$

А теперь мы получили один замкнутый путь, который уже будет стягиваемым! А значит интеграл равен 0.

10.5. Условие локальной потенциальности плоского поля

$G \subset \mathbb{R}^2$ — область

$V = (P, Q)$ — непрерывное векторное поле.

Равносильны следующие утверждения:

1. Тогда V — локально потенциальное
2. $\forall R = [a, b] \times [c, d] : \ R \subset G$ — т.е. прямоугольник целиком внутри области, нет дырок внутри:

$$\int\limits_{\partial^+ R} P \,\mathrm{d}x + Q \,\mathrm{d}y = 0$$

Доказательство:

$\Rightarrow$

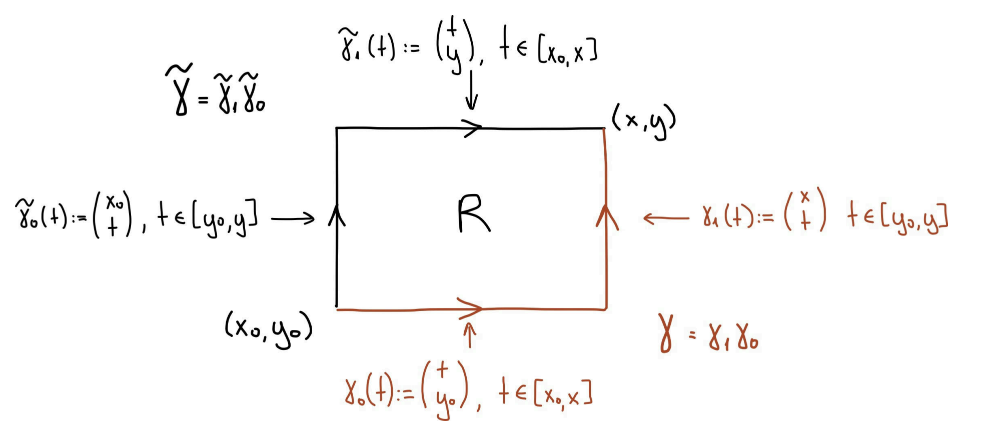
$\partial^+ R$ — стягиваемая петля. $\Rightarrow \int\limits_{\partial^+ R} P \,\mathrm{d}x + Q \,\mathrm{d}y = 0$

> Цирк с дрессированными муравьями: по свистку муравьи бегут в центр
>
> — К.П.К.

$\Leftarrow$

Хотим проверить, что $\forall z_0 = (x_0, y_0) \ \exists$ прямоугольник рядом с z_0 в котором поле потенциально

Рассмотрим пути ведущие из (x_0, y_0) в (x, y) — здесь (x, y) — произвольная, но такая, чтобы $R \subset G$:



$$\gamma := \gamma_1 \gamma_0, \quad \gamma_0 := \begin{pmatrix} t \\ y_0 \end{pmatrix}, \ t \in [x_0, x] \quad \gamma_1 := \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}, \ t \in [y_0, y]$$

$$\tilde{\gamma} := \tilde{\gamma}_1 \tilde{\gamma}_0, \quad \tilde{\gamma}_0 := \begin{pmatrix} x_0 \\ t \end{pmatrix}, t \in [y_0, y], \quad \tilde{\gamma}_1 := \begin{pmatrix} t \\ y \end{pmatrix}, t \in [x_0, x]$$

Заметим, что $\partial^+ R = \tilde{\gamma}^- \gamma$. А так как интеграл по границе прямоугольника равен 0, то:

$$0 = \int\limits_{\partial^+ R} P \,\mathrm{d}x + Q \,\mathrm{d}y = \int_{\gamma} P \,\mathrm{d}x + Q \,\mathrm{d}y + \int_{\tilde{\gamma}^-} P \,\mathrm{d}x + Q \,\mathrm{d}y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} P \,\mathrm{d}x + Q \,\mathrm{d}y = \int_{\tilde{\gamma}} P \,\mathrm{d}x + Q \,\mathrm{d}y$$

Введем потенциал

$$f := \int_{\gamma} P \,\mathrm{d}x + Q \,\mathrm{d}y = \int_{\tilde{\gamma}} P \,\mathrm{d}x + Q \,\mathrm{d}y$$

То есть для того чтобы посчитать потенциал в точке (x, y) будем рассматривать такие пути (двигаемся вправо, потом вверх).

$$f(x, y) = \int_{\gamma} P \,\mathrm{d}x + Q \,\mathrm{d}y = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0) \,\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} Q(x, s) \,\mathrm{d}s \Rightarrow f_y'(x, y) = Q(x, y)$$

$$f(x, y) = \int_{\tilde{\gamma}} P \,\mathrm{d}x + Q \,\mathrm{d}y = \int_{y_0}^{y} Q(x_0, s) \,\mathrm{d}s + \int_{x_0}^{x} P(t, y) \,\mathrm{d}t \Rightarrow f_x'(x, y) = P(x, y)$$

Тогда $\nabla f(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) \Rightarrow f$ — потенциал поля (P, Q) в выбранном прямоугольнике

11. Теория функций комплексного переменного

Я считаю, что в конце семестра начинать движение в сторону ТФКП неправильно — КПК, Лекция 27; 0.44.43.

11.1. Голоморфная функция

$f : O \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

z — внутренняя точка O

f — голоморфна (т.е. комплексно-дифференцируема) в z, если:

$$f(z+h) = f(z) + Ah + o(h),\ h \to 0$$

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = A \in \mathbb{C}$$

Свойства:

1. f — голоморфна в $z \Rightarrow f$ — непрерывна в z
2. Правила дифференцирования остаются как в $\mathbb{R}$:

$$(f+g)' = f' + g', \quad (fg)' = f'g + fg', \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \quad (f \circ g)' = f'(g) \cdot g'$$

3. $(z^m)' = mz^{m-1}$
4. $f(z) = \sum a_n (z_0 - z)^n$ — ряд с радиусом сходимости R

   Тогда f голоморфна в $B(z_0, R)$.

11.2. Уравнения Коши-Римана

$f(z) = u + iv$

$f : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

z_0 — внутренняя точка G

Пояснение: если $z = x + iy$, то:

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y), \quad u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

То есть u и v — "вещественная и мнимая" части нашей функции

Тогда:

1. f — голоморфна в $z_0 \Leftrightarrow u, v$ — дифференцируемы в z_0,

   И при этом выполняются следующие соотношения (**уравнения Коши-Римана**)

$$\begin{cases} u'_x(x_0,y_0) = v'_y(x_0,y_0) \\ u'_y(x_0,y_0) = -v'_x(x_0,y_0) \end{cases}$$

2. $f'(z_0) = u'_x(x_0,y_0) + iv'_x(x_0,y_0)$.

Доказательство:

Будем рассматривать функцию не как комплексную, а как $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$T(x,y) := (u(x,y), v(x,y))$$

1. $\Rightarrow$

   Определение голоморфности f :

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = Ah + o(h)$$

   Теперь поймем как переделать комплексное умножение $A \cdot z$ в вещественное:

$$\exists\ A = B + iC,\ z = x + iy \ \Rightarrow\ Az = (B+iC)(x+iy) = Bx - Cy + i(Cx + By)$$

$$z \mapsto Az \ \longleftrightarrow\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

   Подставим это в определение голоморфности, а также заменим функции на вещественные:

$$T(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - T(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + o(h)$$

   Это и есть определение дифференцируемостиы T в вещественном смысле

   При этом, зная что в матрице Якоби находятся ч.п. координатных функций:

$$\begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix} \Rightarrow u'_x = v'_y,\ u'_y = -v'_x$$

   В обратную сторону проворачиваем все рассуждения с конца, т.е. делаем присваивание $B := \ldots, C := \ldots$ и идем вверх по решению

2. $f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = [\text{по направлению } (t,0)] =$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{u(x_0+t,y_0) + iv(x_0+t,y_0) - u(x_0,y_0) - iv(x_0,y_0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{u(x_0+t,y_0) - u(x_0,y_0)}{t} + \lim_{t\to 0} \frac{i(v(x_0+t,y_0) - v(x_0,y_0))}{t}$$

$$= u'_x(x_0,y_0) + iv'_x(x_0,y_0)$$

11.3. Три теоремы о свойствах голоморфных функций (light)

$f : G \to \mathbb{C}$

G — область

f — голоморфна в G

f' — непрерывна

$f' \neq 0$ в G

Теорема о сохранении области:

Тогда $f(G)$ — область

Теорема о гладкости обратного отображения:

Дополнительно: $\exists f^{-1}$

Тогда f^{-1} — голоморфна

Теорема о локальной обратимости:

Не нужно условие,что $f' \neq 0$ на G

Но нужно условие, что $f'(z_0) \neq 0$

Тогда $\exists B(z_0, r)$ в котором f — обратима

11.4. Интеграл от комплекснозначной функции вещественной переменной

$\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ — кусочно непрерывная

$\varphi(t) = u(t) + iv(t)$

$$\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t + i\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t$$

11.5. Свойства интеграла от комплекснозначной функции вещественной переменной

1. $\lambda \in \mathbb{C} \quad \int_a^b \lambda\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \lambda\left(\int_a^b \varphi(t)\right)$
2. $\left|\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |\varphi(t)|\,\mathrm{d}t$
3. Все свойства вещественного интеграла.

Доказательство:

1. $\sphericalangle\ \lambda = a + ib$

   $\lambda\varphi(t) = au(t) - bv(t) + i(av(t) + bu(t)) \Rightarrow$

   $\Rightarrow \int_a^b \lambda\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b au(t) - bv(t)\,\mathrm{d}t + i\int_a^b av(t) + bu(t)\,\mathrm{d}t =$

$$= a\int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t - b\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t + ia\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t + ib\int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t = \lambda\int_a^b \varphi(t)$$

2. Вспомним экспоненциальную форму записи комплексного числа:

$$w = |w| \cdot e^{i\Theta} \ \Rightarrow\ |w| = w \cdot e^{-i\Theta}$$

   Т.к. интеграл — комплексное число, применим к нему эту формулу:

$$\left|\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right| = e^{-i\Theta} \cdot \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t \overset{(1)}{=} \int_a^b e^{-i\Theta}\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{Re}(\ldots) + i\int_a^b \mathrm{Im}(\ldots)$$

   Т.к. слева стоит модуль комплексного числа, т.е. вещественное число, то $i \cdot \int_a^b \mathrm{Im}(\ldots) = 0$

   Подставим это:

$$\left|\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right| = \int_a^b \mathrm{Re}\big(e^{-i\Theta}\varphi(t)\big) \leq \int_a^b \left|e^{-i\Theta}\varphi(t)\right|\mathrm{d}t \overset{(\star)}{=} \int_a^b |\varphi(t)|\,\mathrm{d}t$$

   $(\star) : \left|e^{-i\Theta}\right| = 1$

11.6. Криволинейный интеграл комплексной функции

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$

$\gamma(t) = z(t) = x(t) + iy(t)$

$L := \gamma([a,b])$

$f : L \to \mathbb{C}$ — непрерывна

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(z(t))(x'(t) + iy'(t))\,\mathrm{d}t$$

11.7. Свойства криволинейного интеграла комплексной функции

1. $f = u + iv$

$$\int_\gamma f\,\mathrm{d}z = \int_a^b (u(x(t),y(t)) + iv(x(t),y(t)))(x'(t) + iy'(t))\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_a^b (ux' - vy') + i(vx' + uy')\,\mathrm{d}t = \int_\gamma u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y + i\int_\gamma v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y$$

   Здесь в конце просто интегралы векторных полей из прошлой главы.

2. Автоматически выполняется:
   1. $\int_\gamma f_1 + f_2 = \int_\gamma f_1 + \int_\gamma f_2, \quad \int_\gamma \alpha f = \alpha\int_\gamma f$
   2. $\int_{\gamma^-} f = -\int_\gamma f, \quad \int_{\gamma_1\gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f$
3. $\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \max_{z\in L}|f(z)| \cdot l(\gamma)$

   Доказательство:

$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_a^b f(\gamma(t))(\gamma'(t))\,\mathrm{d}t\right| \overset{(\star)}{\leq} \int_a^b |f(\gamma(t))| \cdot |(\gamma'(t))|\,\mathrm{d}t \leq \max_{z\in L}|f(z)| \int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t = \max_{z\in L}|f(z)| \cdot l(\gamma)$$

   $(\star)$: т.к. внутри стоит комплеснозначная функция, то мы можем применять эту оценку

4. f_n — непрерывны на L

   $f = \sum f_n(z)$ — равномерно сходится на L

   Тогда:

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum \int_\gamma f_n(z) d(z)$$

11.8. Первообразная

$F, f : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

f — непрерывная

F — первообразная f в области G, если:

$$F \text{ — голоморфна в } G \text{ и } \forall z \in G : F'(z) = f(z)$$

11.9. Свойства первообразной

1. **Формула Ньютона-Лейбница**

   $f : L \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — непрерывна

   $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ — кусочно-гладкий

   $L = \gamma([a,b])$

   F — первообразная f

   $A = \gamma(a), B = \gamma(b)$

   Тогда

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = F(B) - F(A)$$

   Доказательство:

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(z(t))z'(t)\,\mathrm{d}t \overset{(\star)}{=} F(z(t))\Big|_a^b$$ — почти первообр (т.к. γ — *кусочно* гладкий)

   $(\star)$: здесь мы воспользовались тем, что внутри стоит комплекснозначная функция, значит интеграл для нее работает как для вещественной функции

2. Что делать, если нам дали первообразную — понятно, теперь давайте поймем как ее искать:

   Обозначим $f = u + iv, \quad F = P + iQ$

$$\text{Тогда } F \text{ — первообразная} \Longleftrightarrow \begin{cases} P \text{ — потенциал } (u, -v) \\ Q \text{ — потенциал } (v, u) \end{cases}$$

   Доказательство:

   $\Rightarrow$

   Дано, что F — первообразная f

$$\left.\begin{aligned} f(z) &= u + iv \\ F'(z) &= P'_x + iQ'_x \\ F'(z) &= f(z) \end{aligned}\right\} \Rightarrow P'_x = u,\ Q'_x = v$$

   По уравнению Коши-Римана:

$$P'_y = -Q'_x = -v, \quad Q'_y = P'_x = u$$

   Объединяя эту и предыдущую строчку, получаем ровно то, что и хотели:

$$\nabla P = (u, -v),\ \nabla Q = (v, u)$$

   $\Leftarrow$

   Проверим уравнения Коши-Римана:

$$\begin{pmatrix} P'_x & P'_y \\ Q'_x & Q'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}$$

   Они выполняются, поэтому, F — голоморфна

   А также

$$F'(z) = P'_x(z) + Q'_x(z) = u + iv = f(z)$$

3. Определение:

   $f : G \to \mathbb{C}$

   Тогда **f — локально имеет первообразную**, если:

$$\forall z \in G \ \ \exists U(z) \ \ \exists F : U(z) \to \mathbb{C}, \text{такая что } F \text{ — первообразная } f \text{ в } U(z)$$

   Имеет место следующее свойство:

   f — локально имеет первообразную

   f — непрерывна

   G — односвязна

   Тогда:

$$\exists \text{ первообразная } f \text{ в обл. } G$$

   Это теорема Пуанкаре

12. Теория меры

Во всей этой теме все включения нестрогие, но, во избежание загроможденности, они будут обозначаться как строгие ($\subset, \supset$ вместо $\subseteq, \supseteq$)

12.1. Полукольцо, алгебра, сигма-алгебра

Полукольцо

Пусть $\mathcal{P}$ — система подмножеств множества X.

$\mathcal{P}$ - **полукольцо**, если:

1. $\forall A, B \in \mathcal{P} \quad A \cap B \in \mathcal{P}$
2. $\varnothing \in \mathcal{P}$
3. $\forall A, B \in \mathcal{P} \quad \exists D_1, ..., D_n \ \left(D_i \in \mathcal{P};\ D_i \cap D_{j \neq i} = \varnothing\right)$ такие, что $A \setminus B = \bigsqcup_{i=1}^{n} D_i$

Свойства:

1. $A \in \mathcal{P} \nRightarrow A^c \in \mathcal{P}$
2. $A,\ B \in \mathcal{P} \nRightarrow A \star B \in \mathcal{P}, \quad \star = \{\cup, \setminus, \triangle\}$
3. $\forall A, B_1, ..., B_k \in \mathcal{P} \ \ \exists \underbrace{D_1, ..., D_n}_{\text{диз.}} : \ A \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right) = \bigsqcup_{i=1}^{n} D_i$

Доказательство:

[[опционально]] (могут спросить)

3. Будем по очереди выкидывать B_i :

   По 3 пункту определения п.к.

$$A \setminus B_1 = \bigsqcup_i C_i$$

   Теперь выкинем второе множество:

$$A \setminus (B_1 \cup B_2) = (A \setminus B_1) \setminus B_2 = \left(\bigsqcup_i C_i\right) \setminus B_2 = \bigsqcup_i (C_i \setminus B_2) \overset{(\star)}{=} \bigsqcup_i \bigsqcup_j C_{ij}$$

   $(\star)$: Т.к. $C_i \in \mathcal{P}$ и $B_2 \in \mathcal{P}$, то по тому же 3 пункту определния оно представляется в виде $\bigsqcup_j C_{ij}$

   Продолжаем этот процесс для каждой B_k и получаем необходимую формулу

Алгебра

Пусть $\mathcal{A}$ - система подмножеств множества X.

$\mathcal{A}$ - **алгебра**, если:

1. $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad A \setminus B \in \mathcal{A}$
2. $X \in \mathcal{A}$

Свойства:

1. $\varnothing = X \setminus X \in \mathcal{A}$
2. $A, B \in \mathcal{A} \ \Rightarrow \ A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{A}$
3. $A^c = X \setminus A \in \mathcal{A}$
4. $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c \in \mathcal{A}$
5. Всякая алгебра есть полукольцо

σ-алгебра

Пусть $\mathcal{A}$ - алгебра

Тогда $\mathcal{A}$ - **σ-алгебра**, если:

$$\forall A_1, A_2, ... \text{ — счётного семейства множеств, где все } A_i \in \mathcal{A} : \ \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{A}$$

12.2. Объем

Аддитивная функция:

$\mu : \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ — *аддитивная функция*, если:

1. μ не принимает одновременно $\pm\infty$
2. $\mu(\varnothing) = 0$
3. $\forall A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{P}$ — дизъюнктных, таких что $\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i\right) \in \mathcal{P} \ : \ \mu\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$

Объем:

$\mu : \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ — *объем*, если:

1. μ — аддитивная
2. $\forall A \in \mathcal{P},\ \mu(A) \geq 0$

Конечный объем:

$\mu : \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ — *конечный объем*, если $X \in \mathcal{P},\ \mu(X) < +\infty$, где X — носитель полукольца $\mathcal{P}$

12.3. Ячейка

$[a, b) = \{x \mid x \in \mathbb{R}^m, \forall i \ a_i \leq x_i < b_i\}$

Ячейки в $\mathbb{R}^k$ образуют полукольцо $\mathcal{P}^k$

12.4. Классический объем в $\mathbb{R}^m$

$\sphericalangle \ \mathbb{R}^m, \mathcal{P}^m$

$\mu([a, b)) = \prod_{i=1}^{m} (b_i - a_i)$ — объём параллелепипеда.

Этот объём, гм... аддитивен... (Да, это цитата).

12.5. Свойства объема: усиленная монотонность, конечная полуаддитивность

$\mu : \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ — объем, тогда выполняются следующие свойства:

1. Усиленная монотонность

$$\forall A, A_1, ..., A_n \in \mathcal{P} : \ \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i \subset A \ \Rightarrow \ \sum_{i=1}^{n} \mu A_i \leq \mu A$$

2. Конечная полуаддитивность

$$\forall A, A_1, ..., A_n \in \mathcal{P},\ A \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i \ \Rightarrow \ \sum_{i=1}^{n} \mu A_i \geq \mu A$$

3. Бонус

$$\forall A, B \in \mathcal{P} \text{ и } A \setminus B \in \mathcal{P},\ \mu(B) \text{ — конечно } \Rightarrow \ \mu(A \setminus B) \geq \mu A - \mu B$$

Доказательство:

1. По 3 свойству полукольца:

$$A \setminus \left(\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigsqcup_{i=1}^{s} D_i$$

   То есть

$$A = \left(\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i\right) \sqcup \left(\bigsqcup_{i=1}^{s} D_i\right)$$

   По замечанию для объема:

$$\mu A = \sum_{i=1}^{n} \mu A_i + \sum_{i=1}^{s} \mu D_i \geq \sum_{i=1}^{n} \mu A_i$$

2. Для начала вместо того чтобы рассматривать A_i будем рассматривать только интересующие нас части:

$$B_k := A \cap A_k \in \mathcal{P} \ \Rightarrow \ A = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$$

   Сделаем B-шки дизъюнктивными:

$$C_1 := B_1,\ C_2 := B_2 \setminus B_1,\ C_k := B_k \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} B_i\right) \ \Rightarrow \ A = \bigsqcup_{\text{кон.}} C_k$$

   Но не факт, что $C_i \in \mathcal{P}$, починим:

$$C_k = B_k \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} B_i\right) = \bigsqcup_j D_{kj}, \quad \forall j \ D_{kj} \in \mathcal{P}$$

   Тогда:

$$A = \bigsqcup_{k,j} D_{kj} \Rightarrow \mu A = \sum_{k,j} \mu D_{kj}$$

   По монотонности:

$$\forall k : \sum_j \mu D_{kj} \leq \mu A_k \quad \text{т.к. } C_k \subset B_k \subset A_k$$

   Итого:

$$\mu A = \sum_k \sum_j \mu D_{kj} \leq \sum_k \mu A_k$$

3. Два случая:
   1. $B \subset A$:

      $A = B \sqcup (A \setminus B)$

      $\mu A = \mu B + \mu(A \setminus B) \Rightarrow \mu(A \setminus B) = \mu A - \mu B$
   2. $B \not\subseteq A$:

      $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$

      $\mu(A \setminus B) = \mu(A \setminus (A \cap B)) = \mu A - \mu(A \cap B) \overset{(\star)}{\geq} \mu A - \mu B$

      $(\star)$: по пункту 1 : $A \cap B \subset B \Rightarrow \mu(A \cap B) \leq \mu B$

12.6. Мера, пространство с мерой

$\mu : \underbrace{\mathcal{P}}_{\text{п/к}} \to \overline{\mathbb{R}}$ — **мера**, если μ — объем и μ — счетно-аддитивно, те:

$$A, A_1, ..., \in \mathcal{P} : A = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} A_i \quad \mu A = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu A_i$$

Пространство с мерой: тройка $\left(\underbrace{X}_{\text{мн-во}}, \underbrace{\mathcal{A}}_{\sigma\text{-алг.}}, \underbrace{\mu}_{\text{мера}}\right)$

12.7. Теорема об эквивалентности счетной аддитивности и счетной полуаддитивности

$\mu : \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ — объем

Тогда эквивалентно:

1. μ — мера, т.е μ — счетно-аддитивна
2. μ — счетно-полуаддитивна (нет дизъюнктивности)

$$\forall A, A_1 ... \in \mathcal{P},\ A \subset \bigcup A_i \Rightarrow \mu A \leq \sum_i \mu A_i$$

Доказательство:

$1 \Rightarrow 2$

Берем доказательство предыдущей теоремы второй пункт, но вместо конечного объединения по k берем счетное объединение (так как у нас теперь мера, то все хорошо)

$2 \Rightarrow 1$

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i \overset{?}{\Rightarrow} \mu A = \sum_{i=1}^{\infty} \mu A_i$$

По усиленной монотонности:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu A_i \leq \mu A$$

По определению счетной полуаддитивности:

$$\mu A \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu A_i$$

Итого:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu A_i \leq \mu A \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu A_i$$

И если перейти к пределу при $n \to +\infty$:

$$\mu A = \sum_{i=1}^{\infty} \mu A_i$$

12.8. Формулировка теоремы о непрерывности меры снизу

$\mathcal{A}$ — алгебра

$\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ — объем

Тогда эквивалентно:

1. μ — мера, т.е счетно-аддитивна
2. μ — непрерывна снизу, те:

$$\forall A, A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}, \quad A_1 \subset A_2 \subset ..., \quad A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \Rightarrow \mu A = \lim_{i \to \infty} \mu A_i$$

12.9. Теорема о непрерывности меры сверху

$\mathcal{A}$ — алгебра

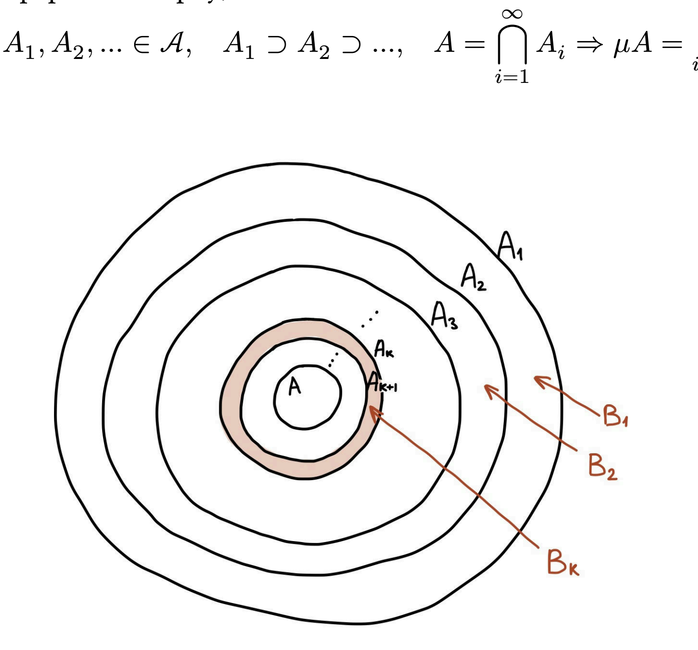
$\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ — *конечный* объем

Тогда эквивалентно:

1. μ — мера, т.е счетно-аддитивна
2. μ — непрерывна сверху, те:

$$\forall A, A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}, \quad A_1 \supset A_2 \supset ..., \quad A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \Rightarrow \mu A = \lim_{i \to \infty} \mu A_i$$

Доказательство:



$1 \Rightarrow 2$

Пусть $B_k := A_k \setminus A_{k+1}$. Тогда такие B_k дизъюнктивны. Отсюда получаем, что

$$A_1 = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} B_i \sqcup A$$

Так как μ мера, то получаем, что

$$\mu A_1 = \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \mu B_i}_{\text{сходится}} + \mu A$$

Теперь посмотрим на “хвост” этого ряда, и аналогично первому утверждению доказательства напишем:

$$\mu A_i = \sum_{k=i}^{\infty} \mu B_k + \mu A$$

Т.к. ряд из $\sum_{i=1}^{\infty} \mu B_i$ сходится, то при $i \to +\infty$, “хвост” $\to 0$: $\sum_{k=i}^{\infty} \mu B_k \underset{i \to +\infty}{\to} 0$

Делаем предельный переход в равенстве выше, и получаем:

$$\lim_{i \to \infty} \mu A_i = 0 + \mu A = \mu A$$

$2 \Rightarrow 1$

В доказательстве этого пункта мы будем пользоваться только следствием пункта 2, а именно:

$$A_1 \supset A_2 \supset ..., \quad A = \bigcap A_k = \varnothing \Rightarrow \mu A = \lim_{i \to +\infty} \mu A_i = 0$$

Мы хотим проверить счетную аддитивность, т.е.

$$C = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} C_i \overset{?}{\Rightarrow} \mu C = \sum_{i=1}^{\infty} \mu C_i$$

Для этого введем множества A_k следующим образом:

$$A_k = \bigcup_{i=k+1}^{\infty} C_i = C \setminus \left(\bigsqcup_{i=1}^{k} C_i\right)$$

Так как это конечное объединение, то $\bigsqcup_{i=1}^{k} C_i \in \mathcal{A}$, а значит и правая часть $\in \mathcal{A} \Rightarrow A_k \in \mathcal{A}$

Заметим также, что $\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k = \varnothing$, т.к. все C_i дизъюнктны, то любая точка из C содержится ровно в одном C_i, а значит в $A_{k>i}$ она уже содержаться не будет (по определению A_k), и в пересечении всех A_k её тоже не будет

Отсюда следует, что мы можем применять следствие 2 пункта из начала доказательства

Осталось только заметить, что:

$$C = \bigsqcup_{i=1}^{k} C_i \sqcup A_k$$

Т.к. μ — объем:

$$\mu C = \sum_{i=1}^{k} \mu C_i + \mu A_k$$

Делаем предельный переход при $k \to +\infty$

$$\mu C = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu C_i + 0$$

13. Мера Лебега

13.1. Полная мера

$\mu : \mathcal{P} \subset 2^X \to \overline{\mathbb{R}}$ — мера

μ — **полная мера**, если

$$(B \in \mathcal{P}:\ \mu(B) = 0) \Rightarrow (\forall A \subset B:\ A \in \mathcal{P},\ \text{а значит } \mu(A) = 0)$$

Формально: если в полукольце есть множество меры 0, то все его подмножества также лежат в полукольце, а значит тоже имеют меру 0

13.2. σ-конечная мера

$\mu : \mathcal{P} \subset 2^X \to \overline{\mathbb{R}}$ — мера (или объём)

μ — **σ-конечная мера**, если

$$\exists A_1, A_2, ... \in \mathcal{P} \quad X = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i,\ \mu(A_i) < +\infty$$

Формально:

Всё пространство можно представить в виде объединения счетного числа множеств с конечной мерой

13.3. Формулировка теоремы о лебеговском продолжении меры

$\mathcal{P}_0 \subset 2^X$ — полукольцо

$\mu_0 : \mathcal{P}_0 \to \overline{\mathbb{R}}$ — σ-конечная мера

Тогда

1. $\exists\sigma$-алгебра $\mathcal{A} : \mathcal{P}_0 \subset \mathcal{A}$
2. $\exists\mu$ — мера на $\mathcal{A}$:

Такие, что:

1. $\mu|_{\mathcal{P}_0} = \mu_0$, т.е. μ — продолжение μ_0 на $\mathcal{A}$
2. μ — полная мера
3. Если $\mathcal{A}_1$ — σ-алг. : $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_1$ и ν — продолжение меры μ_0 на $\mathcal{A}_1$, ν — полная, тогда $\nu|_{\mathcal{A}} = \mu$
4. Если $\mathcal{P}$ — полукольцо, такое что $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P} \subset \mathcal{A}$ и мера ν — продолжение μ_0 на $\mathcal{P}$, тогда $\mu|_{\mathcal{P}} = \nu$
5. Логически, это то, как нужно строить меру μ :

   $\forall A \in \mathcal{A}:\ \mu A = \inf\left\{\sum_{k=1}^{+\infty} \mu_0 P_k \,\middle|\, P_k \in \mathcal{P}_0,\ A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k\right\}$

   По сути, мы берем всевозможные покрытия A при помощи элементов $\mathcal{P}_0$ и суммируем их меры, а потом берем inf от полученных значений

13.4. Счетная аддитивность классического объема

$\mathcal{P}^m$ — множество всех ячеек на $\mathbb{R}^m$

μ — классический объем

Тогда μ — σ-конечная мера

Доказательство:

σ-конечность очевидна: можно либо разлиновать пространство на клеточки как в тетради, либо просто взять увеличивающийся параллелепипед

Вместо доказательства счетной-аддитивности, докажем счетную-полуаддитивность (это эквивалентно)

$$P = [a, b),\ P_n = [a_n, b_n):\ P \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} P_n \overset{?}{\Rightarrow} \mu P \le \sum \mu P_n$$

Хотим использовать идею компактности отрезка, для этого подгоним все под это:

Замечание: Далее под фразой "чуть уменьшим" вектор из $\mathbb{R}^m$ будем подразумевать небольшое уменьшение каждой из его координат

1. Чуть уменьшим b и получим b' :

   $$[a, b'] \subset [a, b):\ \mu(P \setminus [a, b')) < \varepsilon$$

2. Теперь для каждого P_n (который равен $[a_n, b_n)$), немного уменьшим a_n и получим a'_n :

   $$(a'_n, b_n) \supset [a_n, b_n):\ \mu([a'_n, b_n) \setminus P_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

3. Получаем, что $\underbrace{[a, b']}_{\text{компакт}} \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} (a'_n, b_n)$

   Т.к. это компакт, а справа стоит открытое покрытие, то по определению существует конечное подпокрытие:

   $$[a, b'] \subset \bigcup_{n=1}^{N} (a'_n, b_n)$$

   Сверху за N приняли самый большой номер в нашем конечном покрытии

   Теперь справа добавим часть точек, а слева уберем. Очевидно включение от этого не сломается:

   $$[a, b') \subset \bigcup_{n=1}^{N} [a'_n, b_n)$$

По конечной аддитивности:

$$\mu[a, b) - \varepsilon \overset{(1)}{\le} \mu[a, b') \overset{(3)}{\le} \sum_{n=1}^{N} \mu[a'_n, b_n) \overset{(2)}{\le} \sum_{n=1}^{N} \Big(\mu[a_n, b_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\Big)$$

$$\mu[a, b) \le 2\varepsilon + \sum_{n=1}^{N} \mu[a_n, b_n) \le 2\varepsilon + \sum_{n=1}^{+\infty} \mu[a_n, b_n)$$

Делаем предельный переход при $\varepsilon \to 0$ и получаем ровно то, что и хотели

13.5. Мера Лебега, измеримое по Лебегу множество

Мера Лебега в $\mathbb{R}^m$— лебеговское продолжение классического объема

$\mathcal{M}^m$ — σ-алгебра измеримых по Лебегу множеств размерности m.

λ, λ_m — мера Лебега (индекс m можно указать, если важна размерность пространства)

Свойства:

1. $\mathcal{M}^m$ — содержит все ячейки, их пересечения и объединения.

   Также оно содержит множества из одной точки (пересечение счетного числа сужающихся ячеек)

   Точка имеет меру 0 (очевидно)

   Например $\mathbb{Q}$ тоже содержится в $\mathcal{M}^1$, т.к. это счетное объединение точек
2. Содержит все открытые и замкнутые множества
3. Существуют неизмеримые множества
4. $\lambda(\text{огр}) < +\infty$
5. $\lambda(\text{отк}) > 0$
6. E — измеримо и $\lambda(E) = 0 \Rightarrow$ у E нет внутренних точек
7. $A \in \mathcal{M}^m$, тогда $\forall\varepsilon > 0$:
   - $\exists$ открытое $G_\varepsilon : A \subset G_\varepsilon : \lambda(G_\varepsilon \setminus A) < \varepsilon$
   - $\exists$ замкнутое $F_\varepsilon : A \supset F_\varepsilon : \lambda(A \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$

13.6. Лемма о структуре открытых множеств и множеств меры 0

Напоминание: двоично-рациональные координаты — координаты вида $\frac{z}{2^n}$, где $z \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}$

1. $O \subset \mathbb{R}^m$ — открытое

   Тогда $\exists Q_i:\ O = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} Q_i$

   Причем Q_i — кубические ячейки с двоично рациональными координатами, такие, что $\overline{Q_i} \subset O$.

2. a) E — измеримо

      $\lambda E = 0$

      Тогда $\forall\varepsilon > 0\ \exists(Q_i):\ E \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} Q_i$ и $\sum_{i=1}^{+\infty} \lambda Q_i < \varepsilon$

      Причем Q_i — кубические ячейки с двоично рациональными координатами

   b) Также по пункту 1 леммы, можно взять в качестве Q_i — шары (как открытые так и замкнутые)

Доказательство:

1. $\forall x \in O$ подберем $Q(x)$ так что, $x \in Q(x) \subset O$, $Q(x)$ — двоично рациональная ячейка, замыкание которой лежит в O.

   Тогда $O = \bigcup_{x \in O} Q(x)$

   Сверху написано, что мы пробегаемся по *континуальному* множеству O, объединяя все ячейки, но на самом деле нужно заметить, что ячеек с двоично-рациональными координатами (как и с просто рациональными координатами) счетно, т.к. у нас на первую координату счетное число вариантов, и на вторую координату тоже счетное число вариантов.

   Поэтому на самом деле можно сказать что ячейки можно пронумеровать, и получить: $O = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$.

   Осталось объединение сделать дизъюнктивным:

   $O = Q_1 \sqcup \underbrace{(Q_2 \setminus Q_1)}_{\bigsqcup_{j\ \text{кон}} Q_{2j}} \sqcup \underbrace{(Q_3 \setminus (Q_2 \cup Q_1))}_{\bigsqcup_{k\ \text{кон}} Q_{3k}} \ ...$

   Чтобы ячейки стали кубическими возьмем в каждой скобке самый крупный знаменатель и разобъем на ячейки по нему.

2. a) Из 5го пункта продолжения меры:

      $0 = \lambda E = \inf\left\{\sum_{i=1}^{+\infty} \lambda P_i \,\middle|\, E \subset \bigcup P_i\right\}$

      Т.к. inf равен 0, то мы можем найти там сколько угодно малое значение

      Подберем покрытие E параллепипедами $P_i : \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda P_i < \frac{\varepsilon}{2}$

      Теперь каждую ячейку P_i "поместим" в ячейку R_i с двоично-рациональными координатами, так чтобы $\lambda(R_i \setminus P_i) < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$

      Получается, что $\sum_{i=1}^{+\infty} \lambda R_i < \varepsilon$

      Чтобы ячейки стали кубическими, аналогично прошлому пункту раздробим R_i

   b) Заметим следующее включение: $Q\left(a, \frac{r}{\sqrt{m}}\right) \subset B(a, r) \subset Q(a, r) \subset B\big(a, r\sqrt{m}\big)$

      Известно, что $\mu(Q(a, r)) \cdot \sqrt{m}^m = \mu\big(Q\big(a, r\sqrt{m}\big)\big)$ — по формуле классического объёма

      $\sqrt{m}^m$ — константа, поэтому поделим в первом пункте ε на $\sqrt{m}^m$, найдем соответсвующее покрытике кубами, и для кадого куба построим описаный шар.

      За счет неравенства суммарный объем шаров будет меньше ε

13.7. Пример неизмеримого по Лебегу множества

Зададим отношение $\sim$ на $\mathbb{R}$:

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

$\mathbb{R}/_\sim = A$ — т.е из каждого класса эквивалентности взяли по одной точке. Заодно можно считать, что $A \subset [0, 1]$

Заметим, что есть следующее включение:

$$[0, 1] \subset \bigsqcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (A + q) \subset [-1, 2]$$

Левая часть следует из того, что если взять точку $x \in [0, 1]$, представителя его класса $y \in A$ и найти $x - y$, то окажется что это значение во-первых рациональное, во-вторых $\in [-1, 1]$, а т.к. мы перебираем все рациональные числа, из этого отрезка в качестве смещений, то в x мы тоже попадем

Правая часть следует из того, что смещая точки из отрезка $[0, 1]$ на смечение от –1 до 1, мы всегда попадаем в отрезок $[-1, 2]$

Предположим A — измеримо, тогда можем посчитать меру отрезков (воспользуемся счетной аддитивностью):

$$1 \le \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} \lambda(A + q) \le 3$$

Пока строго обосновывать не будем, но при сдвиге мера множества не меняется

Значит $\sum \lambda(A + q)$ — сумма счетного числа одинаковых слагаемых, соответственно есть два варианта:

1. $\lambda(A + q) = 0 \Rightarrow \sum \lambda(A + q) = 0$
2. $\lambda(A + q) \ne 0 \Rightarrow \sum \lambda(A + q) = \infty$

В обоих случаях одно из неравенств не выполняется, а значит A — неизмеримое.

13.8. Регулярность меры Лебега

Лемма:

$A \in \mathcal{M}^m, \forall\varepsilon > 0$:

1. $\exists$ открытое $G_\varepsilon : A \subset G_\varepsilon : \lambda(G_\varepsilon \setminus A) < \varepsilon$
2. $\exists$ замкнутое $F_\varepsilon : A \supset F_\varepsilon : \lambda(A \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$

Доказательство:

1. Пусть $\lambda A < +\infty$.

   Тогда: $\lambda A = \inf\left\{\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda P_k | A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} P_k\right\}$

   Из технического описания мы можем выбрать элемент, который лежит сколь угодно близко к inf:

   $$\forall\varepsilon > 0\ \exists(P_k) : \lambda A \le \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda P_k \le \lambda A + \frac{\varepsilon}{2}$$

   Теперь осталось сделать каждое P_k открытым, чтобы их счетное объединение было тоже открытым, содеражло A и было ограничено. На это мы оставили "запас" $\frac{\varepsilon}{2}$, как раз на то чтобы раздуть ячейки

   Немного уменьшим a_k и получим a'_k :

   $$(a'_k, b_k) \supset P_k,\ \text{а также}\ \ \mu((a'_k, b_k) \setminus P_k) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$$

   Тогда наше $G_\varepsilon := \bigcup_{k=1}^{+\infty} (a'_k, b_k)$ — открытое, т.к. это счетное объединение открытых

   Очевдино, что:

   1. Т.к. $(a'_k, b_k) \supset P_k \Rightarrow A \subset G_\varepsilon \Rightarrow \lambda A \le \lambda G_\varepsilon$
   2. $\lambda G_\varepsilon \le \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda P_k\right) + \frac{\varepsilon}{2} < \lambda A + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \lambda A + \varepsilon$

   Мы получили ровно то что хотели: $\mu(G_\varepsilon \setminus A) < \varepsilon$

   Теперь предположим, что $\mu A = +\infty$

   Тогда по σ-конечности: $\mathbb{R}^m = \bigsqcup Q_i$, где Q_i — кубические ячейки

   Рассмотрим A как пересечение с этой "сеткой":

   $$A = \bigsqcup_{j=1}^{+\infty} \underbrace{A \cap Q_j}_{\subset G_{\varepsilon,j}}, \quad \lambda\big(G_{\varepsilon,j} \setminus \big(A \cap Q_j\big)\big) < \frac{\varepsilon}{2^j}$$

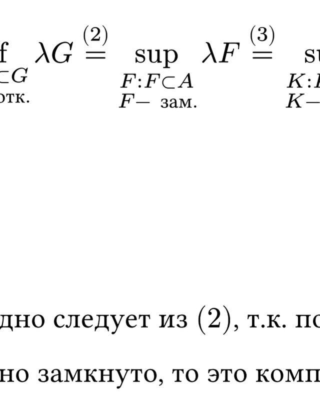
   Тогда $G_\varepsilon := \bigcup_{j=1}^{+\infty} G_{\varepsilon,j}$ — открыто, т.к. счетное объединение открытых, а также

2. Просто возьмем A^c и его G_ε, мы знаем что:

   $$A^c \subset G_\varepsilon \Rightarrow A \supset (G_\varepsilon)^c$$

   $F_\varepsilon := G_\varepsilon^c$— замкнуто (дополнение до открытого), при этом очевидно что:

   $$\lambda(G_\varepsilon \setminus A^c) < \varepsilon \Rightarrow \lambda(F_\varepsilon \setminus A) < \varepsilon$$

   Т.к. разница между этими множествами — одна и та же "рамочка" (заштрихована на картинке)

Теорема:

$\forall A \in \mathcal{M}^m$

$$\lambda A \overset{(1)}{=} \inf_{\substack{G: A \subset G \\ G-\ \text{отк.}}} \lambda G \overset{(2)}{=} \sup_{\substack{F: F \subset A \\ F-\ \text{зам.}}} \lambda F \overset{(3)}{=} \sup_{\substack{K: K \subset A \\ K-\ \text{ком.}}} \lambda K$$

Доказательство:

$(1), (2)$ — по лемме выше.

(3):

1. Если A — ограничено, то равенство очевидно следует из (2), т.к. подмножество ограниченного множества — ограничено, а если мы еще знаем что оно замкнуто, то это компакт
2. Иначе

   $Q(0, n)$ — куб с центром в 0 и стороной n

   $$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap Q(0, n)) \Rightarrow \underbrace{\lambda A = \lim_{n \to +\infty} \lambda(A \cap Q(0, n))}_{\text{непрерывность снизу } (\star)}$$

   $(\star) : A \cap Q(0, 1)\ \subset\ A \cap Q(0, 2)\ \subset\ A \cap Q(0, 3) \subset ...$

   Т.к. λA равна пределу, то для любого ε мы можем подобраться к λA близко на этот самый ε, т.е.

   $$|\lambda A - \lambda(A \cap Q(0, N))| < \varepsilon$$

   Теперь, т.к. $A \cap Q(0, N)$ ограничено кубом, то равенство (2) также автоматически дает нам возможность приблизить $\lambda(A \cap Q(0, N))$ на ε к $\sup_{\substack{K: K \subset A \\ K-\ \text{ком.}}} \lambda K$, а значит, мы приблзили то что мы хотели к λA на 2ε

13.9. Борелевская сигма-алгебра

$\mathcal{B}$ — **борелевская** σ-алгебра в $\mathbb{R}^m$ — минимальная σ-алгебра, содержащая все открытые множества

$B \in \mathcal{B}$ — называется борелевским множеством

Следствия:

1. $\forall A \subset \mathcal{M}^m\ \exists B, C$ — борелевские, такие что $B \subset A \subset C, \quad \lambda_m(C \setminus A) = \lambda_m(A \setminus B) = 0$

   Доказательство:

   $B := \bigcup_n F_{\frac{1}{n}} \quad C := \bigcap_n G_{\frac{1}{n}}$
2. $\forall A \in \mathcal{M}^m$ представимо в виде $A = B \cup N$, где B — борелевское, а $\lambda N = 0$
3. Регулярность меры Лебега

14. Мера Лебега и преобразования пространства

14.1. Лемма о сохранении измеримости при непрерывном отображении

$T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — непрерывно

$\forall E \in \mathcal{M}^m : \lambda_m E = 0$ выполняется: $\lambda T(E) = 0$

Тогда

$$\forall A \in \mathcal{M}^m \ : TA \in \mathcal{M}^n$$

Доказательство:

Прямое следствие регулярности меры Лебега:

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \cup \mathcal{N},$$

K_j — компакт, $\lambda \mathcal{N} = 0$

$$TA = \bigcup_{j=1}^{\infty} TK_j \cup T\mathcal{N}$$

TK_j — компакт (как образ компакта), $\lambda T\mathcal{N} = 0 \Rightarrow TA$ — измеримо.

14.2. Лемма о сохранении измеримости при гладком отображении. Инвариантность меры Лебега относительно сдвигов

$O \subset \mathbb{R}^m$ — открытое

$\Phi : O \to \mathbb{R}^n, \quad \Phi \in C^1(O)$

Тогда

$$\forall A \in \mathcal{M}^m : \ \Phi(A) \text{ — измеримо}$$

Доказательство:

Достаточно проверить, что $\lambda A = 0 \Rightarrow \lambda\Phi(A) = 0$. Тогда сработает предыдущая лемма (прямо над этой)

По лемме о структуре открытых множеств и множеств меры 0 (пункт $2.a$)

$$\lambda A = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \underset{\text{кубы}}{(Q_k)} : A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} Q_k : \ \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda Q_k < \varepsilon$$

Рассмотрим два случая:

1. $\sqsupset A \subset \underbrace{\overline{P}}_{\substack{\text{замкн.} \\ \text{пар-ед}}} \subset O$

   Т.к. $\overline{P}$ — компакт, а Φ' — непрерывно, то она достигает своего максимума:

   $$L := \max_{x \in \overline{P}} \|\Phi'(x)\|$$

   Тогда по теореме Лагранжа:

   $$\forall x, y \in \overline{P} : \ |\Phi(x) - \Phi(y)| \le L \cdot |x - y|$$

   Отсюда следует следующие включение для образа шара:

   $$\Phi(B(x_0, r)) \subset B(\Phi(x_0), Lr)$$

   Покроем наше начальное множество кубами (по лемме так можно), а затем каждый куб поместим в шар такого радиуса, чтобы он лежал в нем целиком

   $$A \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} Q(x_i, r_i) \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} B\left(x_i, r_i\sqrt{m}\right) \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} Q\left(x_i, r_i\sqrt{m}\right)$$

   Также по лемме нам известно, что :

   $$\sum_{i=1}^{+\infty} \lambda Q(x_i, r_i) \le \varepsilon \Rightarrow \sum_{i=1}^{+\infty} Q\left(x_i, r_i\sqrt{m}\right) \le \varepsilon \cdot \sqrt{m}^m$$

   Теперь посмотрим, что происходит с образом:

   $$\Phi(A) \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} \Phi\left(B\left(x_i, r_i\sqrt{m}\right)\right) \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} B\left(\Phi(x_i), Lr_i\sqrt{m}\right) \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} Q\left(\Phi(x_i), Lr_i\sqrt{m}\right)$$

   По счетной полуаддитивности:

   $$\mu\Phi(A) \le \sum_{i=1}^{+\infty} \mu Q\left(\Phi(x_i), Lr_i\sqrt{m}\right) = L^m \sum_{i=1}^{+\infty} \mu Q\left(\Phi(x_i), r_i\sqrt{m}\right) \le L^m \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{m}^m$$

   Т.к. $L^m \cdot \sqrt{m}^m$ — контанта, то можем поделить на нее изначальное наше ε и получить, что

   $$\mu\Phi(A) < \varepsilon' \Rightarrow \mu\Phi(A) = 0$$

2. Общий случай, то есть $A \subset O$

   $O = \bigsqcup Q_i$ — где, Q_i — кубические ячейки

   Тогда $\overline{Q_i} \in O$, а значит работает пункт 1:

   $$\left.\begin{matrix} A = \bigsqcup (A \cap Q_i) \\ \lambda(A \cap Q_i) = 0 \end{matrix}\right\} \overset{1.}{\Rightarrow} \lambda\Phi(A \cap Q_i) = 0 \Rightarrow \Phi A = \bigcup \Phi(A \cap Q_i) \Rightarrow \lambda\Phi(A) = 0$$

Следствие:

λ — инвариантна относительно сдвигов в $\mathbb{R}^m$

То есть

$$\forall A \in \mathcal{M}^m \ \forall a \in \mathbb{R}^m : \ A + a \in \mathcal{M}^m \ \text{ и } \ \lambda A = \lambda(A + a)$$

Доказательство:

1. Так как $\Phi : x \mapsto x + a$ — гладкое отображение, то $A + a$ измеримо
2. По смыслу: для любого покрытия A ячейками, сдвинем каждую ячейку на a и получим нужное покрытие:

   $$A \subset \bigcup P_i \ \Leftrightarrow \ A + a \subset \bigcup (P_i + a) \Rightarrow \lambda A = \lambda(A + a)$$

14.3. Теорема о мерах, инвариантных относительно сдвигов

μ — мера на $\mathcal{M}^m$

1. Пусть μ — инвариантна, относительно сдвигов, т.е:

   $$\forall A \in \mathcal{M}^m \ \forall v \in \mathbb{R}^m \quad \mu(A) = \mu(A + v)$$

2. Для любого ограниченного $A \in \mathcal{M}^m : \ \mu(A) < +\infty$

Тогда

$$\exists k \in [0, +\infty] \quad \mu = k \cdot \lambda \quad (\Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{M}^m : \ \mu A = k \cdot \lambda A)$$

Доказательство:

(Теорема находится в графе определений, но на всякий случай):

Сделаем присвоение $k := \mu([0,1]^m)$

$\sphericalangle \ \tilde{\mu} = \dfrac{\mu}{k}$

Заметим, что $\tilde{\mu}([0,1]^m) = \lambda([0,1]^m)$, а значит $\tilde{\mu}$ и λ совпадают на всех двоично-рациональных ячейках

Теперь запустим теорему о продолжении, и получим, что $\lambda \equiv \tilde{\mu}$

14.4. Инвариантность меры Лебега при ортогональном преобразовании

Лемма:

$(X, \mathcal{A}, \_), (X', \mathcal{A}', \nu')$ — два пространства с мерой

$T : X \to X'$ — биекция

Тогда

$$\nu := \nu' \circ T, \quad (\nu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}) \text{ — мера}$$

Доказательство:

Проверим счетную аддитивность

$\sqsupset A = \bigsqcup A_k$

Тогда:

$$\nu A = \nu'(TA) = \nu'\left(T\left(\bigsqcup A_k\right)\right) = \nu'\left(\bigsqcup TA_k\right) = \sum \nu'(TA_k) = \sum \nu A_k$$

Полсучается счетная аддитивность есть, значит ν — мера

Примечание (не использующееся, но обговоренное на лекции). Правильный способ определения σ-алгебры: не накладывать ограничений на T, но при этом определять $\mathcal{A}$ и $\nu' : T^{-1}(\mathcal{A}') \subset \mathcal{A}, \ \nu'(A) := \nu(T^{-1}(A))$.

Иваривантность при ортогональных преобразованиях

$T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — линейное ортогональное преобразование

Тогда

$$\forall A \in \mathcal{M}^m \quad T(A) \in \mathcal{M}^m \ \text{ и } \ \lambda T(A) = \lambda A$$

Доказательство:

1. Так как $T \in C^1$ — измеримость сохраняется
2. $\sqsupset \mu A := \lambda(TA)$ — это мера, по лемме, так как T — биективно

   При этом μ инвариантна относительно сдвигов:

   $$\mu(A + a) = \lambda(T(A + a)) = \lambda(TA + Ta) = \mu A$$

   Заметим также, что T шар с центром в 0 переводит в шар с центром в 0 того же радиуса

   $$T(B(0, r)) = B(0, r)$$

   Получается, что $\mu(B(0, r)) = \lambda(B(0, r)) \Rightarrow \mu(\text{огр}) < +\infty$

   А тогда по теореме о мерах, инвариантных относительно сдвигов:

   $$\exists k : \ \mu = k \cdot \lambda, \quad k = \frac{\mu(B(0, r))}{\lambda(B(0, r))} = 1 \Rightarrow \mu \equiv \lambda$$

14.5. Лемма “о структуре компактного оператора”

$V : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — линейный оператор

$\det V \ne 0$

Тогда $\exists$ ортонормированные базисы $h_1, ..., h_m; \ g_1, ..., g_m$ а также $s_1, ..., s_m > 0$. Такие что:

$$\forall x \in \mathbb{R}^m \quad V(x) = \sum_{i=1}^{m} s_i \langle x, g_i \rangle h_i$$

$$|\det V| = s_1 \cdot ... \cdot s_m$$

Доказательство:

Если нужно освежить воспоминания, то лекция 5 в третьем блоке s2 (линала). lecture_5_Hermitian_operators.pdf

$W := V^* V$ — симметричная матрица (самосопряженный оператор)

Тогда такой оператор имеет собственные числа $c_i > 0$ (по одной из предыдущих лемм), а также ортонормированный базис из собственных векторов g_i

Пусть $s_i := \sqrt{c_i}, h_i := \dfrac{1}{s_i} V g_i$

$$\langle h_i, h_j \rangle = \frac{1}{s_i s_j} \langle V g_i, V g_j \rangle = \frac{1}{s_i s_j} \langle V^T V g_i, g_j \rangle = \frac{c_i}{s_i s_j} \langle g_i, g_j \rangle = \begin{bmatrix} 0, i \ne j \\ 1, i = j \end{bmatrix}$$

Тогда

$$Vx = V\left(\sum \langle x, g_i \rangle g_i\right) = \sum \langle x, g_i \rangle V g_i = \sum s_i \langle x, g_i \rangle h_i$$

$$(\det V)^2 = \det V^T V = c_1 ... c_m = (s_1 ... s_m)^2$$

14.6. Теорема о преобразовании меры Лебега при линейном отображении

$V \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$

Тогда

$$\forall E \in \mathcal{M}^m \quad V(E) \in \mathcal{M}^m \ \text{ и } \ \lambda(V(E)) = |\det V| \cdot \lambda E$$

Доказательство:

Рассмотрим два случая:

1. $\det V = 0 \Rightarrow \dim(\operatorname{Im} V) \le m - 1$. А тогда $\lambda(Im\,V) = 0 \Rightarrow \lambda(VE) = 0$. Получили, что хотели
2. $\det V \ne 0$ Пусть $\mu E := \lambda V(E)$ — мера инвариантная относительно сдвигов $\Rightarrow \exists k : \mu = k\lambda$

   Найдем k. $\sqsupset E :=$ единичный куб на векторах g_i. $V(g_i) = s_i h_i$ (по предыдущей лемме), тогда $V(E)$ — параллепипед, порожденный векторами $s_i h_i$. Посчитаем:

   $$\mu E = \lambda V(E) = (s_1 ... s_m) \quad \lambda E = 1$$

   Получили, что $k = |\det V|$

15. Измеримые функции

15.1. Разбиение, допустимое для ступенчатой функции

$E = \bigsqcup\limits_{\text{кон.}} e_k$ — множества e_k образуют разбиение E

$f : X \to \mathbb{R}$ — называется **ступенчатой**, если:

$$\exists e_i : X = \bigsqcup_{\text{кон.}} e_i : \ \forall i \ f\big|_{e_i} = \text{const}$$

При этом такое разбиение называется **допустимым**.

Пример: Характеристическая функция $\chi_{e_k} = \begin{cases} 1, & x \in e_k \\ 0, & x \notin e_k \end{cases}$

Свойства:

1. Если f, g — ступенчатые функции, то $\exists$ разбиение, допустимое для обоих

   Для доказательства попарно пересечем все отрезки их разбиений и получим нужное разбиение
2. f, g — ступенчатые

   $\alpha \in \mathbb{R}$

   Тогда:

$$f + g, \ fg, \ \max(f, g), \ \min(f, g), \ |f|, \ \alpha f \text{ — ступенчатые}$$

15.2. Измеримая функция

Лебеговские множества

$f : E \subset X \to \overline{\mathbb{R}}$

$a \in \mathbb{R}$

Любое из следующих 4 множеств называется Лебеговым множеством f:

1. $E(f < a) = \{x \in E, \ f(x) < a\}$
2. $E(f \le a) = \{x \in E, \ f(x) \le a\}$
3. $E(f \ge a) = \{x \in E, \ f(x) \ge a\}$
4. $E(f > a) = \{x \in E, \ f(x) > a\}$

Замечания:

- $E(f > a) = (E(f \le a))^c$
- $E(f \le a) = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} E\left(f < a + \frac{1}{n}\right)$

Измеримые функции

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой

$f : E \subset X \to \overline{\mathbb{R}}$

$E \in \mathcal{A}$

Тогда f — измерима на E, если

$$\forall a \in \mathbb{R} : \ E(f < a) \in \mathcal{A}$$

(аналогично для еще 3х случаев)

Свойства:

1. f — измерима $\Rightarrow \forall a \in \mathbb{R} : \ E(f = a) = E(f \ge a) \cap E(f \le a)$ — измеримо (но не наоборот)
2. f — измерима $\Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R} : \ \alpha f$ — измерима
3. f — измерима на $E_k \Rightarrow f$ — измерима на $E = \bigcup E_k$
4. f — измерима на $E \Rightarrow \forall \underset{\text{измеримо}}{E'} \subset E : \ f$ — измерима на E'
5. $f \ne 0$ — измерима $\Rightarrow \frac{1}{f}$ — измерима
6. $f \ge 0, \ \alpha > 0$ — измерима $\Rightarrow f^\alpha$ — измерима

15.3. Теорема об измеримости пределов и супремумов

f_n — измеримые функции на X

Тогда:

1. $\sup f_n, \ \inf f_n$ — измеримы
2. $\overline{\lim} f_n, \ \underline{\lim} f_n$ — измеримы
3. Если $\forall x \quad \exists \lim\limits_{n \to +\infty} (f_n(x)) = f(x)$, то f — измерима

Доказательство:

1. $\sphericalangle \ g(x) := \sup f_n(x)$

   Докажем, что

$$X(g > a) = \bigcup_n X(f_n > a)$$

   Если это верно, то справа стоит счетное объединение измеримых множеств $\Rightarrow$ оно измеримо

   Проверим включения в обе стороны:

   - $X(g > a) \subset \bigcup\limits_n X(f_n > a)$:

     Рассмотрим какой-нибудь $x \in X(g > a)$

     По определению множества $X(g > a) : \ g(x) > a \Rightarrow \sup f_n(x) = g(x) > a$

     Тогда по техническому описанию $\sup : \ \exists n : f_n(x) > a$

     Значит x лежит в правой части тоже
   - $X(g > a) \supset \bigcup\limits_n X(f_n > a)$:

     Рассмотрим какой-нибудь $x \in \bigcup\limits_n X(f_n > a)$

     Это значит, что $\exists n : \ x \in X(f_n > a)$

     По определению этого множества $f_n(x) > a \Rightarrow g(x) = \sup f_n(x) > a$
2. Распишем верхни предел по определению (для нижнего все будет аналогчино)

   $\sphericalangle \ s_n := \sup(f_n(x), f_{n+1}(x), ...)$

   Заметим, что по предыдущему пункту s_n — измерим (т.к. она sup измеримых)

   $\overline{\lim} f_n(x) = \inf\limits_n (s_n)$

   Аналогично $\overline{\lim} f_n(x)$ — измерима, т.к. s_n измеримы
3. Очевидно: так как если $\exists \lim \Rightarrow \overline{\lim} = \lim = \underline{\lim}$

15.4. Характеризация измеримых функций с помощью ступенчатых. Следствия

$f : X \to \overline{\mathbb{R}}$

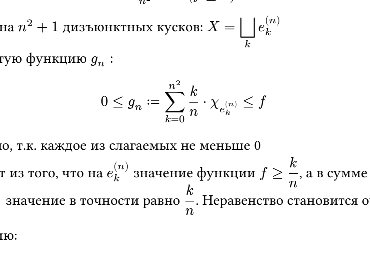
$f \ge 0$

f — измеримо

Тогда $\exists f_n$ — ступенчатые функции:

1. $\forall x \ \forall n : \ 0 \le f_n \le f_{n+1} \le f$
2. $\forall x : \ \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$

Доказательство:



Выберем $n \in \mathbb{N}$ и нарежем ось "y" сначала на n отрезков длины 1, а потом каждый из них на отрезки длины $\frac{1}{n}$

И введем следующие обозначениея:

$$e_k^{(n)} := X\left(\frac{k}{n} \le f < \frac{k+1}{n}\right), \ k = 0, 1, ..., n^2 - 1$$

$$e_{n^2}^{(n)} = X(f \ge n)$$

Заметим, что X разбилось на $n^2 + 1$ дизъюнктных кусков: $X = \bigsqcup\limits_k e_k^{(n)}$

Построим теперь ступенчатую функцию g_n :

$$0 \le g_n := \sum_{k=0}^{n^2} \frac{k}{n} \cdot \chi_{e_k^{(n)}} \le f$$

Левое неравенство очевидно, т.к. каждое из слагаемых не меньше 0

Правое неравенство следует из того, что на $e_k^{(n)}$ значение функции $f \ge \frac{k}{n}$, а в сумме мы рассматриваем функцию, у которой на $e_k^{(n)}$ значение в точности равно $\frac{k}{n}$. Неравенство становится очевидным

Найдем предельную функию:

$$\lim_{n \to \infty} g_n(x) = f(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{если } f(x) = +\infty, \left(\text{т.к. } \forall n : \ x \in e_{n^2}^{(n)} \Rightarrow g_n(x) = n\right) \\ f(x), & \text{если } f(x) < +\infty, \left(\text{т.к. НСНМ } n > f(x) \ x \in e_k^{(n)} \overset{(\star)}{\Rightarrow} |f(x) - g_n(x)| < \frac{1}{n}\right) \end{cases}$$

$(\star)$: Т.к. $n > f(x)$, то $k < n^2$, а по определению $e_k^{(n)}$ значения на этом множестве g_n отличаются от f не более, чем на $\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} = \frac{1}{n}$

Теперь определим f_n так, чтобы они были монотонными:

$$f_n(x) := \max(g_1, g_2, ..., g_n)$$

Очевдино, что:

1. f — ступенчатая (по свойству ступенчатых)
2. $g_n \le f_n \le f \Rightarrow f_n \to f$ по 2 милиционерам

Следствие 1:

$f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измеримая

Тогда $\exists f_n$ — ступенчатые

1. $\forall x \ \forall n : \ |f_n| \le |f|$
2. $\forall x : \ \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$

Доказательство:

Очевидно, что f^+, f^- — измеримы, и при этом $f^+, f^- \ge 0$

Тогда по теореме:

1. $\exists h_n - \text{ступ.} : \quad h_n \uparrow, \ \ 0 \le h_n \le f^+, \quad \lim h_n = f^+$
2. $\exists g_n - \text{ступ.} : \quad g_n \uparrow, \ \ 0 \le g_n \le f^-, \quad \lim g_n = f^-$

По свойсту ступенчатых функций $h_n - g_n$ — тоже ступенчатая

И при этом $h_n - g_n \to f^+ - f^- = f$

Тогда $\sphericalangle \ f_n := h_n - g_n$ и докажем что они подходят

Второе условие выполнено за счет предпоследней строчки

Докажем первое условие:

По определеиню срезок:

$$\forall x : \ f^+(x) = 0 \text{ или } f^-(x) = 0$$

Поэтому

$$\forall x \ \forall n : \ |f_n| = |h_n(x) - g_n(x)| = h_n(x) \text{ или } g_n(x)$$

И при этом

$$h_n(x) \le f^+(x) \le |f| \ \text{ и } \ g_n(x) \le f^-(x) \le |f|$$

Получается, что $|f_n| < |f|$ — ровно то, что надо

Следствие 2:

f, g — измеримы

Тогда fg — тоже измеримо

Замечание: (будем считать, что $0 \cdot \pm\infty = 0$)

Доказательство:

$\sphericalangle \ f_n \to f, \ g_n \to g$ — ступенчатые из нашей теоремы

При этом $f_n, \ g_n$ — конечные (т.к. сутпенчатые)

Тогда по свойству поточечной сходимости:

$$f_n g_n \to fg$$

Объяснение про перемножесние $0 \cdot \pm\infty$:

Предположим, что $\forall n : \ f_n(x) = 0$

Тогда $f_n g_n$ в этой точке тоже равна 0 для любого n, а значит и $fg(x) = 0$

При этом даже если $g_n(x) \underset{n \to +\infty}{\to} +\infty$, т.е. $g(x) = +\infty$, то как мы видим $\underbrace{f(x)}_{0} \cdot \underbrace{g(x)}_{+\infty} = 0$

Следствие 3:

f, g — измеримы

Считаем, что $\nexists x \ f(x) = \pm\infty, \ g(x) = \mp\infty$

Тогда $f + g$ — измеримо

Доказательство:

$\exists f_n, \ g_n$ — ступенчатые из нашей теоремы

Тогда по свойству поточечной сходимости:

$$f_n + g_n \to f + g$$

15.5. Измеримость функции непрерывной на множестве полной меры

Множество полной меры

E — множество полной меры в $X \Rightarrow \mu(X \setminus E) = 0$

Теорема:

$f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

$e \subset E$

$\lambda e = 0$

f — непрерывна на $E' = E \setminus e$

Тогда f — измерима на E

Доказательство:

$E'(f < a)$ — открыто в E' по топологическому определению (непрерывный прообраз открытого)

Измеримости на E множества $E'(f < a)$ можно показать следующим образом:

$$E'(f < a) \overset{(\star)}{=} \underset{\text{откр}}{G} \cap E' = \underset{\text{откр}}{G} \cap \underbrace{(E \setminus e)}_{\text{изм.}} \Rightarrow E'(f < a) \text{ — изм.}$$

$(\star)$: по теореме об открытых подпростанствах

$E(f < a) = \underbrace{E'(f < a)}_{\text{изм.}} \cup \underbrace{e(f < a)}_{\subset e \Rightarrow \text{ изм.в силу полноты}}$ — объединение измеримых множеств измеримо.

Загадка. $f|_{E'}$ — непрерывна. $\lambda(E \setminus E') = 0$. Верно ли, что мера мн-ва точек разрыва f равна 0? (Нэт, не верно :))

15.6. Свойство, выполняющееся почти везде

$(X, \mathcal{A}, \mu), \ E \in \mathcal{A}$

$w(x)$ — высказывание, зависящее от x

$w(x)$ выполняется (истинно) почти везде, если

$$\mu e = 0, \ \text{где } e = \{x \in E \mid \ w(x) \text{ — ложно}\}$$

Свойства:

Пусть $\forall n$ задано высказывание $\omega_n(x)$ и оно выполняющееся почти везде.

Тогда мегаутверждение $w(x) := w_1(x) \wedge w_2(x) \wedge ...$ — выполняющееся почти везде.

15.7. Сходимость почти везде

$f, f_n : E \to \overline{\mathbb{R}}$

$f_n \to f$ почти везде, если:

$$\mu\{x \in E \mid \ f_n(x) \nrightarrow f(x)\} = 0$$

Свойства:

1. $f_n, f : X \to \overline{\mathbb{R}}, \ \mu$ — полная, $f_n \to f$ почти везде на X и $\forall n \ f_n$ — измеримая, тогда f — измерима
2. μ — полная мера, f — измерима, g — еще одна функция и $f = g$ почти везде, тогда g — измерима

15.8. Сходимость по мере

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой

$f_n, f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измеримы, почти везде конечны

$f_n \to f$ по мере μ (при $n \to +\infty$)

$$f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f : \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \mu X(|f_n - f| \ge \varepsilon) \to 0$$

15.9. Теорема Лебега о сходимости почти везде и сходимости по мере

$f_n, f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измеримы, почти всюду конечны

$f_n \to f$ — почти всюду

$\mu X < +\infty$

Тогда:

$$f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f$$

Доказательство:

Подменим f_n, f — на множествах меры 0, так чтобы $f_n \to f$ всюду и f, f_n — конечны

- Рассмотрим частный случай:

  $f_n \to 0 \quad \forall x$ последовательность $f_n(x)$ — монотонна по n, и тогда $f \equiv 0$:

$$X(|f_n - f| \ge \varepsilon) = X(|f_n| \ge \varepsilon) \supset X\big(|f_{n+1}| \ge \varepsilon\big) \supset ...$$

$$\bigcap_n X(|f_n| \ge \varepsilon) = \varnothing \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\mu X(|f_n| \ge \varepsilon) \to 0}_{\text{по непрерывности сверху}}$$

- Общий случай:

  $f_n \to f$

  $\varphi_n(x) := \sup\limits_{k \ge n} |f_k(x) - f(x)|$

  Заметим, что: $\forall x : \ \varphi_n(x) \to 0$, причем $\varphi_n \ge 0$ и монотонна, тогда по частному случаю:

$$X(|f_n - f| \ge \varepsilon) \subset X(\varphi_n \ge \varepsilon)$$

$$\mu X(|f_n - f| \ge \varepsilon) \le \mu X(\varphi_n \ge \varepsilon) \to 0$$

15.10. Теорема Рисса о сходимости по мере и сходимости почти везде

$(X, \mathcal{A}, \mu)$

$f_n, f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измеримы, почти всюду конечны

$f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f$

Тогда

$$\exists (n_k) \ f_{n_k} \to f \text{ почти всюду}$$

Доказательство:

По определению сходимости по мере:

$$\forall k : \ \mu X\left(|f_n - f| \ge \frac{1}{k}\right) \to 0$$

Тогда по определению предела возьмем $\varepsilon := \frac{1}{2^k}$ для натуральных k:

$$\exists (n_k) : \ \forall n \ge n_k : \ \mu X\left(|f_n - f \ | \ge \frac{1}{k}\right) < \frac{1}{2^k}$$

Можно считать, что $n_1 < n_2 < ...$

Проверим, что $f_{n_k} \to f$ почти всюду:

Введем следующию систему множеств:

$$E_k := \bigcup_{j=k}^{+\infty} X\left(|f_{n_j} - f| \ge \frac{1}{j}\right), \quad E_0 = \bigcap E_k$$

$$E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset ...$$

Найдем

$$\mu E_k \le \sum_{j=k}^{+\infty} \mu X\left(|f_{n_j} - f| \ge \frac{1}{j}\right) < \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{2}{2^k}$$

Мы получили, что: $\mu E_k \to 0$

А также по непрерывности сверху: $\mu E_k \to \mu E_0$

Получили, что $\mu E_0 = 0$

Осталось показать, что при $x \notin E_0 : \ f_{n_k} \to f$:

$$x \notin E_0 \Rightarrow \exists N \ x \notin E_N$$

Т.к. E_N — бесконечное объединение, то то что элемент в нем не лежит, означает, что он не лежит в каждом из объединяемых элементов:

$$x \notin \bigcup_{j=N}^{+\infty} X\left(|f_{n_j} - f| \ge \frac{1}{j}\right)$$

$$\forall j \ge N : \ \left|f_{n_j}(x) - f(x)\right| < \frac{1}{j}$$

Ну а это и есть определение равномерной сходимости:

$$f_{n_j}(x) \xrightarrow[j \to +\infty]{} f(x)$$

15.11. Теорема Егорова о сходимости почти везде и почти равномерной сходимости

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой

$\mu X < +\infty$

f_n, f — почти везде конечны, измеримы

$f_n \to f$ — почти везде

Тогда:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists e \subset X : \ \mu e < \varepsilon : \ f_n \underset{X \setminus e}{\rightrightarrows} f$$

16. Интеграл

16.0.1. Нотация

1. $\int_E f \, d\mu$

   E — множество на котором интегрируем

   $d\mu$ — закрывающая скобка, где μ — мера. Потом еще будем писать $d\mu(x)$ - указывая тем самым по какой переменной будем интегрировать.

16.1. Интеграл ступенчатой функции

Если $f := \sum_{\text{кон.}} \alpha_k \chi_{E_k}$

$f \geq 0$

$\bigsqcup_{\text{кон.}} E_k = X$ — допустимое разбиение, E_k — измеримы

Тогда:

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{\text{кон.}} \alpha_k \mu(E_k)$$

И пусть $0 \cdot \infty = 0$

Свойства:

1. Не зависит от представления f
2. Монотоннен: $f \leq g \Rightarrow \int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu$

16.2. Интеграл неотрицательной измеримой функции

Если f — измеримая, $f \geq 0$

Тогда

$$\int_X f \, d\mu = \sup\left\{ \int_X g \, d\mu \;\middle|\; 0 \leq g \leq f, g \text{ — ступенчатая} \right\}$$

Свойства:

1. $f \geq 0 \quad 0 \leq \int f \leq +\infty$
2. $g \leq f,\ g$ — ступ. $\quad \Rightarrow \quad \int g \leq \int f$

16.3. Суммируемая функция

f — суммируемая функция, если $\int_X f^+, \int_X f^-$ — конечны (положительная и отрицательная срезка)

16.4. Интеграл суммируемой функции

f — измерима на X, и оказалось, что $\int_X f^+$ или $\int_X f^-$ — конечен. Тогда:

$$\int_X f \, d\mu := \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu$$

Суммируемая фунция — частный случай этого определения

16.5. Интеграл по подмножеству

В билетах этого нет, но зачем-то же он дал это

$E \subset X$

E — измеримо

f — измерима на X

$$\int_E f \, d\mu = \int_X f \cdot \chi_E \, d\mu$$

16.6. Простейшие свойства интеграла Лебега

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой

$E \subset X$ — измеримо

f, g — измеримы

Тогда:

1. Монотонность

   $$f \leq g : \int_E f \leq \int_E g$$

   1. Если $f, g \geq 0$. Тогда это следует из определения

      (Каждая ступенчатая функция для f подходит и для g)

   2. Тогда при произвольных $f, g \quad f^- \geq g^-, f^+ \leq g^+$. И тогда по первому пункту очевидно

2. Частные случаи:

   $$\int_X 1 \, d\mu = \mu(X), \int_X 0 \, d\mu = 0$$

3. Интеграл на нулевой мере. Если $\mu(e) = 0 \Rightarrow \int_e f \, d\mu = 0$
   1. f — ступенчатая, тогда тривиально
   2. f — измеримо, $f \geq 0 \Rightarrow \sup 0 = 0$
   3. $\int f^-, \quad \int f^+ = 0 \Rightarrow \int f = 0$

4. Домножение на число.

   $$\int (-f) = -\int f, \quad \int \alpha f = \alpha \int f,\ \alpha \in \mathbb{R}$$

   1. $(-f)^+ = f^-,\ (-f)^- = f^+$
   2. НУОР, $c > 0 \Rightarrow$ для $f \geq 0$ очевидно (ступенчатая растягивается, из супремума выносится)
   3. Для $c = 0$ очевидно (интеграл 0 равен 0)

5. Если сущ. $\int_E f$, то $\left|\int_E f\right| \leq \int_E |f|$

   $-|f| \leq f \leq |f|$ и далее по первому свойству.

6. $\mu E < +\infty$

   $$a \leq f \leq b \ \Rightarrow\ a\mu E \leq \int_E f \leq b\mu E$$

   Следствие: f — измеримо и ограничено на $E, \mu E < +\infty \Rightarrow f$ — суммируемо на E

7. f — суммируемая на $E \Rightarrow f$ конечная почти всюду

   Из определения суммируемой функции:

   f — суммируемая на $E \Leftrightarrow \int_E |f| < +\infty$

   Пойдем от противного: пусть $A = \{x : |f(x)| = +\infty\},\ \mu(A) > 0$

   Тогда $\forall x \in A\ \forall n :\ |f(x)| > n$

   $\forall x \in E\ \forall n :\ |f(x)| \geq n \cdot \chi_A$

   Тогда по 1 свойству (монотонности):

   $$\int_E |f| \geq \int_E n \cdot \chi_A = n \cdot \mu(A)$$

   Делаем предельный переход при $n \to +\infty$

   Слева стоит конечное число, т.к. f — суммируема

   Справа стоит бесконечность, т.к. $\mu A = \text{const} > 0$ Противоречие

16.7. Счетная аддитивность интеграла (по множеству)

Лемма:

$A = \bigsqcup A_k$ — измеримо

$g \geq 0$ — ступенчатая

Тогда:

$$\int_A g \, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} g \, d\mu$$

Доказательство:

Т.к. g — ступенчата, предствим ее в виде $g = \sum_{\text{кон}} \lambda_i \chi_{E_i}$, где E_i — допустимое разбиение

Тогда найдем интеграл:

$$\int_A g = \sum_{i,\ \text{кон.}} \lambda_i \mu(E_i \cap A) = \sum_{i,\ \text{кон.}} \lambda_i \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(E_i \cap A_k) = \sum_i \sum_k \lambda_i \mu(E_i \cap A_k) \overset{(\star)}{=} \sum_k \sum_i \lambda_i \mu(E_i \cap A_k) = \sum_k \int_{A_k} g \, d\mu$$

$(\star)$: в прошлом семестре обсуждалось, что в рядах можно переставлять слагаемые, если все слогаемые неотрицательные, а у нас именно такие

Теорема:

$A = \bigsqcup A_k$ — измеримо

$f \geq 0 : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измерима на A

Тогда:

$$\int_A f \, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f \, d\mu$$

Доказательство:

Давайте докажем два неравенства $(\leq), (\geq)$.

$(\leq)$:

$\sphericalangle$ ступенчатую функцию g: $0 \leq g \leq f$:

$$\int_A g = \sum \int_{A_i} g \leq \sum \int_{A_i} f$$

По определению интеграла для измеримой функции:

$$\int_A f = \sup_g \int_A g \leq \sum \int_{A_i} f$$

$(\geq)$:

1. $\sqsupset A = A_1 \sqcup A_2$

   Возьмем ступенчатые функции g_1, g_2 с общим разбиением E_k :

   $$0 \leq g_1 \leq f \cdot \chi_{A_1} \quad 0 \leq g_2 \leq f \cdot \chi_{A_2}$$

   Т.е. функция g_1 тождественный 0 вне A_1, а на $A_1 :\ g_1 \leq f$. Аналогично для g_2

   Найдем их явное представление:

   $$g_1 = \sum \lambda_i' \chi_{E_i} \quad g_2 = \sum \lambda_i'' \chi_{E_i}$$

   Тогда очевидно, что когда мы их сложим, они будут меньше f на всем A (т.к. A_1, A_2 — дизъ. то ровно одна из g_1, g_2 на ней $\neq 0$, а каждая из них по отдельности меньше f)

   $$0 \leq g_1 + g_2 \leq f \cdot \chi_A$$

   Проинтегрируем все это дело:

   $$\int_{A_1} g_1 + \int_{A_2} g_2 \overset{(\star)}{=} \int_A (g_1 + g_2) \leq \int_A f$$

   $(\star)$: равенство станет очевидным, если написать интеграл по определению

   Теперь перейдем к $\sup$ по g_1 :

   $$\int_{A_1} f + \int_{A_2} g_2 \leq \int_A f$$

   И перейдем к $\sup$ по g_2 :

   $$\int_{A_1} f + \int_{A_2} f \leq \int_A f$$

2. $\sqsupset A = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i$ — доказывается индукцией по 1-му пункту

3. $A = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} A_i = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \ldots \sqcup A_n \sqcup B_n$, где $B_n = \bigsqcup_{i=n+1}^{+\infty} A_i$

   $$\int_A f = \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} f + \int_{B_n} f \geq \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} f$$

   Делаем предельный переход при $n \to +\infty$ и получаем нужное нам неравенство

Следствие 1:

$f \geq 0$ — измеримая

Зададим $\nu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$

Тогда:

$$\nu E := \int_E f \, d\mu \text{ — мера}$$

Доказательство:

Мы просто хотим доказать, что эта функция счетно-аддитивна, а мы только что доказали это в основной теореме.

Следствие 2:

f — суммируемая на $A = \bigsqcup A_i$ — измеримо

Тогда:

$$\int_A f = \sum \int_{A_i} f$$

Доказательство:

Рассмотрим срезки и все получится

16.8. Теорема Леви

$(X, \mathcal{A}, \mu)$

f_n — измеримо (на X)

$\forall n \quad 0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ почти везде

$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ — почти везде определена

Тогда:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$$

Доказательство:

f — измеримо по т. об измеримости $\sup, \lim$.

$(\leq)$:

$$f_n \leq f \Rightarrow \int_X f_n \leq \int_X f \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \leq \int_X f$$

$(\geq)$:

Заметим, что нам достаточно доказать, что

$$\forall \text{ ступ. } 0 \leq g \leq f : \quad \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \geq \int_X g$$

Этого нам хватит, т.к. мы сделаем справа переход к $\sup$ по g и получим наше неравенсвто

И еще трюк: нам достаточно проверить, что

$$\forall c \in (0,1) \quad \lim \int_X f_n \geq c \cdot \int_X g$$

Чтобы, проверив это свойство, понять то что мы хотим доказать, то надо просто перейти к $\sup$ по c

Теперь начнем это доказывать:

$$E_n = X(f_n \geq cg) \quad \bigcup E_n = X,$$

Сделаем оговорку, что на множествах меры 0, мы подменим наши функции на нулевые (уже так делали). Интеграл и предел это не почувствует, а значит мы не ничего не сломаем, но при этом получим такое сильное условие.

$$\ldots \subset E_n \subset E_{n+1} \subset \ldots$$

$$\int_X f_n \geq \int_{E_n} f_n \geq c \cdot \int_{E_n} g,$$

перейдем к пределу (так как интегралы возрастают):

$$\lim \int_X f_n \geq \underbrace{\lim c \int_{E_n} g = c \cdot \int_X g}_{\substack{\text{непрерывность снизу} \\ \nu : E \mapsto \int_E g}}$$

16.9. Линейность интеграла Лебега

$f, g \geq 0$ — измеримы на E

Тогда:

$$\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$$

Доказательство:

1. f, g — ступенчатые, то есть $f = \sum \alpha_k \chi_{E_k},\ g = \sum \beta_k \chi_{E_k}$, где E_k — общее допустимое разбиение

   $$\int_E f + g = \sum (\alpha_k + \beta_k) \mu(E_k \cap E) = \sum \alpha_k \mu(E_k \cap E) + \sum \beta_k \mu(E_k \cap E) = \int_E f + \int_E g$$

2. f, g — измеримы

   $\exists$ ступ. $f_n : 0 \leq f_n \leq f_{n+1} \quad f_n \to f$

   $\exists$ ступ. $g_n : 0 \leq g_n \leq g_{n+1} \quad g_n \to g$

   $$\int_E f + g \xleftarrow[n\to+\infty]{\text{т. Леви}} \int_E f_n + g_n \xlongequal[\text{1й пункт}]{} \int_E f_n + \int_E g_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{т. Леви}} \int_E f + \int_E g$$

Следствие:

f, g — суммируемые на E

Тогда:

$$f + g \text{ — суммируемо}$$

$$\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$$

Доказательство:

$|f + g| \leq |f| + |g| \Rightarrow f + g$ — суммируемо.

$h = f + g$. Тогда:

$$h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$$

$$h^+ + f^- + g^- = f^+ + g^+ + h^-$$

$$\int_E h^+ + \int_E f^- + \int_E g^- = \int_E f^+ + \int_E g^+ + \int_E h^-$$

$$\int_E h^+ - \int_E h^- = \int_E f^+ - \int_E f^- + \int_E g^+ - \int_E g^-$$

$$\int_E h = \int_E f + \int_E g$$

16.10. Теорема об интегрировании положительных рядов. Пример

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой

$u_n \geq 0 : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измеримо на E

Тогда:

$$\int_E \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E u_n(x) \, d\mu(x)$$

Доказательство:

$S_n(x) = u_1(x) + \ldots + u_n(x)$ — эта последовательность монотонна неубывающая, сделаем предельный переход:

$$S_n \to S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

тогда, по теореме Леви:

$$\int_E S_n \to \int_E S$$

Распишем левую часть по линейности:

$$\int_E S_n = \sum_{k=1}^{n} \int_E u_k$$

Ну а тогда:

$$\int_E S \leftarrow \int_E S_n = \sum_{k=1}^{n} \int_E u_k \to \sum_{n=1}^{\infty} \int_E u_n$$

$$\int_E \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E u_n$$

Следствие:

$u_n(x)$ — измерима

$\sum_{n=1}^{\infty} \int_E |u_n(x)| < +\infty$

Тогда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ — абс. сходящийся ряд почти везде}$$

Доказательство:

$S(x) = \sum |u_n(x)|$

По предыдущей теореме:

$$\int_E S(x) = \sum \int_E |u_n(x)| < +\infty$$

Тогда S — суммируемо $\Rightarrow$ почти везде конечно

Пример:

(x_n) — вещественная последовательность

$\sum a_n$ — абс. сходящийся числовой ряд

Тогда:

$$\sum \frac{a_n}{\sqrt{|x - x_n|}} \text{ абс. сходится при п.в. } x \in \mathbb{R}$$

Доказательство:

Нам достаточно доказать эту сходимость п.в. на $\forall A : [-A, A]$

По следствию:

$$\int_{[-A,A]} \frac{|a_n|}{\sqrt{|x - x_n|}} \, d\lambda_m \xlongequal[\text{будет док. позже}]{\text{этот переход}} |a_n| \int_{-A}^{A} \frac{dx}{\sqrt{|x - x_n|}} \overset{(\star)}{\leq}$$

$$\overset{(\star)}{\leq} |a_n| \int_{-A-x_n}^{A-x_n} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} \overset{(\star\star)}{\leq} |a_n| \int_{-A}^{A} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = 2 \cdot |a_n| \int_0^A \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = 4\sqrt{A}|a_n|$$

$(\star)$: Замена переменной $x \mapsto x - x_n$

$(\star\star)$: Это становится очевидно, если построить график

Так как $|a_n|$ — сходится, то по следствию предыдущей теоремы, исходный ряд абсолютно сходится.

16.11. Абсолютная непрерывность интеграла

f — суммируемая (на X)

Тогда:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall E \text{ — изм.: } \ \mu E < \delta : \quad \left| \int_E f \, d\mu \right| < \varepsilon$$

Доказательство:

Построим семейство множеств, где $|f|$ принимает большие значения:

$$X_n = X(|f| \geq n) \Rightarrow \ldots \supset X_n \supset X_{n+1} \supset \ldots$$

Также, т.к. f — суммируема, то она почти везде конечна, т.е.:

$$\mu\Big(\bigcap X_n\Big) = 0$$

Для конечной меры $A \mapsto \int_A |f|$ работает непрерывность сверху

Поэтому распишем что предел равен 0 по определению:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \ \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Пусть $\delta := \frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon}$. Тогда при $\mu E < \delta$:

$$\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f| = \underbrace{\int_{E \cap X_{n_\varepsilon}} |f|}_{< \frac{\varepsilon}{2} \text{ по опр. } n_\varepsilon} + \underbrace{\int_{E \setminus X_{n_\varepsilon}} |f|}_{\substack{\text{тут } |f| < n_\varepsilon \\ \text{поэтому оценим} \\ \text{по 6 св-ву}}} < \frac{\varepsilon}{2} + \mu E \cdot n_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Следствие:

f — суммируемо на X,

$E_n \subset X$ — измеримо

Тогда

$$\mu E_n \to 0 \Rightarrow \int_{E_n} f \to 0$$

16.12. Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости почти везде

$(X, \mathcal{A}, \mu)$

f_n, f — измеримы

$f_n \to f$ — почти везде

И пусть $\exists g$ — суммируема: $\forall n : |f_n| < g$ при п.в. x

Тогда:

$$f \text{ — суммируема и } \int_X |f_n - f| \to 0$$

$$\text{И уж тем более: } \int_X f_n \to \int_X f$$

Доказательство:

f_n — суммируемое, так как сверху поджимается функцией g

А в силу предельного перехода: $|f| \leq g \ \Rightarrow\ f$ — суммируемое

Докажем пунктик *и уж тем более*:

$$\left| \int_X f_n - \int_X f \right| \leq \int_X |f_n - f| \to 0$$

Докажем основное утверждение:

Рассмотрим $\sup$ отклонения “хвоста” f_n от f

$$h_n := \sup(|f_n - f|, |f_{n+1} - f|, \ldots)$$

Причем эта последовательность убывает и $0 \leq h_n \leq 2g$

$$\lim h_n = \overline{\lim} |f_n - f| = 0 \text{ п.в. (т.к. } f_n \to f \text{ п.в.)}$$

Хотим использовать теорему Леви, но нам нужна возрастающая последовательность, тогда возьмем $2g - h_n$:

Функции $2g - h_n$ — возрастают, и при этом $2g - h_n \to 2g$ п.в.

Теорма Леви:

$$\int_X (2g - h_n) \, d\mu \to \int_X 2g \, d\mu \Rightarrow \int_X h_n \, d\mu \to 0$$

$$\int_X |f_n - f| \leq \int_X h_n \, d\mu \to 0$$

16.13. Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости по мере

$(X, \mathcal{A}, \mu)$

f_n, f — измеримы

$f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f$

И пусть $\exists g$ — сумм.: $\forall n \ \ |f_n| < g$ при почти всех x

Тогда:

$$f \text{ — сумм. и } \int_X |f_n - f| \to 0$$

$$\text{И уж тем более: } \int_X f_n \to \int_X f$$

Доказательство:

f_n — суммируемое, так как сверху поджимается функией g, интеграл обеих срезок которой конечен

В силу теоремы Рисса можно выбрать подпоследовательность (n_k), так чтобы $f_{n_k} \to f$ почти везде

Мы знаем, что $\left|f_{n_k}\right| < g$, поэтому сделав предельный переход, получим, что $|f| \leq g$

А значит f — суммируемое

Докажем пунктик *и уж тем более*:

$$\left| \int_X f_n - \int_X f \right| \leq \int_X |f_n - f| \to 0$$

Докажем основное утверждение:

1. $\mu X < +\infty$, зафиксируем ε:

   Введем следующую систему множеств $X_n = X(|f_n - f| \geq \varepsilon)$

   Значит по определению сходимости по мере: $\mu X_n \to 0$

   Разобьем интеграл на 2:

   $$\int_X |f_n - f| \leq \int_{X_n} \ldots + \int_{X_n^c} \ldots \leq \underbrace{\int_{X_n} 2g \, d\mu}_{\substack{\text{при } n\to+\infty \\ < \varepsilon \text{ по абсол. непр. инт.}}} + \int_{X_n^c} \varepsilon < \varepsilon + \varepsilon \cdot \mu X$$

2. $\mu X = +\infty$

   Докажем небольшое вспомогательное свойство:

   $$\forall \varepsilon > 0\ \exists A \subset X \text{ изм. } \ \mu A < +\infty : \ \int_{X \setminus A} g < \varepsilon$$

   Докажем:

   $$\int_X g = \sup\left(\int_X h : h \text{ — ступ.}, 0 \leq h \leq g \right)$$

   $$\exists h_0 : \int_X g - \int_X h_0 < \varepsilon$$

   Возьмем за A — носитель h_0 (т.е. множество точек, в которых $h_0 > 0$) :

   $$A := \{x \mid \ h_0(x) > 0\}$$

   Тогда:

   $$\int_{X \setminus A} g = \int_{X \setminus A} (g - h_0) \leq \int_X g - h_0 < \varepsilon$$

   А еще за счет того, что h_0 — ступечанчатая, т.е. у нее конечный интеграл, а значит множество A имеет конечную меру

   Вернемся к теореме:

   $$\int_X |f_n - f| \, d\mu = \int_A \ldots + \int_{X \setminus A} \ldots \leq \underbrace{\int_A |f_n - f|}_{< \varepsilon \text{ по 1му пункту}} + \underbrace{\int_{X \setminus A} 2g}_{\text{по нашему утверждению}} < 3\varepsilon$$

16.14. Теорема Фату. Следствия

$(X, \mathcal{A}, \mu)$

$f, f_n \geq 0$ — измеримые

$f_n \to f$ почти везде

$\exists c > 0\ \forall n : \quad \int_X f_n \, d\mu < c$

Тогда

$$\int_X f \, d\mu \leq c$$

Здесь подразумевается, что $\int_X f_n \nrightarrow \int_X f$

Доказательство:

$$g_n := \inf(f_n, f_{n+1}, \ldots), \quad g_n \leq g_{n+1} \leq \ldots$$

То есть $0 \leq g_n \leq f_n$, а тогда:

$$\int_X g_n \leq \int_X f_n \leq c$$

А также:

$$\lim g_n = \underline{\lim} f_n = f \text{ п.в.}$$

По теореме Леви:

$$\int_X g_n \to \int_X f \leq c$$

Следствия:

1. $(X, \mathcal{A}, \mu)$

   $f, f_n \geq 0$ — измеримые, почти везде конечны

   $f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f$

   $\exists c > 0\ \forall n : \quad \int_X f_n \, d\mu < c$

   Тогда

   $$\int_X f \, d\mu \leq c$$

   Доказательство:

   Воспользуемся теоремой Рисса, ну и все :)

2. $f_n \geq 0$ — измеримы, тогда

   $$\int_X \underline{\lim} f_n \, d\mu \leq \underline{\lim} \int_X f_n \, d\mu$$

   Доказательство:

   Давайте введем g_n — из доказательства теоремы Фату

   Выберем $(n_k) : \int_X f_{n_k} \to \underline{\lim} \int_X f_n$, при этом

   $$\int_X \underline{\lim} f_n \xleftarrow{\text{т. Леви}} \int_X g_{n_k} \leq \int_X f_{n_k} \xrightarrow{\text{из усл. выше}} \underline{\lim} \int_X f_n$$