Конспект по Математическому Анализу.

Чепелин В.А.

Содержание

1 Введение в анализ.

1.1 Основные определения.

Множество — неопределяемое понятие. Множества состоят из элементов. А - какое-то множество. Мы умеем понимать:

$x \in A$ или $x \notin A$

Способы задания:

1. А = {1,2,3,4,5}
2. Если есть какое-то известное множество А, то множество В можно задать таким образом: $B := \{x \in A : P(x) = 1\}$, где P(x) - булевая функция.

$X \subset Y$ — мн-во X содержится в Y или по-другому: $\forall x \in X : x \in Y$

$\varnothing$ — пустое мн-во — мн-во, не содержащее элементов.

$\mho$ - **универсум** или максимально множество в заданном контексте.

$\forall$ множества X: $\varnothing \subset X \subset \mho$

Мы можем спокойно работать с множеством натуральных, целых, рациональных, вещественных, иногда комплексных.

Операции на множествах:

$\cap$ — пересечение. (элемент в обоих множестках).

$\cup$ — объединение. (элемент только в одном множестве).

$X \backslash Y = \{x \in X : x \notin Y\}$.

$X^c = \{x \in U : x \notin X\} = U \backslash X$, где U - универсум.

Теорема. Законы Де Моргана $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ - семейство мн-в, Y - мн-во. Тогда выполнено:

1. $Y \backslash (\bigcup\limits_{\alpha \in A} X_\alpha) = \bigcap\limits_{\alpha \in A} (Y \backslash X_\alpha)$
2. $Y \backslash (\bigcap\limits_{\alpha \in A} X_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha \in A} (Y \backslash X_\alpha)$
3. $Y \cap (\bigcup\limits_{\alpha \in A} X_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha \in A} (Y \cap X_\alpha)$
4. $Y \cup (\bigcap\limits_{\alpha \in A} X_\alpha) = \bigcap\limits_{\alpha \in A} (Y \cup X_\alpha)$

Здравый смысл устает от доказательств этих формул, так что их не будет :(

Отображение:

(f, X, Y) f — отображение, X —- откуда, Y —- куда.

$f : X \to Y$ — f переводит мн-во X в Y. На языке кванторов: $\forall x \in X : f(x) \in Y$.

X — область определений(ия). Y — область значений.

Итак, чтобы задать отображение f множества A в множество B, надо каждому элементу a из A поставить в соответствие один и только один элемент b из B. Если при этом элементу a из A сопоставлен элемент b из B, то b называют образом элемента B, а a - прообразом элемента y при отображении f, что записывается в виде $f(a) = b$. Образ мн-ва обозначается $Im(A)$. Прообраз мн-ва обозначается f^{-1}.

Из определения отображения f следует, что у каждого элемента a из A образ единственный, однако для элемента b из B прообразов может быть много, а может и вообще не быть. Множество всех прообразов элемента b из B называется его полным прообразом и обозначается через $f^{-1}(y)$. Таким образом:

$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$

Инъекция. Если $x \neq y$, то $f(x) \neq f(y)$

Сюръекция. $\forall y \in B : \exists x : f(x) = y$

Биекция = Инъекция + Сюръекция = Взаимнооднозначное соотвествие

При этом очень важно на каком множестве действует отображение. Допустим $f(x) = x^2$ дает такую таблтику при разных множествах, на которых происходит отображение:

x	f(X)	инъекция	сюръекция	биекция
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	-	-	-
$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+$	+	+	+
$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}$	+	-	-
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+$	-	+	-

Последовательность $(x_1, x_2, x_3 ...)$ — отображение, такое, что $a : N \to X$. Другими словами пронумерованный набор каких-либо объектов, среди которых допускаются повторения, причём порядок объектов имеет значение. Нумерация чаще всего происходит натуральными числами.

Двусторонняя последовательность $(...x_{-1}, x_0, x_1...)$, она уже переводит целые числа в элементы множества. Склеить 2 последовательности.

Семейство — некоторая совокупность объектов, каждый из которых ассоциирован с индексом из некоторого индексного множества. Причем индексом может быть так и целое число, так и дробное, так и котик. Есть множество индексов A и мн-во элементов X. И каждому индексу A мы присваиваем какой-то(можно брать тот, что уже взят) элемент множества X

(x_1,x_2) — упорядоченная пара элементов

Декартово произведение X и Y — обозначается $X \times Y$, на языке кванторов:

$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ — декартова плоскость.

$\mathbb{R}^n = \{x_1, x_2, ..., x_n : \forall i \in [1 : n] \in \mathbb{N} : x_i \in \mathbb{R}\}$

Также прошу заметить, что $\mathbb{R}^3 \neq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ и тому подобное.

$f : X \to \mathbb{R}^n$ — векторнозначная функция.

$x \mapsto y = f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x))$

$f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x) : X \mapsto \mathbb{R}$ — координатные функции.

График отображения.

$f : X \to Y$

$F_f = \{(x, y) : y = f(x)\} \subset X \times Y$ - множество пар, удовлетворяющих $f(x) = y$.

Обратное отображение.

$f : X \to Y$, то f^{-1} - обратное, если

$f^{-1} : f(X) \to X$

Композиция отображения.

$f : X \to Y$; $g : Y \to Z$

$g \circ f = X \to Z$, такое что

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Тождественное отображение.

id - такое отображение, что

$id : X \to X$, где id(x)=x

Сужение — уменьшение области определения

$f : X \to Y$

$A \subset X$

$f|_A : A \to Y$, при этом $\forall a \in A : f|_A(a) = f(a)$

Продление — добавление области определения

$f : X \to Y$

$X \subset B$

$\widetilde{f} : B \to Y$, при этом $\forall x \in X : \widetilde{f}(x) = f(x)$

1.2 Метрические пространства.

Метрическое пространство (X, ρ), где X - множество, ρ - отображение/функция расстояния

$\rho : X \times X \mapsto \mathbb{R}$

Аксиомы метрического пространства:

1. $\forall x, y : \rho(x, y) \geq 0$; $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\forall x, y : \rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\forall x, y, z : \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z)$

Примеры метрич. пространств:

1. $\rho(x, y) = \begin{cases} 1, x \neq y \\ 0, x = y \end{cases}$ — симплициальная метрика.
2. Метрика Хемминга. X = мн-во всех возможных байтов.

   $b = (b_1, ..., b_8)$

   $\bar{b} = (\bar{b_1}, ..., \bar{b_8})$

   $\rho(b, \bar{b}) = \#\{i \in [0:8] : b \neq \bar{b}\} = |\{\forall i \in [0:8] : b \neq \bar{b}\}|$
3. $X = \mathbb{R}, \rho(X, y) = |x - y|$
4. $X = \mathbb{R}^n$

   $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$

   $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$

   $\rho_1 = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + ... + |x_n - y_n|$

   $\rho = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}$ — Евклидова метрика в $\mathbb{R}^n$

   $\rho_\infty = max(|x_1 - y_1|, |x_2, y_2|, ...|x_n - y_n|)$

Подпространство — подмножество, на котором мы пользуемся метриками

(Открытый) шар — $a \in X, r > 0$: $B(a, r) : x \in X : \rho(a, x) < r$

Замкнутый шар — $\bar{B}(a, r) : \rho(a, x) \leq r$

ε-окрестность $a \in X - B(a, \varepsilon)$. Обозначается $U(a)$.Проколотая окрестность — $B(a, \varepsilon) \setminus \{a\}$.

$A \subset X$ — **ограниченное** множество, если существует шар B: $A \subset B$. При чем центр шара можно задавать(пишем нер-во относительно каждой точки и центров двух окружностей, которые следуют из определения метрич. пространства)

1.3 Счетные и несчетные множества.

Множества **равномощные**, если между ними существует биекция. Это отношение эквивалентности. Будем обозначать ~

Множество а - **счетное**, если оно равномощно $\mathbb{N}$.

Лемма. Любое бесконечно множество содержит счетное множество Очевидно.

Лемма. Если A - счетно, $B \subset A$, B - беск, тогла B - счетное. Очевидно.

Опр. Не более чем счетное = счетное либо конечное.

Лемма (об опоздавшем шахматисте) К счетному множеству можно добавить конечное кол-во элементов и оно останется счетным. Очевидно (представьте, что у вас отель с бесконечным числом этажей, где живут шахматисты. Переселим всех на 1 вверх и поселим одного в первую комнату и т.д).

Лемма (об опоздавших программистах) Счетное + Счетное = счетное.Очевидно (представьте, что у вас отель с бесконечным числом этажей, где живут шахматисты. Переселим всех из n-ой комнаты в 2n и поселим других в неч комнаты).

Лемма. $N \times N$ - счетно. Представить в виде таблички и нумеровать по диагонали (сначала $i + j = 2$,потом $i + j = 3$ и т.д при этом i - номер строчки j - номер столбца и при одной сумме j убывает).

Лемма. $\mathbb{Q}$ - счетно. Знаменатель числитель очевидно победили(свести к прошлой лемме).

Теорема.

Отрезок [0,1] не счетный (не очев док-во, надо написать)

Назовем этот отрезок **континуум**. Тогда все равномощные отрезку [0,1] будем называть мощностью континуума.

Следствие. A - бесконечное, B - Не более чем счетное, тогда A~$A \cup B$

Теорема

1. Bin - множество всеввозможных последовательностей из единиц и нулей. Bin $= \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \forall n : x_n \in \{0, 1\}\}$ - мощность континуума.
2. $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^\infty$ - мощности континуума, где $\mathbb{R}^\infty = \{(x_n) : \forall n : x_n \in \mathbb{R}\}$.

   Доказательство:
   1) $x \in Bin$. $x = (x_n) \to 0, x_1x_2\ldots$ - отобразим каждую последовательность в двоичное бинарное число. Но возникает проблема: мы можем, как и в записи

десятичных чисел представлять одно число двумя записями. Множество чисел $x \in [0, 1]$, у которых имеется 2 двоичных представления - счетно! так что полученное бинарное число и делю их на 2 группы: проблемные (те у которых с какого-то момента начинаются нули) и остальные. У остальных биекция с отрезком [0,1] (числа с двумя записями попали в проблемное множество). Биекция между $[0, 1] \cup P$ и $[0, 1]$ очевидна из предыдущих теорем Теперь осталось доказать бесконечное + конечное = бесконечное.

2) **Метод новейших технологий:** Беру $x \in \mathbb{R}^\infty$, Зафиксируем биекцию $\varphi : \mathbb{R}$. Преобразую его координаты в bin последовательности. Запишем последовательность последовательность слоями (бесконечная таблица будем ходить по диагоналям так, что i+j = const). R^∞ могу записать через бинарные последовательности, откуда мы победили

Замечание от Славы. Есть биекция между $\mathbb{R}$ и $[0, 1]$, есть биекция между $[0, 1]$ и Bin, исходя из предыдущего. Откуда есть какая-то φ, которая является композицией между переводом из $\mathbb{R}$ в $[0, 1]$ и $[0, 1]$ в Bin.

Замечание от Славы. Как работает док-во второй части теоремы. Я могу взять $\mathbb{R}^\infty$, перевести ее в $[0, 1]^\infty$. Запишу в качестве $N \times N$, и по диагональке начну выписывать бин. последовательности, какк в доказательстве, что $N \times N$ счетно. Осталось доказать биекцию в бин последовательности.

Следствие: $\mathbb{R}$ - имеет мощность континумма.

Доказательство:

Отрезок $[0, 1]$ равномощен отрезку $(0, 1)$, откуда давайте представим плоскость. На ней проведем прямую $y = 2$ и верхнюю часть окружности $x^2 + y^2 = 1$. Заметим, что, проведя отрезок через любую точку прямой и ноль, он пересечет окружность в какой-то точке(в точности одной). А теперь, если присмотреться, мы построили нужную нам биекцию. Откуда $\mathbb{R}$ равномощно $(0, 1)$.

2 Последовательности в метричных пространствах.

2.1 Последовательности и все о них.

$|x - y|$ — расстояние между x и y

Некоторые свойства модуля:

$|xy| = |x||y|$ и $|x| - |y| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$

x_n — вещ последовательность $a \in \mathbb{R}$. **Пределом x** называется такое a, что:

$$\forall \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{R} : \exists N \in \mathbb{R} : \forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon$$

Если $\exists lim$, то последовательность — сходящаяся, иначе расходящаяся.

Примеры:

1. $x_n \equiv a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.
2. $x_n = \frac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Докажем:

   $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N : \frac{1}{n} < \varepsilon$ — должно быть выполнено, чтобы 0 был пределом.

   Заметим, что при N $= \frac{1}{\varepsilon} + 1$ выполнено.
3. $x_n = (-1)^n$ - нет предела. Докажем:

   Пусть такой предел a существует, тогда выполнено:

   $\varepsilon = 1 : \exists N : \forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon$

   Заметим, что $|x_n - x_{n+1}| = 2 \Leftrightarrow 2 = |x_n - x_{n+1} + a - a| < |x_n - a| + |x_{n+1} - a| < 2$

Принцип двойной бухгалтерии: нам все равно меньше ли наш модуль ε или 100ε.

Пусть есть $\{x_n\}$,$\{y_n\}$:$\exists k : \forall n > k : x_n = y_n$. Тогда эти 2 последовательности либо одновременно сходятся и имеют один и тот же предел, либо предела не существует у обоих.

$U_\varepsilon(a)$— ε-окрестность точки a(окрестность от $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$)

(x_n) — **посл-ть в метрическом пространтсве** (X, ρ), $a \in X$

$x_n \to a =$ предел посл (x_n) равен a.

$\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n > N : \rho(x_n, a) < \varepsilon$

$\forall U(a) \exists N : \forall n > N : x_n \in U(a)$

Заметим, что тогда $\rho(x_n, a) \to 0$

Теорема о единственном пределе.

x_n - последовательность в метрическом пространстве X.

Если $x_n \to a$, $x_n \to b$, тогда a=b.

Доказательство:

Пусть $a \neq b$, тогда $r = \rho(a, b) > 0$.

Возьмем $U(a) = B(r, \frac{r}{10})$, $U(b) = B(r, \frac{r}{10})$. Заметим, что $U(a)$ и $U(b)$ - не пересекаются, иначе противоречие с правилом треугольника. Тогда:

$\exists N_a : \forall n > N_a : x_n \in U(a)$

$\exists N_b : \forall n > N_b : x_n \in U(b)$

Тогда с $n > max(N_a, N_b)$. x_n будет лежать и в $U(a)$ и в $U(b)$, что невозможно из-за противоречия правилу треугольника. Q.E.D.

x_n - **ограниченно**, если мн-во $\{x_n\}$ - ограниченно(то есть сверху и снизу есть число за которое мы не выходим). Функция ограниченна, если f(x) - огр в Y

Теорема.(ограниченность сходящийся последовательности). (x_n - посл. в м.п. X,). $x_n \to a$. Тогда (x_n) - ограниченна.

Доказательство:

По опр. Для $\varepsilon = 1 : \exists N : \forall n > N : x_n \leq B(a, 1)$.

Тогда $\forall n : x_n \in B(a, R)$, где $R = max(\rho(x_k, a))_{k \in [0:N]} + 1$. Значит ограниченна. Q.E.D.

Замечание от Славы. Мы берем шар, который покрывает бесконечное кол-во точек. Остается конечно число точек за ним, которые мы будем покрывать по одной. Тк их конечно, то мы можем так сделать. Эта идея будет еще много где играть.

Теорема о предельном переходе в неравенствах.

x_n, y_n - вещ. послед. $a, b \in \mathbb{R}$. $x_n \to a, y_n \to b$.

Пусть известно, что $\exists N : \forall n > N : x_n \leq y_n$. Тогда $a \leq b$.

Доказательство:

Пусть $a > b$. $r = \frac{a-b}{2}$.

$U(a) = B(a, \frac{r}{2}), U(b) = B(b, \frac{r}{2})$.

$\exists N_a : \forall n > N_a : x_n \in U(a)$, в частности $x_n > a - \frac{r}{2}$.

$\exists N_b : \forall n > N_b : y_n \in U(b)$, в частности $y_n < b + \frac{r}{2}$

Тогда при $n > max(N_a, N_b, N)$: $y_n < b + \frac{r}{2} \le a - \frac{r}{2} < x_n$. Противоречие. Q.E.D.

Следствие.

Если $x_n \le b$ и $x_n \to a$, то $a \le b$.

Если $x_n \in [a, b]$ и $\exists \lim x_n$, то $\lim x_n \in [a, b]$

Теорема о двух милиционерах (городовых).

x_n, y_n, z_n вещ. посл. $\exists N : \forall n > N, x_n \le y_n \le z_n$. Пусть $\lim x_n = a$ и $\lim z_n = a$, где $a \in \mathbb{R}$. Тогда $\exists$ предел y_n, и он равен a.

Доказательство:

Пусть $U(a)$ - эпсилон окрестности для какого-то ε.

$\exists N_x : \forall n > N_x : x_n \in U(a)$

$\exists N_z : \forall n > N_z : z_n \in U(a)$

Тогда с $n > max(N_x, N_z, N) : a - \varepsilon < x_n \le y_n \le z_n < a + \varepsilon$. Откуда уже очевидно требуемое. Q.E.D.

Следствие.

Даны x_n, y_n - вещ. последовательности и $\exists N : \forall n > N : |y_n| \le x_n$. Пусть $x_n \to 0$. Тогда $y_n \to 0$.

x_n - вещ. последовательность. x_n — **бесконечно малая**, то есть стремится к нулю

Теорема (свойства бесконечно малой последовательности):

x_n, y_n, a_n - вещ. последовательности.

$x_n \to 0, y_n \to 0, a_n$ - ограничено в $\mathbb{R}$. Тогда

1. $x_n + y_n \to 0$.
2. $x_n \cdot a_n \to 0$.

Доказательство:

$\forall \varepsilon > 0 \exists N_x : \forall n > N_x : |x_n| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N_y : \forall n > N_y : |y_n| < \varepsilon$

$\exists k : \forall n > 0 : |a_n| < k$

1) при $n > max(N_x, N_y) : |x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n| < 2\varepsilon$ по принципу двойной бухгалтерии $x_n + y_n \to 0$.

2) при $n > max(N_x, k) : |x_n a_n| < |x_n||a_n| < k|x_n| < k\varepsilon$ по принципу двойной бухгалтерии $x_n a_n \to 0$. Q.E.D

2.2 Линейное пространство. Норма и нормированное пространство.

$\mathbb{X}$ — **линейное пространство** над полем $\mathbb{R}$, если в нем заведены:

1) $+ : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$.

   Обозначается $a + b$.

2) $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$.

   Обозначается $a \cdot b$.

И если выполнены данные **аксиомы:**

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $\exists \overline{0} \in X : \forall x : \overline{0}x = \overline{0}$
4. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
5. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
6. $\lambda(\mu(x)) = \mu(\lambda(x))$
7. $\forall x : 1x = x$

Обозначение $x - y = x + (-1)y$.

X - линейное пространство над $\mathbb{R}$. Тогда **норма** - отображение: $x \to ||x||$.

1. $\forall x \in X : ||x|| > 0$.
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \forall x \in X : ||\alpha x|| = |\alpha|||x||$
3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

Примеры норм в в $\mathbb{R}^m$:

$$||x||_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2}$$

$$||x||_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_m|$$

$||x||_\infty = max(|x_k|)$

$\rho(x, y) = ||x - y||$ - **метрика, порожденная нормой.**

Заметим, что не все метрики порожденны нормой, например:

$$\rho(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}.$$

Можно через норму задавать определения пределов и т.п.

Нормированное пространство — лин пр-во + норма $(X, ||\cdot||)$.

Теорема. Арифметические свойства предела в нормированном пространстве.

Дано: $(X, ||\cdot||)$ - Норм пространство над $\mathbb{R}$;

x_n, y_n - последовательности в X. λ_n - последовательность множителей.

Пусть $x_n \to x_0, y_n \to y_0$ в X и $\lambda_n \to \lambda_0$ в $\mathbb{R}$. Тогда:

1. $x_n + y_n \to x_0 + y_0$
2. $\lambda_n x_n \to \lambda_0 x_0$
3. $||x_n|| \to ||x_0||$

   Доказательство:

1) $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n > N : ||x_n - x_0|| < \varepsilon$ и $\exists K : \forall n > K : ||y_n - y_0|| < \varepsilon$ из определения предела в понятиях нормы.

   Тогда для $\varepsilon : \exists M = max(N, K)$

   $||x_n + y_n - x_0 - y_0| \leq ||x_n - x_0|| + ||y_- y_0|| < 2\varepsilon$. По принципу двойной бухгалтерии получаем то, что нам надо.

2) $||\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0|| = ||\lambda_n x_n - \lambda_0 x_n + \lambda_0 x_n - \lambda_0 x_0|| \leq ||\lambda_n x_n - \lambda_0 x_n|| + ||\lambda_0 x_n - \lambda_0 x_0|| \leq |\lambda_n - \lambda_0|||x_n|| + \lambda_0||x_n - x_0||$.

   Заметим, что последовательность $||\lambda_n - \lambda_0||$ - бесконечно малая. $||x_n||$ - ограниченная, так как имеет предел. λ_0 - можно считать ограниченной последовательностью. Последовательность $||x_n - x_0||$ - бесконечно малая. Получаем, что вся последовательность $|\lambda_n - \lambda_0|||x_n|| + \lambda_0||x_n - x_0||$ - бесконечно малая, то есть стремится к нулю. Ну и по теореме о двух миллиционерах получаем, что последовательность $||\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0||$ стремится к нулю Q.E.D.

3) $-||x_n - x_0|| \leq ||x_n|| - ||x_0|| \leq ||x_n - x_0||$ по нер-ву треугольника верно, по принципу двух милиционеров верно

Теорема. Арифметические свойства предела последовательность в $\mathbb{R}$

x_n, y_n - вещ. последовательности. $x_n \to x_0$ $y_n \to y_0$ в $\mathbb{R}$. Тогда верно:

1. $x_n + y_n \to x_0 + y_0$
2. $y_n x_n \to x_0 y_0$
3. $|x_n| \to |x_0|$
4. Пусть $\exists N_1 : \forall n > N_1 : y_n \neq 0$ и пусть $y_0 \neq 0$. Тогда $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{x_0}{y_0}$

   Доказательство:

   1-3 очевидно. Докажем 4-ый пункт. Очевидно, что если мы докажем, что предел $\frac{1}{y_n}$ равен $\frac{1}{y_0}$, то использовав п.2 получим искомое.

   $$|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y_0}| = |y_0 - y_n||\frac{1}{y_0}||\frac{1}{y_n}|.$$

   Раз $y_0 \neq 0$, то возьмем $\varepsilon = \frac{|y_0|}{2}$. Тогда для этого $\varepsilon \exists N : \forall n > N : |y_n - y_0| < \frac{|y_0|}{2} = \varepsilon$. Это значит, что $|y_n| > \frac{|y_0|}{2}$ и тогда $\frac{1}{|y_n|} < \frac{2}{|y_0|}$.

   Возьмем $R = max_{1 \leq k \leq max(N, N_1)}(\frac{1}{y_k}) + \frac{2}{y_0} + 1$. Получим, что $|\frac{1}{y_n}|$ - ограниченная. Ост. функции очевидно ограниченные или бесконечно малые, так что произведение стремится к нулю и по теореме о двух милиционерах мы доказали. Q.E.D.

Скалярное произведение. X - лин пр-во над $\mathbb{R}$. Назовем скалярным произведением функцию:

$$\phi : X \times X \to \mathbb{R}$$

То есть она переводит $(x, y) \to \langle x, y\rangle$.

Аксиомы скалярного произведения.

1. Линейность по 1-ому аргументу

   $\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y\rangle = \alpha_1\langle x_1, y\rangle + \alpha_2\langle x_2, y\rangle$
2. $\forall x, y \in X : \langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$
3. $\forall x \in X : \langle x, x\rangle \geq 0$, причем $\langle x, x\rangle = 0$, при $x = 0$.

Лемма КБШ

X - лин пр-во со скалярным произведением.

Тогда $\forall x, y \in X : |\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle y, y\rangle\langle x, x\rangle$

   Доказательство:

   Пусть $y \neq 0$ (иначе тривиально).

   $f(\lambda) = \langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle \geq 0$. Раскроем:

$f(\lambda) = \langle x, x + \lambda y\rangle + \lambda\langle y, x + \lambda y\rangle.$

$f(\lambda) = \langle x, x\rangle + \overline{\lambda}\langle x, y\rangle + \lambda\overline{\langle x, y\rangle} + \lambda\overline{\lambda}\langle y, y\rangle.$

Подставим $\lambda_i = \dfrac{-\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}$. Получим:

$$f(\lambda_i) = \langle x, x\rangle - \frac{\overline{\langle x, y\rangle}\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} - \frac{\overline{\langle x, y\rangle}\,\overline{\langle x, y\rangle}}{\overline{\langle y, y\rangle}} + \frac{\langle x, y\rangle\,\overline{\langle x, y\rangle}}{\langle y, y\rangle} = \langle x, x\rangle - \frac{\overline{\langle x, y\rangle}\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} \geq 0.$$

Методом смотрения на выражения получаем очев. Q.E.D.

Евклидово скалярное произведение.

$\langle a, b\rangle = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$

Лемма.

X - лин. пр-во со скалярным произведением. Тогда $f(x) = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ - норма в Y.

Доказательство. Докажем свойства нормы:

1) $f(x) \geq 0$ и $f(x) = 0$, когда x $= 0$ — выполнено.
2) $f(\alpha x) = \sqrt{\alpha^2\langle x, x\rangle} = |\alpha|\sqrt{\langle x, x\rangle}$ — выполнено.
3) $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$

$\sqrt{\langle x + y, x + y\rangle} \leq \sqrt{\langle x, x\rangle} + \sqrt{\langle y, y\rangle}$ — возведем в квадрат.

$\langle x + y, x + y\rangle \leq \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + 2\sqrt{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle}$

$\langle x, x\rangle + \langle y, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \leq \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + 2\sqrt{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle}$

$\langle y, x\rangle + \langle x, y\rangle \leq 2\sqrt{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle}$ по двум лемма кбш правда. Q.E.D.

$f(x) = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ — **норма, порожденная скалярным произведением.**

Лемма (непрерывность скалярного):

X — мн-во со скалярным произведением в $\mathbb{R}^m$. $x^{(n)} \to x^{(0)}$, $y^{(n)} \to y^{(0)}$.

Тогда $\langle x^{(n)}, y^{(n)}\rangle \to \langle x^{(0)}, y^{(0)}\rangle$.

Доказательство.

$$|\langle x^{(n)}, y^{(n)}\rangle - \langle x^{(0)}, y^{(0)}\rangle| \leq |\langle x^{(n)}, y^{(n)}\rangle - \langle x^{(n)}, y^{(0)}\rangle| + |\langle x^{(n)}, y^{(0)}\rangle - \langle x^{(0)}, y^{(0)}\rangle| \leq$$

$$\leq ||x^{(n)}|| \cdot ||y^{(n)} - y^{(0)}|| + ||x^{(n)} - x^{(0)}|| \cdot ||y^{(0)}||$$ — а это стремится к нулю.

Значит по теореме о двух милиционерах итоговое тоже стремится к нулю

Замечание от Славы. В конце леммы мы пользуемся двумя неравенсивам КБШ для двух скалярных, а потом пользуемся предыдущей леммой и заменяем на норму.

Лемма (о покоординатной сходимости).

Пусть есть (x^n) - последовательность в $\mathbb{R}^m$. Тогда равносильно $x^n \to x^0$(отн. евкидовой нормы) и $\forall k : x_k^n \to {x_k}^n$. Док-во предельно очевидно (расписать евклидову норму и подумать).

О плотности $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$.

$\forall (a, b) \subset \mathbb{R}.\ \exists q \in \mathbb{Q}, q \in (a, b)$.

Доказательство:

По аксиоме Архимеда: существует $n > \dfrac{1}{b-a}$.

Возьму q $= \dfrac{[an]+1}{n}$. Проверим и победили

2.3 Супремум и инфинум и не только.

Ограниченные множества

Непустое мн-во E в $\mathbb{R}$ называется **ограниченным сверху**, если существует такое число M, что $x \le M$ при всех $x \in E$

Непустое мн-во E называется **ограниченным снизу**, если существует такое число M, что $x \ge M$ при всех $x \in E$

Непустое мн-во E называется **ограниченным**, если оно ограниченно и сверху, и снизу.

Введем пару понятий:

Супремум - наименьшая из верхних границ множества E. Обозначается sup(E).

Инфинум - наибольшая из нижних границ множества E. Обозначается inf(E)

Свойства супремума:

1. $D \subset E \subset \mathbb{R}$. Тогда $\sup(D) \le \sup(E)$.
2. $X \subset \mathbb{R}, \lambda > 0 : \lambda \sup(X) = \sup(\lambda X)$.
3. $X \subset \mathbb{R} : \sup(-X) = -inf(X)$

Доказательство очевидно.

Техническое определение супремиума: Если супремум есть, то $\forall \varepsilon > 0 : \exists x_0 \in B(\sup, \varepsilon)$.

Теорема: (о существовании супремума).

Если существует верхняя граница (огр. сверху), то есть и супремум.

Доказательство:
Возьму $x_0 \in D$ - наше множество. p - граница. Начну делать бин.поиск - брать середину и если справа от нее кто-то есть, то двигать левую, иначе правую. Получаю беск. последовательность вложенных отрезков, что по теореме Кантора будет единственный супремум.

Монотонные последовательности:

Возрастающая, строго возрастающая, убывающая, строго убывающая.

Теорема (об ограниченных монотонных последовательностях)

1. Возрастающая ограниченная сверху последовательность сходится.
2. Убывающая органиченная снизу последовательность сходится.
3. Неограниченная сверху возрастающая последовательность стремится к $+\infty$.
4. Неограниченная снизу убывающая последовательность стремится к -∞.

Секретное приложение к теореме:

Оказывается (omg):

1. $\lim x_n = sup(x_n)$
2. $\lim x_n = inf(x_n)$

Доказательство.

1) $L = sup(x_n)$. По определению проверим $x_n \to L$:

$\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n > N : |x_n - L| < \varepsilon$. Раскроем:

$L - x_n < \varepsilon$

$L - \varepsilon < x_n \leq L$

Пользуясь знаниями о супремиуме у нас есть n_0, который попадает на промежуток $L - \varepsilon < L$. Заметим что такой n_0 подходит в качестве N, тк последовательность возрастающая. Определение предела доказано.

Остальное аналогично

Неравенство Бернулли. Пусть $x > -1$ и $n \in N$. Тогда

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

Доказательство с помощью индукции очевидно.

Давайте теперь поговорим про число e. Для этого рассмотрим 2 последовательности:

$$x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$$
$$y_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$$

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{(1 + \frac{1}{n-1})^n}{(1 + \frac{1}{n})^{n+1}} = (1 + \frac{1}{n^2-1})^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} \geq (1 + \frac{n+1}{n^2-1}) \cdot \frac{n-1}{n} \geq 1$$

В конце мы использовали нер-во бернулли. Теперь, исходя из этого последовательность убывающая, откуда y_n - имеет предел, равносильно тому, что x_n имеет предел. Обозначим этот предел e. Тогда

$$e = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$$

Лемма (о быстро убывающих последовательностях).

$x_n > 0$. Пусть $\exists \lim \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$. Тогда $\exists \lim x_n = 0$.

Доказательство.

$a = \lim \frac{x_{n+1}}{x_n}$. Пусть $d = \frac{1+a}{2}$. Заметим, что $d > a$.

Возьму $\epsilon = d$. По определению предела: $\exists N : n > N : \frac{x_{n+1}}{x_n} < d$. Тогда:

$\forall k > 0 : x_N \cdot d^k \geq x_{N+k} > 0$. У левого выражения предел есть и равен 0, откуда по двум милиционерам есть предел у средней и он тоже равен 0. Q.E.D.

Замечание от Славы. Если не понимаете доказательство, то попытайтесь осознать условие. Типо что значит, что последовательность $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ стремится к a. Значит есть окрестность, в которой любой $x < d$. (Возьмите радиус равный половину $\dfrac{d-a}{2}$). Вообще в целом советую рисовать все теоремы о пределах.

Следствие.

1. $a > 1, k \in \mathbb{N}$. Тогда $\dfrac{n^k}{a^n} \to 0$.
2. $a > 0$. Тогда $\dfrac{a^n}{n!} \to 0$.
3. $\dfrac{n!}{n^n} \to 0$.

2.4 Точки на множестве в метрическом пространстве.

X - м.п (X, ρ).

$D \subset X, a \in D$, тогда a — **внутренняя точка D**,если $\exists U(a) : U(a) \subset D$.

$D \subset X$ - **открытое**, если все его точки внутренние.

Теорема о св-вах открытого множества.

(X, ρ) - м.п.

1. Пусть есть семейство открытых множеств. $(G_\alpha)_{\alpha \in A}$. Тогда $\bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha$ - открыто.
2. Пусть есть конечное кол-во открытых множеств. $G_1, G_2, \ldots, G_n$. Тогда $\bigcap\limits_{k=1}^{n} G_k$ - открыто.

док-во очевидно (рукомахание).

X — мн-во

T — нек-ая совокупность подмножеств X

1) $\varnothing, X \in T$.

2) $\forall G_\alpha \in T : \bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha \in T$.

3) $\forall G_1, \ldots, G_n \in T : \bigcap\limits_{k=1}^{n} G_k \in T$.

$D \subset X$. **Внутренность** D — множество внутренних точек. Обозначение $IntD$.

Проколотая окрестность $\alpha \in X$—$U(a)/a$.

$D \in x, a \in X$, a — **предельная** точка D, если $\forall U(a)$: проколотая $U(a)$ содержит точки из D.

Св-ва:

1. a - предельная точка $\forall U(a)$ содержит бесконечно много.
2. a - предельная точка $D \Leftrightarrow \exists x_n \in D : x_n \to a$

Доказательства этих свойств очевидны из определения.

$a \in D$, a — **изолированная** точка мн-ва D, если $\exists U(a) : U(a) \cap D$ - пустое

$D \subset X, D$ — **замкнутое** мн-во, если оно содержит все свои предельные точки.

Теорема о связи открытого и закрытого мн-ва.

$D \subset X$: Тогда экв:

1. D - замкнутое.
2. $D^c = X/D$ - открытое

   Доказательство.

   (a) из первого второе. Надо доказать: $\forall a \in D^c : \exists U(a) : U(a) \in D^c$. От противного, пусть неверно, тогда выполнено:

   $\forall U(a) : U(a) \subset D^c$. Тогда $U(a) \cup D$ - не пусто(при чем в пересечении лежит не а). Тогда - а - предельная и должна лежать в D.

   (b) из второго первое. Надо доказать D - замкнутое. От противного. Тогда $\exists x \in D^c$ - предельная точка D. $\forall U(x) : U(x) \subset D$ - не пустое. Т.е неверно, что $U(a) \subset D^c$.

Замечание от Славы. Тк мы работаем в метрическом пространстве., то все пространствво делится на 2 части: D и D^c. Поэтому, если U(a) не лежит в D^c, то хотя бы что-то есть в D.

Теорема о свойствах замкнутых множеств. X - мн-во

1. $(F_\alpha)_{\alpha \in A}$ - семейство замкнутых, тогда $\bigcap\limits_{\alpha \in A} F_\alpha$ - замкнуто.
2. $F_1, \ldots, F_n \subset X$ - замкнутые, тогда $\bigcup\limits_{k=1}^{n} F_k$ - замкнуто.

Доказательство этого столь очевидно, что вы все, очевидно, уснете, пока я говорю его, так что не будем его произносить. (говорить тут про дополнение множеств)

Замыкание множества D — в D добавляются все пр. точки D. Обозначатся $Cl(D)$.

x — **граничная** точка, если $\forall U(x) : U(x) \cap D, U(x) \cap D^c$ - не пустые. **Граница** D — мн-во ограниченных точек, обозначается ∂D.

Теорема. (X, ρ) - л.п., (Y, p) - подпространство, $D \subset Y \subset X$

1. D - откр. в Y $\Leftrightarrow \exists G$ - открытый в X: $D = G \cap Y$.
2. D - замкн в Y $\Leftrightarrow \exists G$ - закрытый в X: $D = G \cap Y$.

Доказательство.

1) из первого следует второе: $D = \bigcup\limits_{y_n \in D} B^Y(y_0, r_{y_0})(r_{y_0}$ - такой радиус, что наш шар содержится в Y) и возьмем $G = \bigcup\limits_{y_0 \in D} B^X(y_0, r_{y_0})$.

Докажем, что $D = G \cap Y$. $G \cap Y = (\bigcup\limits_{y_0 \in D} B^X(y_0, r_{y_0})) \cap Y$

$= \bigcup\limits_{y_0 \in D} (B^X(y_0, r_{y_0}) \cap Y) = \bigcup\limits_{y_n \in D} B^y(y_0, r_{y_0})$ Q.E.D.

из второго следует первое. G - открыто в X. Доказать $D = G \cap Y$ - открытое в Y: $\forall a \subset D$, a - внутренняя точка. $a \in D = G \cap Y \Rightarrow a \in G \Rightarrow \exists B^X(a, r) \subset G \Rightarrow a \in B^x(a, r) \cap Y \Rightarrow a \in B^Y(a, r) \subset D$.

2) Перейти в дополнение и подумать!

3 Вещественные числа.

Пусть $\mathbb{R}$ — мн-во, в котором выполнены аксиомы I-IV. Тогда $\mathbb{R}$ - множество вещественных чисел.

I. Аксиомы поля.

Зададим 2 операции:

1) $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

   Обозначается $a + b$.

2) $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

   Обозначается $a \cdot b$.

Для них должны быть выполнены данные аксиомы:

1. $\forall x, y : x + y = y + x$ — коммунитативность сложения

2. $\forall x, y : x \cdot y = y \cdot x$ — коммунитативность умножения

3. $\forall x, y, z : (x + y) + z = x + (y + z)$ — ассоциативность сложения

4. $\forall x, y, z : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ — ассоциативность умножения

5. $\exists 0 \in \mathbb{R} : \forall x : x + 0 = x$

6. $\exists 1 \in \mathbb{R} : \forall x : x \cdot 1 = x$

7. $\forall x : \exists(-x) : x + (-x) = 0$

8. $\forall x : \exists(\frac{1}{x}) : x \cdot (\frac{1}{x}) = 1$

9. $\forall x, y, z : xz + yz = (x + y)z$ — дистрибутивность

Примеры:

1) $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$

2) $\mathbb{R}$

3) $\mathbb{Q}$

4) $\widetilde{R} = \{\frac{P(x)}{Q(x)}, P, Q -$многочлены$\}$

II. Отношения порядка.

$\forall x, y : x \leq y$ или $y \leq x$

Должно быть выполнено:

1. $x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$ — транзитивность

2. $x \leq y; y \leq x \Leftrightarrow x = y$
3. Если $x \leq y$, то $\forall z : x + z <= z + y$
4. Если $0 \leq x$ и $0 \leq y$, то $0 \leq xy$

Отношения порядка дают нам возможность работать на промежутках.

$[a, b]$ — отрезок.

$(a.b)$ — интервал.

$\langle a, b \rangle$ — нам все равно на знаки.

Означает такая запись: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

Введем ∞,$-\infty$, так чтобы было выполнено:

$+$	$a \in \mathbb{R}$	∞	$-\infty$
$b \in \mathbb{R}$	$a + b$	∞	$-\infty$
∞	∞	∞	☹
$-\infty$	$-\infty$	☹	∞

$*$	$a \in \mathbb{R} > 0$	∞	$-\infty$
$b \in \mathbb{R} < 0$	ab	$-\infty$	∞
∞	∞	∞	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	∞

$0 * \infty =$ ☹

когда-нибудь потом пригодится. Обозначим $\overline{\mathbb{R}}$

III. Аксиома Архимеда.

$\forall x, y > 0 : \exists n \in \mathbb{N} : nx > y$

Следствие: Существует сколь угодно большие $\mathbb{N}$

Фан факт: мы не ввели $\mathbb{N}$. Но мы с ними работаем :)

IV. Аксиома Кантора.

Пусть дана последовательность вложенных отрезков:

$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$

Тогда пересечение этих отрезков не пусто.

Тогда наше $\mathbb{R}$ задается аксиомами I,II,III,IV.

4 Пределы и непр-сть отображений.

4.1 Предел.

$(X, \rho^x), (Y, \rho^y) : D \subset X$. $f : D \to Y$.

$a \in X, a$ - предельная точка D, $A \in Y$:

Предел отображения $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ - если выполнено любое из трех опр.

1. $\epsilon - \delta$, по Коши: $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in D : \rho^x(x, a) < \delta : \rho^y(f(x), A) < \epsilon$.
2. на языке окрестностей: $\forall U(A) : \exists V(a) : \forall x \in D \cap V(a)$ (V(a) в данном контексте проколотая, Кохась решил не говорить об этом): $f(x) \in U(A)$.
3. по Гейне: $\forall (x_n) : x_n \in D, x_n \to a, x_n \neq a : f(x_n) \to A$

Частный случай. $X = Y = \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}$:

$\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in D : 0 < |x - a| < \delta : |f(x) - A| < \epsilon$

Зам:

1. Опр. Гейне такие (x_n) существуют по свойствам предельной точки.
2. Значение f(a) (если $a \in D$) никак не связана с величиной предела.
3. Если $\exists U(a)$ f=g на $U(a)$, то они одновременно имеют общий предел/не имеют предел вовсе.

Теорема. Эквивалентность Коши и Гейне.

Опр. Коши $\Leftrightarrow$ Опр. Гейне.

Доказательство.

Докажем $\Rightarrow$. Берем $x_n \in D, x_n \to a, x_n \neq a$. Проверим по опр. предела последовательности $f(x_n) \to A$.

$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$. Для этого $\delta : \exists N : \forall n > N : \rho(x_n, a) < \delta$. $x_n \in D$, $x_n \neq a$. Для этих x_n выполнено Коши $\rho(f(x_n), A) < \epsilon$. Откуда выполнено Гейне (пояснение: мы взяли последовательность из опр. Гейне и благодаря определению по Коши нашли предел)

Докажем $\Leftarrow$. Дано $f(x_n) \to A$ по Гейне. Предположим, что A - не предел по Коши.

$\exists \epsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists x \in D, 0 < p(x, a) < \delta : p(f(x), A) \geq \epsilon$. Беру $\delta = 1, \exists x_1 : \rho(x_1, a) < 1$. Беру $\delta = \frac{1}{2}, \exists x_2 : \rho(x_2, a) < 1$. Беру $\delta = \frac{1}{n}, \exists x_n : \rho(x_n, a) < 1$. Заметим, что последовательность x_n удовлетворяет всем критериям Гейны($x_n \in$

$D, x_n \neq a, x_n \to a$). Для нее $f(x_n) \to A$, тогда $\rho(f(x_n), A) \to 0$. Но у нас $\forall n : \rho(f(x_n), A) \geq \epsilon$. Противоречие.

Модификация определений. (X,Y = $\mathbb{R}$ или $\overline{\mathbb{R}}$.)

1) $a \in \mathbb{R}$, $A = +\infty$, $X = \mathbb{R}$, $Y = \overline{\mathbb{R}}$. f: $D \to \overline{\mathbb{R}}$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\inf$.

$\forall \epsilon \exists \delta > 0 : \forall x \in D, 0 < |x - a| < \delta : f(x) > \epsilon$.

2) $a = +\inf, A = -\inf$. $f : D \subset \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, $+\inf$, - предельная точка D, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\inf$.

$\forall L \in \mathbb{R} : \exists \Delta : \forall x \in D : x > \Delta : f(x) < L$.

Метризуемая топология.

Дана топология T в пр-ве X. (топология - совокупность открытых множеств). T метризуемая, если $\exists$ метрика ρ, которая порождает эту систему открытых множеств.

Теорема (о ед. пределе).

f: $D \subset X \to Y$, a - предельная точка D. $A, B \subset Y$.

$x_n \to a : f(x) = A$, $x \to a : f(x) = B$, тогда $A = B$.

Доказательство.

~~Очевидно по Гейне.~~

Распишем определение через окрестности и сделаем то же самое, что делали в других док-вах единтсвенности предела.

Теорема (о лок. ограниченности отображения, имеющего предел).

$f : D \subset X \to Y$, a - пр. точка D, $A \in Y$, $x_n \to a, f(x_n) = A$. Тогда $\exists V(a) : f|_{V(a)}$ - ограничена.

Доказательство.

$U(a) = B(A, 2025)$. Тогда $\exists V(a) : \forall x \in D \cap V(a) : f(x) \in B(A, 2025)$. Если $a \in D$, возьму r $= max(\rho(A, f(a)) + 2025, 2025)$ и буду делать шар радиуса не 2025, а радиуса R.

Теорема (о стабилизации знака).

$f : D \subset X \to Y$, a - пр. точка D, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A \in Y$, Пусть $B \in Y, B \neq A$. Тогда $\exists V(a) : \forall x \in D \cap V(a) : f(x) \neq B$.

Доказательство.

$r = \dfrac{1}{2}\rho(A, B)$, для $U(A) = B(A, r) \exists V(a) : \forall x \in D \cap V(a) : f(x) \in B(A, r)$, а следовательно $f(x) \neq B$.

Теорема (об арифм. свойствах предела).

X - м.п., Y - норм. $D \subset X$,$f, g : D \to Y$, a - пр. точка D.

$A, B \in Y$, $f(x) \to A$, $g(x) \to B$, $\lambda : D \to R : \lambda(x) \to \lambda_0 \in \mathbb{R}$, при $x \to a$.

Тогда

1. $f + g \to A + B$, при $x \to a$.
2. $\lambda f \to \lambda_0 A$, при $x \to a$.
3. $||f|| \to ||A||$, при $x \to A$.

Доказательство. ПО ГЕЙНЕ ОЧЕВ!!!

Теорема(об арифм. свойствах предела в $\mathbb{R}$).

$f : D \subset X \to \mathbb{R}$, a - пр. точка D, $f, g : D \to R$. $A, B \in \mathbb{R}$, $f(x) \to A$, $g(x) \to B$, при $x \to a$.

Тогда

1. $f + g \to A + B$, при $x \to a$.
2. $fg \to AB$, при $x \to a$.
3. $|f| \to |A|$, при $x \to A$.
4. Если $B \neq 0$, то $\frac{f}{g} = \frac{A}{B}$. (Замечание: из-за теоремы о стабилизации знака, это корректно)

Доказательство. Угадайте! По ГЕЙНЕ ОЧЕВИДНО.

Теорема (Предельный переход в неравенствах).

$f, g : D \subset X \to \mathbb{R}.a$ - предельная точка D.

$f(x) \leq g(x)$ в $U(a) \cap D$ (выколотая окрестность).

$\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = A \in \overline{\mathbb{R}}$, $\exists \lim\limits_{x \to a} g(x) = B \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда $A \leq B$. Док-во по Гейне очевидно(так сказал Кохась, но мне вообще не очевидно).

Зам. $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.

Если $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = A \in \overline{\mathbb{R}}$ и $\exists \lim\limits_{x \to a} h(x) = A \in \overline{\mathbb{R}}$.

То $g(x)$ имеет предел и он равен A.

Предел по мн-ве. $f : D \subset X \to Y$. $D_1 \subset D$, a - предельная точка D_1. Предел f при $x \to a$ по мн-ву D_1: $\lim\limits_{x \to a} f|D_1$

Односторонние пределы в $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{a+0} f(x)$ - предел правосторонний

$\lim\limits_{a-0} f(x)$ - предел левосторонний

Теорема о пределе монот. f:

f: $D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ монотонная. Пусть есть $a \in \overline{\mathbb{R}}$. $D_1 = (-\infty, a) \cap D$, a -предельная точка.

1. f - возрастает, огр сверху. Тогда $\exists \lim\limits_{x \to a-0} f(x)$
2. f - убывает, огр. снизучё. Тогда $\lim_{x \to a-0} f(x)$ - существует и конечен.

Доказательство аналогично т.о пределе монотонной послежовательности.

4.2 Компактность.

Лемма Гейне-Борели.

$[a, b] \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$. Тогда $\exists$ кон. число интервалов, что $[a, b] \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n}(a_i, b_i)$.

Я не буду доказывать эту лемму, она сама потом докажется

Опр. X - метр. пр-во, $K \subset X$, K - **компактно** в X, если из любого отрытого покрытия множества K, можно выбрать конечное подпокрытие.

$\forall (G_\alpha)_{\alpha \in A}$ - откр в X, $K \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A}(G_\alpha)$. $\exists$ конечное $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, что $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n}(G_{\alpha_i})$.

Теорема.

$K \subset Y \subset X$ $((Y, \rho)$ - подпространство $(X, \rho))$.

Тогда, если K компактно в Y, то это **равносильно** K - компактно в X.

Доказательство.

Докажем в правую сторону. Если K - компактно в Y, то должно быть. что K - в X. Берем произвольное открытое покрытие. (Обозначаю G_α^X - открытое в X, G_α^Y - открытое в Y)

$K \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A}(G_\alpha^X)$. Хотим доказать, что можно выбрать конечное подпокрытие.

$K \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A}(G_\alpha^X) \cap Y = K \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A}(G_\alpha^X \cap Y)$. По закону Де-Моргана.

$K \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A}(G_\alpha^X \cap Y). = K \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A}(G_\alpha^Y)$, для этого покрытия существует конечное, тк K компактно в Y.

$K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n}(G_{\alpha_i}^Y) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n}(G_{\alpha_i}^X)$. Откуда получаю, что из любого покрытия, можно выбрать конечно подпокрытие, откуда K компактно в X.

Докажем в левую сторону. Дано K компатно в X. Возьму произвольное открытое покрытие. $K \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A}(G_\alpha^Y)$, хочу доказать, что можно выбрать конечное подпокрытие.

Каждому G_α^Y можно задать G_α^X, такой, что $G_\alpha^Y = G_\alpha^X \cap Y$.

Возьму получившееся семейство. Очевидно, что $K \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A}(G_\alpha^X)$, по определению компактности в X есть конечное подпокрытие $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n}(G_{\alpha_i}^X)$.

Пересеку его с Y. Получу $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n}(G_{\alpha_i}^X \cap Y) = \bigcup\limits_{i=1}^{n}(G_{\alpha_i}^Y)$, откуда получаю, что из любого покрытия, я могу выбрать конечное, откуда K компактно в Y. Q.E.D.

Замечание от Славы: Тк мы доказали предыдущую теорему, то мы можем употреблять компактность без уточнения множества. В дальнейшем, вместо K компактно в X будет употребляться K компактно.

Теорема.

Пусть (X, ρ), $K \subset X$.

1. K - компактно $\Rightarrow$ K - замкнуто и ограниченно.
2. X - компактно, K - замкнуто $\Rightarrow$ K - компактно.

Доказательство.

1а) Дано K - компактно. Докажем, что K - замкнуто.

Чтобы доказать, что что-то замкнуто, мы доказываем, что дополнение открыто.

Доказать K^c - открыто, т.е. $\forall a \in K^c$ a должно быть внутренней.

$K \subset \bigcup\limits_{x \in K} B(x, \frac{1}{10}\rho(a,x))$. По определению компактности существуют $x_1, \dots, x_n$, такие

$K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} B(x_i, \frac{1}{10}\rho(a,x_i))$.

И суть в том, что $B(x_i, \frac{1}{10}\rho(a,x_i)$ и $B(a, \frac{1}{10}\rho(a,x_i)$ не пересекаются!

Возьму $r = min(\frac{1}{10}\rho(x_i,a))$. так как x-ов конечно, то такой минимум есть. Тогда B(a,r) не пересекается с K, откуда он лежит в K^c, откуда дополнение открыто.

Замечание от Славы. Для каждой точки дополнения у нас существует окрестность в которой она лежит, откуда по определению каждая точка дополнения K - внутренняя, откуда дополнение K открыто.

1б) Дано K - компактно. Докажем, что K - ограниченно.

Возьму $a \in X$. Тогда $K \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(a,n) = X$. Так как K компактно, то существуют такие $x_1, \dots, x_n$, $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{l}(a,n_i) = B(a,n_l)$, откуда получаю искомое.

Замечание от Славы. Множество K лежит в шаре $B(a,n_l)$, откуда оно ограниченно этим шаром.

2) Проверим, что K - компактно.

Возьмем какое-то покрытие:$K \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} (G_\alpha)$, хочу доказать, что можно выбрать конечное подпокрытие.

$\bigcup\limits_{\alpha \in A} (G_\alpha) \cup K^c$. Заметим, что т.к. K - замкнуто, то K^c открыто и является покрытием X.

Так как X компактно, то существуют такие $x_1, \dots, x_n$, что $X \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_\alpha \cup K^c$.

$K \subset X \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_\alpha \cup K^c$, но тк K и K^c не пересекаются, то

$K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_\alpha$. Откуда получаю, что из любого покрытия, я могу выбрать конечное, откуда K компактно Q.E.D.

Параллелепипед.

$\{x \in \mathbb{R}^m : \forall k = 1 \dots m : a_k \le x_k \le b_k\}$ — такое множество называется параллелепипедом, обозначается $[a, b]$, где$a, b \in \mathbb{R}^m$.

Лемма(о вложенных параллелепипедах).

Здесь индексы обозначаются сверху.

$[a^1, b^1] \supset [a^2, b^2] \supset \dots$ — последовательность парал. в $\mathbb{R}^m$.

Тогда $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} [a^k, b^k]$ — не пусто.

Доказательство.

~~как сказал кохась - очевидно.~~

Используем аксиому Кантора для каждой координаты и получим итоговое.

Лемма.

Дан замкнутый прлп. [a,b] в $\mathbb{R}^m$. Докажем, что он компактный.

Доказательство.

$[a^1, b^1] \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} (G_\alpha)$. $diam[a^1, b^1] = ||b^1 - a^1||$

Предположим, что не сущ. конечного подпокрытия. Разобьем мой прпл. на 2^n - половинных прпл. Следовательно найдется половинный прпл. $[a^2, b^2]$, для которого нельзя выбрать конечное подпокрытие.

Давайте теперь продолжу выполнять этот процесс. Найдутся $[a^4, b^4], [a^5, b^5], \ldots$.

$[a^1, b^1] \supset [a^2, b^2] \supset \ldots$ — последовательность прпл. в $\mathbb{R}^m$. $diam[a^k, b^k] = \frac{||b^1 - a^1||}{2^k}$.

По предыдущей лемме $\exists x \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} [a^k, b^k] \subset [a^1, b^1]$.

$x \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} (G_\alpha)$, значит есть какой-то α_0, что $x \in G_{\alpha_0}$. Тогда $\exists r > 0 B(x, r)$. И тк диаметр a^k, b^k стремится к нулю, то в какой-то момент этот шарик покроет прпл. a^l, b^l. Тогда приходим к противоречию. Q.E.D

Замечание от Славы. Мы предполагаем, что нельзя, тогда не должно существовать таких шариков, покрывающих один из бесконечнего кол-ва прпл (которые нельзя покрыть конечным числом шариков), а такой есть.

Теорема (о характеристике компактности в R^m)

Эквиваленты утверждения:

1. $K \in R^m$ - замкнуто и ограничено.
2. K - компактно.
3. $K \in R^m$ - **секвенциально компактно**, т.е. $\forall (x_n)$ - посл. в K, $\exists (n_k) : n_1 < n_2 < \ldots$ - посл нат чисел, $\exists a \in K$: $x_{n_k} \to a$.

Доказательство.

Из первого второе.

Пусть $K \in R^m$ - замкнуто и ограничено. Тогда $\exists$ прпл. [a,b]: $K \subset [a, b]$. причем K - замкнуто. Значит по лемме (см. наверх), наш прпл. компактный, а по теореме(см наверх) значит, что и K - компактно.

Из второго третье.

x_n - посл. в K. D $= x_n \subset K$, причем в D нет повторений.

Если D конечно, то какое-то значение принимается бесконечное кол-во раз, выберем только их и получим то, что от нас требуется.

Если D бесконечно. Если $\exists$ a - предельная точка D, лежащая в K, тогда такая последовательность строится очевидно.

Если таких нет. Тогда $K \subset \bigcup\limits_{x \in K} B(x, \varepsilon_x)$. Так как никакая из точек в K - не предельная для D, то каждую точку, я могу окружить шаром, что в нем не будет ни одного элемента D. (ε_x я выбираю именно так).

$D \subset K \subset \bigcup\limits_{1}^{n} B(x, \varepsilon_x)$ не более n точек из D. Тогда не существует конечного покрытия. Противоречие.

Из третьего первое. Проверим, что K - замкнуто. Если нет, тогда $\exists a \notin K$, a - предельная точка K. Тогда $\exists (x_n)$ - посл. в K. $x_n \to a$. $\forall (n_k) x_{n_k}$ сходится к $a \in K$, по секвенциальной компактности.

Следствие (Принцип выбора Больцано-Вейерштрасса).

в $\mathbb{R}^m$ x_n - огр. последовательность. $\exists (n_k)$, такое, что x_{n_k} сходится.

Доказательство.

(x_n) - огр., значит он лежит в каком-то парал [a,b], который компактен, а если он компактен, то по характеристике компактности он секвенциально компактен, откуда и следует искомое. Q.E.D.

Опр. (X, ρ) - м. п, (x_n) - посл-ть в X (x_n) - **фундаментальная** = после-ть Коши = сходящаяся в себе, если $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall m, n > N : \rho(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Лемма. (X, ρ) - м. п

1. (x_n) - посл. Коши, то (x_n) - огр.
2. (x_n) - посл. Коши, $\exists (n_k) : x_{n_k}$ - возрастающая и сходится, то (x_n) - сходится

Доказательство.

1) Возьмем $\varepsilon = 1$, $\exists N : \forall m, n > N : \rho(x_m, x_n) < 1$. Возьму $n_0 > N$. Заметим, что $\forall n > N : n \in B(x_{n_0}, 1)$. Возьму r=max($\rho(x_{n_0}, x_i)$), где i от 0 до N и сделаю шар радиуса R=max(r+1,1). Тогда все точки попадут в него откуда (x_n) - огр.

2) $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall m, n > N \rho(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ и также $\exists K : \forall b > K : \rho(x_{n_b}, a) < \frac{\varepsilon}{2}$. Возьмем M = max(N,K). $\forall m > M \rho(x_m, a) < \rho(x_m, x_{n_m}) + \rho(x_{n_m}, a) < \varepsilon$. Откуда сходится. Q.E.D

Фундоментальная последовательность. (X, ρ) - метрическое пространство, x_n - последовательность в X. Последовательность фундаментальна, если $\forall \varepsilon > 0 \exists N, \forall m, n > N : \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$. Такая последовательность называется последовательностью Коши.

Лемма. x_n - поcследовательность в (X, ρ).

1. x_n посл. Коши и x_n ограниченно.
2. x_n посл Коши и есть x_{n_k}, которое сходится, то x_n сходится.

Доказательство очевидно.

Полное пространство - любая фунд. последовательность в нем сходится.

Антипример: $x_n = \frac{1}{n}$ в $(0, +\infty)$. Пример: R^m.

В полном пространстве: фундоментальная = сходится и наоборот.

Критерий Больцмана-Коши. (существования предела в полном пространстве)

$\exists \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\,\exists N : \forall n, m > N : \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$

Теорема. Критерий Больцмана-Коши для отображений.

Пусть есть $D \subset X \to Y$, X,Y - метрические пространства. x_0 - предельная точка D. Y - полное, тогда имеет место:

1. $\exists \lim_{x\to x_0} f(x)$
2. $\forall\varepsilon > 0 : \exists\delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in D\backslash\{x_0\} : \begin{cases}\rho(x_1, x_0) < \delta \\ \rho(x_2, x_0) < \delta\end{cases} \quad \rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$

   Доказательство:
   Доказательство в правую сторону очевидно. Доказываем в левую сторону. Воспользуемся **пределом по Гейне**. Возьму $x_n \to x_0$, $x_n \in D$, $x_n \neq x_0$. f(x_n) - фундоментально из правой части (расписать и посмотреть). А так как фундоментально,то значит сходится по Критерию Больцмана-Коши.

4.3 Непрерывные отображения.

$f : D \in X \to Y, x_0 \in D$, Y,X - метрические пространства. f **непрерывна** в x_0, если выполнено 1 из 4:

1. $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, либо x_0 - изолированная.
2. По Коши.$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in D : \rho(x, x_0) < \delta, \rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$
3. Окр. $\forall U(f(x_0)) : \exists V(x_0) : \forall x \in D \cap V(x_0) : f(x_0) \in U(f(x_0))$
4. По Гейне. $\forall (x_n) : x_n \to x_0, x_n \in D : f(x_n) \to f(x_0)$

Случай в R: $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in D : |x - x_0| < \delta : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Разрывная в x_0 - нет непрерывности. (f терпит разрыв в x_0). В таком случае x_0 - **точка разрыва**.

Также в $\mathbb{R}$ можно ввести непрерывность **слева** и **справа**. (меняем пределы на левосторонний и правый).

Если функция непрерывна справа и слева от x_0, то она непрерывна.

Введем обозначение. $f(x \pm 0) = \lim\limits_{x \to x_0 \pm 0} f(x)$.

Если $f(x_0 - 0), f(x_0), f(x_0 + 0)$ не все совпадают(если существуют и конечны), тогда x_0 - **точка скачка** или разрыва первого рода.

Все другие - разрывы второго рода (не могу вычислить левосторонний предел или правостронний).

Свойства непрерывного отображения.

Арифметические свойства:

Теорема.

f, g: $D \subset X \to Y$, X - метрическое пространство, Y - нормированное, $x_0 \in D$. $\lambda : D \to \mathbb{R}$, f, g, λ - непрерывны в x_0.

Тогда f+g, λf, $||f||$ - непрерывны в x_0. Доказательство очевидно из арифм. свойств предела.

Теорема.

f, g: $D \subset X \to \mathbb{R}$, X - метрическое пространство, $x_0 \in D$, f,g - непрерывны в x_0.

Тогда f+g, fg, |f| - непрерывны в x_0, а также, если $g(x_0) \neq 0$: $\dfrac{f}{g}$ - непрерывна в x_0. Доказательство очевидно из арифм. свойств предела в $\mathbb{R}$.

Стабилизация знака.

$f : D \subset X \to \mathbb{R}, x_0 \in D, f(x_0) \neq 0.$, $f(x)$ непрерывна в x_0.

Тогда $\exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0) : \text{sign } f(x) = \text{sign } f(x_0)$.

(Пересказ теоремы о стабилизации знака).

Функция называется **непрерывной**, если она непрерывны в любой своей точке, то есть $f : D \subset X \to Y$, и f непрерывна в D, если $\forall x_0 \in D : f$ непрерывна в x_0.

Теорема.(непрерывность композиции)

$f : D \subset X \to Y, g : E \in Y \to Z$, $f(D) \subset X$. f - непрерывна в $x_0 \in D$, g - непрерывна а $f(x_0)$. Тогда $g(f(x))$ непрерывна в x_0.

Доказательство:
~~Доказательство состоит из волшебных слов: по Гейне.~~

Надо проверить, что $\lim\limits_{x \to x_0} g(f(x)) \to g(f(x))$. Возьмем $x_n \to x_0, x_n \in D. f(x_n) \to f(x_0)$, тк.f непрерывна. Есть некая $f(x_n) \to x_0$. Теперь воспользуемся непрерывности g и получим искомое.

Теорема. (о пределе композиции)

$f : D \subset X \to Y, g : E \in Y \to Z$, $f(D) \subset X. \lim\limits_{x \to a} f(x) = b, \lim\limits_{y \to b} g(y) = L$. Тогда: $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = L$

Если выполнено одно из двух:

1. g - непрерывна в точке b.
2. $\exists U(a) : \forall x \in U(a) \cap D : f(x) \neq b$.

Доказательство:
Кохась сказал, что это упражнение. Позже тут появится док-во, честно-честно (док-во вообще следует из прошлой задачи, если я умею думать)

Теорема. (о топ. определении непрерывности)

$f : X \to Y$, X,Y - метрическое пространство. Тогда эквивалентно:

1. f - непрерывно на X
2. $\forall G \subset Y$, G - откр в Y: $f^{-1}(G)$ - открыто в X.

Доказательство:
Из первого второе. Возьму $G \subset Y$ - открытое. Проверим, что $f^{-1}(G)$ - открытое.

$\forall x_0 \in f^{-1}(G)$ Проверим, что x_0 - внутренняя точка $f^{-1}(G)$. ~~очевидно.~~ f непрерывно в x_0, значит, что $\forall K$ - открытой в Y, существует открытая H, $x_0 \in H$: $\forall x \in H \in D : f(x) \in K$. что и доказывает нужное нам.

Из второго первое. Возьму $f(x_0) \in G$. Непрерывность в x_0 означает, что верно ли: $\forall G_1$ - открытой $f(x_0) \in G_1 \exists$ открытая H, $x_0 \in H : H \subset f^{-1}(G_1)$. Исходя из того что дано это выполнено

Теорема. (Вейерштрассса)

$f : X \to Y$, где X,Y - метрические пространства - непрерывно.

X компактно. Тогда f(X) - компактно.

Доказательство:
Проверим, что f(X) - компактно.

Возьму любое покрытие $f(X) \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha$, где G_α - открытое в Y. Надо доказать, что я могу выбрать конечное подпокрытие.

$X \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} f(G_\alpha)$. по теореме о топ. определении каждый прообраз открыт.

Откуда, тк X компактно, можно выбрать конечное $X \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} f^{-1}(G_{\alpha_i})$. Тогда $f(X) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$, откуда получаем искомое

Следствие

$f : X \to Y, f$ - непрерывно на X, X - компактно, тогда f(x) замкнут и ограничен в Y.

Следствие (1-ая теорема Вейерштрасса)

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, непрерывна. Тогда f - огр на [a,b].

Следствие

$f : X \to \mathbb{R}$. X - компактен, f - непрерывна. Тогда есть максимум и минимум функции.

Доказательство:
f(X) замкнуто и ограниченно в $\mathbb{R}.\sup(f(x), x \in X)$. Если супремум не бесконечность, но $\sup f(x) \notin f(x)$, тогда $\sup f(x)$ - предельная из технического

описания супремума . А откуда наше множество не замкнуто - Противоречие. Для минимума аналогично.

Следствие (Главная теорема Вейерштрасса)

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, непрерывнв, тогда существует max и min.

ИСПОЛЬЗУЕМ МАТЕМАТИЧЕСКУЮ ТЕРМИНОЛОГИЮ — **ЯСЕН ПЕНЬ ОЧЕВИДНО**.

$\mathbb{R}$ - $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^m$, непрерывное - такое называют путем при течении времени от a до b.

Множество $E \subset \mathbb{R}^n$, называют **линейно связным**, если любые две точки можно соединить путем0.

$\forall A, B \in E \exists \varphi : [a, b] \to E$, непрерывно, что $\varphi(a) = A, \varphi(b) = B$.

Связное множество E в R^m — если его нельзя представить в виде двух пересекающихся открытых в E множеств и не пустые.

Утв. **Теорема.**

$[a, b] \subset \mathbb{R}$. Тогда $[a, b]$ - связно.

Не существует: G_1, G_2 - открытые в $\mathbb{R}$, что пересечение не пусто. $G_1 \cap G_2 \neq 0$ и $[a, b] \subset G_1 \cup G_2$

Доказательство:
Докажем от противного. Пусть существует такие G_1, G_2. Тогда Н.У.О $a \in G_1$ и $b \in G_2$. $s := \sup(x : [a, x] \subset G_1) \leq b$. $s > a$. Куда принадлежит s? Пусть принадлежит G_1, но тогда s_1 - внутренняя, откуда справа от точки что-то есть, а там ничего нет, потому что она супремум. Пусть s лежит в G_2. Тогда супремум чуть левее. Противоречие.

Замечание от Славы. Лучше для понимания верхней штуки порисовкать рисуночки и подумать.

Теорема (Больцмана-Коши о промежуточном значении).

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$. f - непрерывная. Тогда $\forall t$ между $f(a), f(b)$, для которой $f(c) = t$, где $c \in [a, b]$.

Доказательство:
Допустим, что не так. Тогда есть какое-то t, которое не представимо(если больше, то более очевидно). Тогда отрезок $[a, b] = f^{-1}((\infty, t)) \cup f^{-1}((t, +\infty))$. Получается, что я отрезок a,b представил в виде двух открытых множеств. По прошлой теореме я проиграл.

Пример. Теорема о Бутерброде. Между двумя открытыми в $\mathbb{R}^2$. можно провести прямую

Замечание от Кохася: Введем новое обозначение $\sqcup$ - дизъюнктное объединение. Также введем `$[a,b]$` - отрезок от a до b или от b до a (мы не знаем кто больше)

Теорема (о сохранении промежутка)

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}, f$ - непр. Тогда $f(< a, b >)$ - промежуток.

Доказательство:
Давайте возьмем $m = \inf f, M = \sup f$ на промежутке $\langle a, b\rangle$. Достаточно проверить, что $(m, M) \subset f(\langle a, b\rangle)$. Возьмем t на промежутке. $m < t$, Тогда существует $x_1 \in \langle a, b\rangle; f(x_1) < t$. $M > t$ $x_2 \in \langle a, b\rangle; f(x_2) > t$. Тогда по теореме Больцмана-Коши существует такое c, что $f(c) = t$. Q.E.D

Напоминание: $\langle a, b\rangle$ - нам все равно включительно или нет границы.

Лемма. $E \subset \mathbb{R}$ - линейно связно равносильно тому, что E - промежуток.

Доказательство:
Из вправого левого - очевидно

В обратную сторону. Положим $m = \inf E, M = \sup E$. Закончите сами

Теорема (Больцмана-Коши о сохранении линейной связности).

$X-$лин. связное м.п., Y - метрическое пространство $f : X \to Y$ - непрерывно. Тогда $f(X)$ - линейно связное множество.

Доказательство:
Беру A, B. $f(a) = A, f(b) = B$ из f(X). $\exists\gamma : [\alpha, \beta] \to X$ - непр. Такое, что. $f \cdot g[a, b] \to Y$ - непрерывно.

Кохась написал что-то странное надо переделать

Теорема (о непрерывности монотонной функции)

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ монотонна.

1. Тогда f не имеет разрыва второго рода. Т.е. $\forall x : \exists f(x - 0), f(x + 0)$ [ну почти]
2. f - непр $\Leftrightarrow f(\langle a, b\rangle)$ - промежуток **Волшебное утв.**

Доказательство:
1) Н.У.О f - возрастающая. Тогда фикс. $x \in (a, b)$. Пусть $x_1, x_2 \in (a, b) : x1 < x < x2$. $f(x - 0) = \lim\limits_{x_1 \to x-0} f(x_1)$. По теореме о пределе монотонной функции и при этом предел не превосходит f(x). Аналогично правосторонний

2) вправо уже доказывали(см выше). Докажем влево. Берем x_0 на промежутке. Левосторонний равен правостороннему предел, что очевидно из того, что это промежуток.

Следствие. $f :< a, b >\to \mathbb{R}$ - монотон. Тогда число точек разрыва не более чем счетно. (Сделать инъекцию в множество $\mathbb{Q}$ и победили).

Теорема (о сущ. непрерывности обратной функции).

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ непрерывна и строго монотонна.

$m = \inf f, M = \sup f$. Тогда:

1. f обратима. $f^{-1}\langle m, M\rangle \to \langle a, b\rangle$. биекция*
2. f^{-1} того же вида монотонности, что и f
3. f^{-1} непрерывен.

   Доказательство:
   Пусть f - строго возрастает. $\langle m, M\rangle$, того же вида, что и $\langle a, b\rangle$. $f : \langle a, b\rangle \to \langle m, M\rangle$ — биекция. Второе очевидно. а непрерывна по теореме о непрерывности о монотонной функции.

5 Асимптотические оценки.

5.1 Оценки

Введем **обозначения**:

$f, g : D \in X \to \mathbb{R}, x_0$ - предельная точка D.

Если $\exists U(x_0) \exists \varphi : D \to \mathbb{R}\ f(x) = \varphi(x) g(x)$:

Если

1. φ - ограниченная на $U(x_0) \cap D$, то f = O(g) ($U(x_0)$ вроде выколотая окрестность)
2. $\varphi(x) \to 0$, при $x \to x_0$, то $f = o(g)$
3. $\varphi \to 1$, то $f \sim x$ — эквивалентность при $x \to x_0$.

$f, g : D \subset X \to \mathbb{R} : \exists c > 0 : \forall x \in D |f(x)| \leq cg|(x)|$. Тогда $f = O(g)$.

$f = O(g); g = O(f)$. Тогда $f \asymp g$.

Замечания:

1. $\dfrac{f}{g}$ - огр. на $U(x_1) \cap D$. Тогда $f = O(g)$
2. $\dfrac{f}{g} \to 0 \Rightarrow f = o(g)$, при $x \to x_0$.
3. $\dfrac{f}{g} \to 1 \Rightarrow f \sim g$, при $x \to x_0$.

O(g), o(g) будут использоваться как классы функций (множество).

~~про что дядя кохась не сказал.~~

Свойства:

1. $o(f) + o(f) = o(f)$. $o(f) - o(f) = o(f)$.
2. **Принцип Тортика.** $f \sim g \Leftrightarrow f = g + o(g) \Leftrightarrow f = g + o(f)$.
3. $f = o(g) \Rightarrow f = O(g)$.

~~Кохась ругает нас за работу~~

Таблица эквивалентности, при $x \to 0$.

1. $\sin x \sim x$
2. $\operatorname{tg} x \sim x$

3. $\arcsin x \sim x$
4. $\operatorname{arctg} x \sim x$
5. $\cos x \sim 1$
6. $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$
7. $e^x - 1 \sim x$
8. $a^x - 1 \sim x \ln a$
9. $\ln(1+x) \sim x$
10. $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Теорема. (о замене на эквивалентное)

$f, \tilde{f}, g, \tilde{g} : D \subset X \to \mathbb{R}$, X - метрическое пространство. x_0 - предельная точка D. $f \sim \tilde{f}$, $g \sim \tilde{g}$.

Тогда $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \tilde{f}(x)\tilde{g}(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)}$.

Если x_0 - предельная точка $\frac{f(x)}{g(x)}$ и если существует предел в $\overline{\mathbb{R}}$ в одной части равенства, то существует и в другой, а также они равны

Доказательство:
По определению $\exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0) \cap D$. (проколотой).

$f(x) = \alpha(x)\tilde{f}(x)$ и $g(x) = \beta(x)\tilde{g}(x)$, $\alpha(x) \to 1, \beta(x) \to 1$, при $x \to x_0$.

Пусть правая часть (1) корректно определена.

$\lim\limits_{x \to x_0} fg = \lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x)\tilde{f}(x)\beta(x)\tilde{g}(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \tilde{f}\tilde{g}$

Оставшиеся части доказываются аналогично. (нужно доказать еще 3 штучки)

Замечание от Славы. Мы можем смотреть предел на каких-то окрестностях нашей x_0. В данном случае мы смотрели на такую окрестность U, что в ней наши функции удовлетворяют всему, что нужно.

Очевидно на суммы это не работает.

5.2 Асимптотическое разложение.

Пусть даны функции $g_0, g_1, \ldots : D \in X \to \mathbb{R}$. x_0 - предельная точка. X - метрическое пространство.

$\forall x \in \mathbb{N} : g_k = o(g_{k-1}), x \to x_0$, а также $\exists U(x_0) \forall x \in U(x_0) \cap D : \forall k : g_k(x) \neq 0$.

Такой набор функций называется **шкалой асимптотического разложения**.

$f : D \to \mathbb{R}$. Выражение $f(x) = c_0 g_0(x) + c_1 g_1(x) + \ldots + c_n g_n(x) + o(g_n(x))$ называется **Асимптотическим разложением**.

Теорема. (о единственности асимптотического разложения)

Пусть даны $f, g_0, g_1, \ldots : D \subset X \to \mathbb{R}, x_0$ - предельная точка D. (g_k) - шкала при $x \to x_0$.

$f(x) = c_0 g_0(x) + c_1 g_1(x) + \ldots + c_n g_n(x) + o(g_n(x))$, $x \to x_0$

$f(x) = d_0 g_0(x) + d_1 g_1(x) + \ldots + d_m g_m(x) + o(g_m(x))$, $x \to x_0$

Тогда $m \leq n, \forall k \in \{0, \ldots, m\} : c_k = d_k$.

Доказательство:
Пусть l - первый коэффицент, который не совпадает. Тогда:

$c_l g_l(x) + \ldots + c_n g_n(x) + o(g_n(x)) = d_l g_l(x) + \ldots + d_m g_m(x) + o(g_m(x))$

Все, что написано после g_l могу обозначить за $o(g_l)$:

$c_l g_l(x) + o(g_l(x)) = d_l g_l(x) + o(g_l(x))$

$(c_l - d_l) g_l(x) = o(g_l(x))$. Такого не может быть (посмотреть на определение о мальнекого), откуда получаем противоречие. Q.E.D.

Небольшое забегание вперед.

Формула Тейлора для многочленов.

$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots a_n x^n$.

Вопрос: Как разложить многочлен f(x) по степеням $(x - x_0)^k$?

$f(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \ldots b_n(x - x_0)^n$

Очевидно, что $f(x_0) = b_0$. Возьму производную. Замечу, что $f'(x_0) = b_1$.

$b_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{(k!)}$. Получаю:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Теорема. (формула Тейлора с остатком в форме Пеано)

~~что за f(x), откуда она действует, нам ничего не сказали, угадываем :)~~

Пусть f - n раз дифференцируема на $< a, b >$, $x_0 \in (a.b)$.

Тогда $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$, при $x \to x_0$.

Доказательства не будет, оно приняло ислам

~~1:27 9 лекции, кохась что-то сказал про наклонную асимптоту, но я не вставлю это в конспект, так как там что-то странное~~

6 Дифференциальные исчисления.

6.1 Производные.

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \langle a, b\rangle$.

f - **дифференцируема** в x_0, если $\exists A \in \mathbb{R} : \exists$ бесконечно малая $\alpha(x), x \to x_0$.

$\forall x \in< a, b >$: $f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0)$.

Число A называют **производной** в точке x_0

По теореме о единственности асимптотического разложения A - корректно определено.

$f :< a, b >\to \mathbb{R} : x_0 \in< a, b >$: f - **дифференцируема** в точке x_0, если $\exists$ конечная.

$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} = A.$

Замечание от Славы. Первое определение более гибкое, если расширять функцию в $\mathbb{R}^m$ то понятно, как брать производную, когда у нас больше одной переменной (начинаем работать по векторам).

Теорема (о равносильности двух определений).

Опр 1 $\Leftrightarrow$ опр 2.

Доказательство:
Из первого второе: $f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0)$.

Выразим $A = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \alpha(x)$. Посмотрю на предел, получу искомое.

Из второго первое: повторите в обратную сторону из первого второе.

$A = f'(x_0)$

Замечание. Дифференциал df, $df(x_0, h) — f'(x_0) \cdot h$.

f - как в определении: $df : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : h \to f'(x_0) \cdot h$.

Замечание. $f'_+(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0+0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ — **правосторонняя производная**. Аналогично левосторонняя.

Если $f'_+(x_0), f'_-(x_0) = A \in \mathbb{R}$, то f — дифф. в точке x_0 и $f'(x_0) = A$.

Замечание. Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$, то считаем, что f - **НЕ ДИФФЕРЕНЦИУЕМА**, но можем говорить, что $f'(x_0) = +\infty$

Замечание. f дифференцируема в x_0, то f непрерывна в x_0. Тривиально из определений.

Пример:

$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$, при $x \neq = 0$,$f(x) = 0$, при x=0.

Хочу посмотреть дифференцируема ли в нуле? Да $f(x) = 0 + 0 \cdot (x - 0) + (x \sin \frac{1}{x})x$.

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$. f - **дифференцируема на отрезке**, если она дифф. в каждой точке этого отрезка.

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, пусть f дифф. на отрезке $< a, b >$. Тогда функция $x \to f'(x)$ - производная функции f.

Правила дифференцирования.

Теорема

$f, g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, дифф.в x_0. Тогда указанные ниже функции дифф. в x_0:

1. $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) = g'(x_0)$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R} : (\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$
3. $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
4. Если $g(x_0) \neq 0$. $(\frac{f}{g})'(x_0) =$

   Доказательство:

   1) 2) 3) Упражнение. 4) Используя $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ - немного измененное определение предела докажем. ОЧЕВИДНО (ну там реал просто подставить)

Теорема (дифференцирование композоции)

$f : \langle a, b\rangle \to \langle c, d\rangle$ – дифф. в x_0

$g : \langle c, d\rangle \to \mathbb{R}$ дифф. в $y_0 = f(x_0)$.

Тогда $g \cdot f$ - дифф в x_0 и $(g \cdot f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$

Доказательство:

$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + \alpha(x_0 + h) \cdot h$

$g(y_0 + k) = g(y_0) + g'(x_0) \cdot k + \beta(x_0 + h) \cdot h$

$g(f(x_0 + h)) = g(f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + \alpha(x_0 + h) \cdot h) =$

$= g(f(x_0)) + g'(f(x_0))(f'(x_0)h + \alpha(x_0 + h) \cdot h) + \beta(\cdot)(f'(x_0)h + \alpha(x_0 + h) \cdot h) = g(f(x_0)) + g'(f(x_0))f'(x_0)h + (\dots)$ — нужная нам формула

Замечание от Славы. Надо аккуратно посмотреть на то, что находится в скобках и посмотреть на первое определение дифференцируемости

Теорема (о производной обратной функции)

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, - непр, строго монотонная. Дифференциркема в x. Тогда f^{-1} - дифф. в f(x) - $(f^{-1})'(f(x)) = \dfrac{1}{f'(x)}$. $(f'(x) != 0)$

Доказательство:
Продифференцируйте $f^{-1}(f(x)) = x$. Получите искомое. Только нужно доказать, что $f^{-1}(x)$ в целом дифференцируема. Это доказывается из элементарных соображений о симметрии. (геометрическое доказательство через касательные).

f^{-1} существует по теореме о непрерывности обратной функции.

Возьму точку $(x, f(x))$ и точку $(x + h, f(x) + k)$. Заметим, что $h(k) = h = f^{-1}(f(x) + k) - f^{-1}(f(x))$. Чтобы найти производную обратной функции, мы должны найти вот такой предел: $\lim\limits_{k\to 0} \dfrac{f^{-1}(y + k) - f^{-1}(y)}{k} = \dfrac{h(k)}{k}$

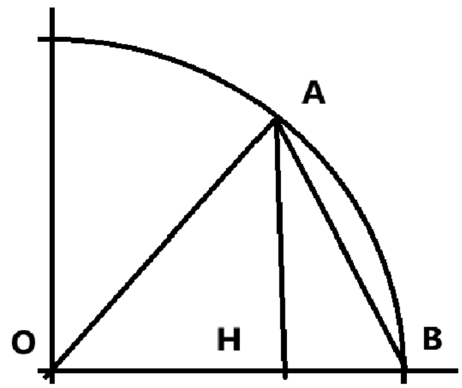
$= \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{h(k)}{f(x + h(k)) - f(x)}$ — откуда предел существует, откуда дифф в точке x.

6.2 Триг. функции

В школе мы умели их определять. Пользуемся этими определениями.

Лемма. $x \in (0, \dfrac{\pi}{2})$, $\sin x < x < \operatorname{tg} x$.

Доказательство:



Возьмем какую-то точку H так, что $\angle AOB = x$. Посчитаем $S_{\Delta AOB}$. $OB = 1$. Поэтому $S_{\Delta AOB} = \dfrac{AH \cdot OB}{2} = \dfrac{\sin x}{2}$. Посчитаем площадь сегмента. Найду $S_{\text{сегмент}} = \pi r^2 x = \dfrac{x}{2}$. Дострою за точку A до прямоугольного треугольника. Получу $S_{\Delta} = \dfrac{\operatorname{tg} x}{2}$, откуда я и получаю нужное мне неравенство.

~~что же такое эта ваша площадь, узнаете во втором семестре БУ.~~

Следствие. $\sin x, \cos x$ - непр. функции на $\mathbb{R}$

$|\sin x - \sin x_0| = |2 \sin \dfrac{x - x_0}{2} \cdot \cos x + x_0/2| \leq 2 \sin \dfrac{|x - x_0|}{2} \leq \dfrac{2|x - x_0|}{2}$. То есть предел существует, откуда непрерывна. Ну а косинус — сдвинутый синус.

Следствие. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Достаточно доказать, что предел с одной стороны.

Доказательство:

При $x \in (0, \dfrac{\pi}{2})$: $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1$. По принцопу двух городовых середина стремится к 1. (Равенство посередине — переписанное равенство сверху).

Следствие. $\sin x$ дифференцируема при всех $x \in \mathbb{R}$, $(\sin x)' = \cos x$.

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x + h) - \sin x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2 \sin \frac{h}{2} \cdot \cos(x + \frac{h}{2})}{h} = \lim_{h \to 0} \cos(x + \frac{h}{2}) = \cos x.$$

Откуда производная синуса такая. ~~Кохась: синус найдите сами.~~

6.3 Теоремы о среднем.

~~предельно аккуратно со всем. Техал по звуку~~

Лемма. $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, функция дифф в x_0, $f'(x_0) > 0$.

Тогда $\exists \varepsilon > 0 f(x) > f(x_0)$, при $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$, $f(x) < f(x_0)$, при $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$

Доказательство:
$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f(x_0) > 0$. Смотрим на последовательность с правой стороны. По теореме о стабилизации знака, существует ε, такой, что в окрестностях $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f(x_0) > 0$. Аналогично и с другйо стороны есть такой ε, берем минимум и выигрываем (пристально посмотрите на числитель)

Теорема (Ферма)

Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$, x_0 — точка максимума на интервале (a, b), x_0 - дифференцируема в x_0. Тогда $f(x_0) = 0$.

Доказательство:
Берем лемму. Если $f(x_0) > 0$ — сломалось, если $f(x_0) < 0$ — сломалось по лемме, а откуда $f(x_0) = 0$

~~вот как это может быть теорема ферма, когда слово производная придумали в 19 веке, а ферма умер и уже сгнил в гробу тогда.~~

Теорема (Ролля)

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, дифф на (a, b), $f(a) = f(b)$. Непрерывна на $[a, b]$. Тогда существует $c \in (a, b) : f'(c) = 0$.

Доказательство:
f - непрерывна на $[a, b]$, откуда $[a, b]$ - компактен, по теореме Вейельштрасса, существует максимум и минимум функции. Если максимум и минимум на концах, тогда скучная ситуация (отрезок). Иначе максимум или минимум есть на (a, b), откуда по теореме Ферма в этой точке будет $f(x_0) = 0$.

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ - многочлен, $x_0 \in \langle a, b\rangle . f(x_0) = 0$. Тогда x_0 называют **корнем кратности k**, если $f(x) = (x - x_0)^k \cdot g(x)$, где $g(x_0) \neq 0$ и g — многочлен.

Зам. Если x_0 корень кратности k многочлена $f(x)$, тогда x_0 корень кратности $k - 1$ у $f'(x)$ — очевидно.

Теорема.

$L_n(x) = ((x^2-1)^n)^{(n)}$ — n раз продифф — **Многочлены Лежандра**.

Тогда L_n имееет ровно n вещественных корней на $(-1,1)$.

Доказательство:
(Решали на практиках).

Доказательство очевидно(просто много раз используйте теорему Ролля, а также прошлое замечание)

Теорема (Лагранжа).

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$, дифф. на (a,b) Непрерывна на $[a,b]$.

Тогда $\exists\, c \in (a,b) : \dfrac{f(b)-f(a)}{a-b} = f'(c)$

Теорема (Коши).

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$, дифф. на (a,b). Непрерывна на $[a,b]$.

$g : [a,b] \to \mathbb{R}$, дифф. на (a,b). Непрерывна на $[a,b]$. $g' \neq 0$ на (a,b).

Тогда $\exists c \in (a,b) : \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Доказательство:
$F(x) = f(x) - kg(x)$. Подберем k так, что $F(a) = F(b)$.

$f(a) - k \cdot g(a) = f(b) - k \cdot g(b)$

$\dfrac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)} = k$, при этом, тк $g' \neq 0$ на (a,b), то $g(a) \neq g(b)$ (иначе по теореме Ролля мы проиграем). Значит такое k существует.

Теперь из этого следует, что $\exists c, F'(c) = 0$, то есть. $f'(c) - k \cdot g'(c) = 0$. А это то, что от нас требуют.

Замечание от Славы. Теорема Коши — обобщение теоремы Лагранжа ($g(x) = x$).

Следствие: $f : \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$ дифф. на (a,b). $\exists M > 0 : \forall k \in (a,b) : |f(k)| \leq M$.

Тогда для любых $x_0, x_0 + h \in \langle a,b \rangle$: $|f(x_0) - f(x_0+h)| \leq M \cdot |h|$.

Следствие: f — непрерывна на $[x_0, x_0+h]$, дифференцируема на (x_0, x_0+h). $\lim\limits_{x \to x_0+0} f'(x) = A \in \mathbb{R}$. Тогда $f'_+(x_0) = A$

Доказательство:

$\lim\limits_{x\to x_0+0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} f'(c)$, где $c = c(x) \in (x_0, x)$, определенно теоремой Лагранжа. Откуда очевидно.

Теорема (Дарбу, о промежуточном значении производной)

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, дифф. $\to [a, b]$. Тогда $\forall C$ между $f'(a), f'(b)$, существует $c \in (a, b)$: $f'(c) = C$.

Доказательство:
$g(x) = f(x) - Cx$.

$g'(a)$ и $g'(b)$ ~~что-то больше нуля, что-то меньше нуля. Значит есть точка принимающая ноль~~ - так нельзя, так как про непрерывность производной мы ничего не знаем.

Н.У.О $g'(a) > 0, g'(b) < 0$. Пусть c - точка максимума g на $[a, b]$, она не может быть крайней по лемме в начале параграфа, откуда $g'(c) = 0$.

Следствие. Если f дифф на $\langle a, b\rangle$, тогда $f(\langle a, b\rangle)$ — промежуток.

Следствие. f' не имеет разрывов первого рода.

6.4 Школьный урок

$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{Q}$. Обозначается $f_\alpha(x) = x^\alpha$.

$\alpha = \mathbb{N}$. Очевидно непрерывно на $\mathbb{R}$. Все понятно

$\alpha = -\mathbb{N}$. Обратная непрерывность и существование везде кроме нуля и монотонно

$\alpha = 0$. Тождественная единица. $0^0 = 1$ ради непрерывности.

$\alpha = \dfrac{1}{n}$. n - нечет., тогда $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная, строго монотонная, откуда есть обратная. Тогда $f_{\frac{1}{n}} = f_n^{-1}$.

$\alpha = \dfrac{1}{n}$. n - чет., тогда $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная, строго монотонная на $[0, +\infty)$, откуда есть обратная на $[0, +\infty)$. Тогда $f_{\frac{1}{n}} = f_n^{-1}$ на $[0, +\infty)$

$\alpha \in \mathbb{Q}, \alpha = \dfrac{p}{q}, (p, q) = 1$ $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$, $f_\alpha = f_{\frac{1}{q}} \cdot f_p$.

Теорема.

Число e^2 — иррационально. [e тоже будет рационально :)]

Доказательство:

Пусть $e^2 = \dfrac{2 * k}{n}$. $n \cdot e = 2k \cdot e^{-1}$.

$n(2k-1)!e = (2k)!e^{-1}$.

$n(2k-1)! \cdot (1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \dfrac{1}{(2k-1)!} + \dfrac{e^c}{(2k!)})$, $c \in (0, 1)$ — воспользовались разложением в форме Лагранжа в 0 и подставили 1.

$=$ целое $+ \dfrac{n}{2k} \cdot e^c =$ целое $+ \dfrac{e^c}{e^2}$.

$(2k)!(1 - 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2k!} - \dfrac{e^c}{(2k+1)!})$ — воспользовались разложением в форме Лагранжа в 0 и подставили -1.

$=$ целое $- \dfrac{e^c}{(2k+1)}$. И у нас не сходятся дробные части. В первом случае она меньше $\dfrac{1}{2}$, а во-втором случае больше $\dfrac{1}{2}$.

Метод Ньютона.

Цель метода: Найти корень на промежутке (a, b). (Мы берем приближение корня)

Беру точку x_n. Беру уравнение касательной в точке x_n и еще точку (x_{n+1}), в которой эта прямая пересекает ось x. Пусть Ψ — точка в которой находится корень, который мы ищем. Посмотрим, как близко мы к корню.

$$\Psi - x_{n+1} = \Psi - x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{f(x_n) + f'(x_n)(\Psi - x_n)}{f'(x_n)}.$$

Посмотрим на разложение в Лагранже:

$$f(\Psi) = f(x_n) + \frac{f'(x_n)}{1!}(\Psi - x_n) + \frac{f''(c)}{2!}(\Psi - x_n)^2 = 0.$$

$$\frac{f(x_n) + f'(x_n)(\Psi - x_n)}{f'(x_n)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{f''(c)(1 - x_n)}{f'(x_n)}.$$

Возьмем $m = \min(f'(x))$, $M = \max |f''(x)|$. на нашем интервале

$$|\Psi - x_{n+1}| = \frac{1}{2} \cdot \frac{|f''(c)(1 - x_n)|}{|f'(x_n)|}(\Psi - x_n)^2 \leq \tfrac{M}{2m}|\Psi - x_n|^2 \leq \tfrac{M}{2m}(\tfrac{M}{2m}|\Psi - x_{n-1}|^2)^2 \leq$$

$$\ldots \leq \tfrac{M}{2m}^{1+2+\ldots+2^{n+1}}|\Psi - x_1|^{2^n} = \tfrac{2m}{M}(\frac{M}{2m}|\Psi - x_1|)^{2^n}.$$

Метод рабочий, если вам не выбрасывает никуда далеко.(Как я понял тут нет доказаательства)

Замечание от Славы. Буквально записал то, что говорил Кохась. Не могу придумать более адекватного объяснения

6.5 Производные ВЫСШЕГО порядка.

$f:\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$ — дифф на $\langle a,b\rangle$. $x_0\in\langle a,b\rangle$, Если функция $f'(x)$ дифф. в x_0. Тогда назовем $(f'(x_0))'$ — **второй производной** f в точке x_0.

Если $\forall x_0\in\langle a,b\rangle$, то $f''(x)$ — функция второй производной.

Аналогично $f^{(n)}(x_0)$, n-ая производная.

$\langle a,b\rangle, C^n(\langle a,b\rangle)$ — множество функций, который n раз дифференцируемы на (a,b) и $f^{(n)}$ непрерывна на $\langle a,b\rangle$

Теорема (Формула Тейлора с остатком в форме Пеано)

$f:\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}.x_0\in\langle a,b\rangle$ $f-(n-1)$ раз дифф. на $\langle a,b\rangle$.

$\exists f^{(n)}(x_0)\in\mathbb{R}$. Тогда:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n),\ x\to x_0$$

Доказательство:
1) Начну с того что $f(x_0)=f'(x_0)=\dots f^(n)(x_0)=0$. Докажем, что $f(x)=0+o((x-x_0)^n)$, $x\to x_0$.

База: $n=1$. $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$.

Переход: $n\to n+1$. Видно, что f' удовл предположению индукции. Значит $f'(x)=o(x-x_0)^n$, $x\to x_0$. По теореме Лагранжа $f(x)-f(x_0)=f'(c)(x-x_0)$, где $c\in(x,x_0)$.

$$|\frac{f(x)}{(x-x_0)^{n+1}}|=|\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}}|=|\frac{f'(c)(x-x_0)}{(x-x_0)^n}|=|\frac{f'(c)}{(c-x_0)^n}|\cdot|\frac{(c-x_0)^n}{(x-x_0)^n}|\to 0$$
— победили.

2) Общий случай. Рассмотрим $g(x)=f(x)-T_n(f,x_0)=f(x)-(\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k)$. Заметим, что $g(x_0)=0,\dots,g^{(n)}(x_0)=0$. Используем частный, откуда и получаем нужное.

Теорема (Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа)

$f\in C^n(\langle a,b\rangle)$, f - $(n+1)$ раз дифференцируемы на $(a+b)$

$x,x_0\in\langle a,b\rangle$. Тогда $\exists c\in(x,x_0)$.

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Доказательство:

$\phi(t) = f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^k(t)}{k!}(x-t)^k$. Позамечаем интересные вещи.

$\phi(x) = 0$, $\phi(x_0) =$ остаток в формуле Тейлора.

$\phi'(t) = -\dfrac{f^{n+1}(t)}{n!}(x-t)^n$

Теорема Коши. $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. $f = \phi$, $g(t) = (x-t)^{n+1}$, $a = x_0$, $b = x$;

$$\frac{\phi(x)-\phi(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{-R_{n+1}(x_0)}{-(x-x_0)^{n+1}} = \frac{-\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n}{-(n+1)(x-c)^n}$$

Откуда и получаем наш вид остатка

Замечание от Славы. Кохась вдруг стал обозначать остаток многочлена Тейлора как $R_{n+1}(x_0)$.

Замечание. Пусть $f \in C^\infty(\langle a, b\rangle)$. Пусть существует M, A:

$\forall t \in \langle a, b\rangle : |f^n(t)| \le MA^n$.

Тогда $\forall x.x_0 \in \langle a, b\rangle$. $T_n(f, x_0)(x) \to f(x)$, при $n \to +\infty$. Доказательство это просто аккуратные оценки.

Замечание. $f(x) = x + x^2 + x^3 \cdot \sin(\dfrac{1}{x^{100}})$, при $x \to 0$ — продифференцируйте и поймите, что с вашей жизнью не так.

Асимптотическое разложение просто опасно дифференцировать.

$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + o(x^n)$ — формула Тейлора, $x_0 = 0$.

То $f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \ldots + na_n x^{n-1} + o(x^{(n-1)})$ — верная формула, так еще и формула тейлора для f'.

Теорема.

Пусть $P(x), Q(x)$ - многочлен, $\deg P(x) < \deg Q(x)$, $P(x), Q(x)$ — взаимнопросты.

$Q(x) = (x-x_1)^{\alpha_1} \cdot (x-x_2)^{\alpha_2} \ldots (x-x_n)^{\alpha_n}$.

Тогда существуют вещественные числа $A_1, A_2, \dots, A_{\alpha_1}, B_1, \dots, B_{\alpha_2}, \dots, D_1, \dots, D_{\alpha_n}$, что

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \Big(\frac{A_1}{x-x_1} + \dots + \frac{A_{\alpha_1}}{(x-x_1)^{\alpha_1}}\Big) + \Big(\frac{B_1}{x-x_2} + \dots + \frac{B_{\alpha_2}}{(x-x_2)^{\alpha_2}}\Big) +$$

$$\dots + \Big(\frac{D_1}{x-x_n} + \dots + \frac{D_{\alpha_n}}{(x-x_n)^{\alpha_n}}\Big)$$

Доказательство:

Пусть $F_1(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}(x-x_1)^{\alpha_1} = \dfrac{P(x)}{(x-x_2)^{\alpha_2}\dots(x-x_n)^{\alpha_n}}$.

Разложим F_1 по формуле Тейлора в точке x_1:

$F_1(x) = a_0 + a_1(x-x_1) + \dots + a_{\alpha_1}(x-x_1)^{\alpha_1} + o((x-x_1)^{\alpha_1})$.

$\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{F_1(x)}{(x-x_1)^{\alpha_1}} = \dfrac{a_0}{(x-x_1)^{\alpha_1}} + \dfrac{a_1}{(x-x_1)^{\alpha_1-1}} + \dots + \dfrac{a_{\alpha_1-1}}{(x-x_1)} + a_{\alpha_1} + o(1)$, $x \to x_1$.

$A_1 = \alpha_1 - 1$ и так далее.

Аналогично с другими $B, \dots, D$. Построили. Почему получили то, что надо

$\dfrac{P(x)}{Q(x)} - \Big(\dfrac{A_1}{x-x_1} + \dots + \dfrac{A_{\alpha_1}}{(x-x_1)^{\alpha_1}}\Big) - \dots - \Big(\dfrac{D_1}{x-x_n} + \dots + \dfrac{D_{\alpha_n}}{(x-x_n)^{\alpha_n}}\Big)$.

Давайте посмотрим на первую пару. Получается что-то ограниченное при $x \to x_1$. Но как такое может быть, это значит то, что было в знаменателе: $(x - x_1)^{\alpha_1}$— сократилось! Значит у меня сокращается весь знаменатель, если я вычту все серии.

Значит такая разность на самом деле функция у которой сократился весь знаменатель. Это многочлен. Но как такое может быть $\deg P < \deg Q$. Откуда это просто 0.(тут надо больше аккуратности).

6.6 Показательные функции

Хочу найти все непрерывные функции такие, что$f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$. Назову все такие функции **<u>показательными</u>** (игнорирую тождественный ноль и тождественный один).

Свойства.

1. $\forall x : f(x) > 0; f(0) = 1$. Очевидно откуда
2. $\forall r \in \mathbb{Q} : \forall x : f(rx) = f(x)^r$. Очевидно из определения рациональных степеней.
3. Введем число $a = f(1)$, f - строго монотонная, более того: $a \neq 1$. Если $a > 1$, то строго возрастает. Если $a < 1$, то строго убывает. Доказательство очевидно.
4. Множество значений это $(0, +\infty)$. Очевидно по свойствам степени.
5. Зафиксируем функцию. Пусть существует функция $\overline{f}$, которая в f(1) принимает то же самое значение. Заметим, что $\overline{f} = f$.

~~Кохась: возьму кредит в виде теоремы.~~

<u>Теорема.</u>

$\exists f_0$ - показательная функция, такая что:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 1$$

~~Кохась: ну пока пофиг что такая может не существовать. Пока что-никбдь подоказываем~~

<u>Теорема.</u>

$\exists \alpha \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = f_0(\alpha x)$

<u>Доказательство:</u>
$f(1) = a > 0$; $f_0(\alpha) = a$, $\alpha \neq 0$.

Посмотрим на $g(x) = f_0(\alpha x)$ - это показательная функция (удовлетворяет определению). $g(1) = a = f(1)$, откуда по свойству 5 они совпадают.

Что мы только доказали: Любую показательную функцию можно выразить через f_0.

Следствие: функция из теоремы 2 - единственна (если существует). (От прот.)

Функцию $f_0(x)$ буду называть **<u>экспонентой</u>**. Буду обозначать ее $f_0(x) = exp(x) = e^x$. (пока это не то e, это просто обозначение).

Так как $\dfrac{e^x - 1}{x} \to 1$, откуда $e^x > 1$, при $x > 0$.

Следствие. $a > 0, a \neq 1$ $\exists!$ показ. функция $f(1) = a$. Очевидно

Обозначим все наши функции: a^x

Следствие. $\forall x, y : \forall a > 0, a \neq 1 : a^{xy} = (a^x)^y = (a^y)^x$.

$a > 0, a \neq 1, a^x : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ строго монот., непрерывно. Откуда существует обратная. Назовем ее **логарифмом**. $\ln x = \log_e x$.

Замечательный предел. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

Следствие. $(e^x)' = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x$

Замечательный предел. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{x} = 1$. Переверните дробь и увидите что-то больно похожее на первый зам. предел.

Следствие. $(\ln x)' = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(x + h) - \ln x}{h} = \lim \dfrac{\ln(1 + \frac{h}{x})}{\frac{h}{x}} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x}/$

Замечательный предел. $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$. $e^{\ln(1+x)\frac{1}{x}} \to e$.

Следствие. Старое е и новое е совпадают, потому что старое е это предел $(1 + \frac{1}{n})^n$.

Замечательный предел. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 + x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$.

$$\frac{(1 + x)^\alpha}{x} = \frac{f(x)}{x} = \frac{f(x)}{\ln(f(x) + 1)} \cdot \frac{\alpha \ln(1 + x)}{x} \to \alpha.$$

6.7 Монотонность и экстремумы.

Теорема (Критерий монотонности)

$f \subset (\langle a, b\rangle)$, дифф на (a, b). Тогда f возрастает на $\langle a, b\rangle \Leftrightarrow f' \geq 0$ на (a, b)

Доказательство очевидно. (Аналогично убывание)

Следствие. $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$. Тогда $f = const \Leftrightarrow f \in C(\langle a, b\rangle)$ и f - дифф на интервале, $f' = 0$. Очевидно.

Следствие. $f \in C(\langle a, b\rangle)$, дифф на (a, b). Тогда f - строго возрастающая $\Leftrightarrow$

1. $f' \geq 0$ на (a, b).
2. ни на каком промежутке $\langle x_1, x_2\rangle \subset \langle a, b\rangle$, $f' \neq 0$ на $\rangle x_1, x_2\langle$. (интервал не из одной точки).

Доказательства очевидное

Следствие. $f, g \in C(\langle a, b\rangle)$, дифф на $\langle a, b)$. Пусть $f(a) < g(a)$, а еще $f'(x) < g'(x)$ на (a, b). Тогда $f(x) \leq g(x)$ на $\langle a, b\rangle$. Доказательство очевидно (Посмотреть на $h(x) = g(x) - f(x)$)

$f : X \to \mathbb{R}$, x_0 — **точка лок. максимума**. Существует Окрестность точки x_0 : $\forall x \in U(x_0) : f(x) \leq f(x_0)$. **Экстремум.**

Теорема (о необходимом и достаточном условии экстремума)

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$. $x_0 \in (a, b)$. Пусть f - дифф. (a, b). Тогда:

1. x_0 — экстремум $\Rightarrow f'(x_0) = 0$.
2. f — n раз дифф в x_0. Пусть $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_n) = 0$, $f^{(n)} \neq 0$. Если $f^{(n)}(x_0) > 0$, n - четная, тогда минимум. Если нечетная, то не экстремум. Если $f^{(n)}(x_0) > 0$, n - четная, тогда максимум. Если нечетная, то не экстремум.

   Доказательство:
   1) Теорема Ферма.

   2) $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)$, при $x \to x_0$ — разложение Тейлора.

   $f(x) - f(x_0) = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$ по условию.

   $= \dfrac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + (x - x_0)^n\alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$ - остаток в форме

Пеано.

$= (\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \alpha(x))(x - x_0)^n$. Откуда уже методом вгялдывания получится нужное нам выражение.

6.8 Равномерная непрерывность.

$f : X \to \mathbb{R}$. X - метрическое пространство.

f - **равномерно непрерывно**, если

$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0\text{"}\forall x_1, x_2 \in X : \rho(x_1, x_2) < \delta : |f(x_1) - f(x_2) < |\varepsilon|$.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}$, f - равномерно непрерывно E.

$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in E : |x_1 - x_2| < \delta : |f(x_1) - f(x_2)| < \delta$.

Замечание. $X \to Y$ м.п.-ства $\rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$. (Можно обобщить).

Теорема (Кантора)

Дано отображение $X \to Y$, X - компактно, $f-$ непр на X.

Тогда $f-$ равномерно непр.

Доказательство:

От противного $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta, \delta = \dfrac{1}{n}\ \exists\, x_n, \overline{x_n} < \dfrac{1}{n} : \rho(f(x_n), f(\overline{x_n})) > \varepsilon$.

В метрическом пространстве $\Leftrightarrow$ секв. компактно. (почему?)

Возьмем x_n - последовательность. Есть сходящаяся подпоследовательность. Выберем. Тогда для x_n начнет ломаться непрерывность (x_n и $\overline{x_n}$ стремятся к a)

Следствие. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, непр. Тогда f равномерно непрерывно.